Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 26. Mai 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 6

Abgabe bis Dienstag, den 09.06.2009, 11:30 Uhr im Abgabekasten des Lehrstuhls A für Mathematik (Hauptgebäude, vor Zimmer 155)

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte)

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe dürfen Sie verwenden, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis hat (Folgerung aus dem Zornschen Lemma).

a) Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie, dass dann jedes $x \in H$ eine eindeutige Zerlegung

$$x = x_K + x_K^{\perp}$$

hat mit $x_K \in K$ und $x_K^{\perp} \perp y$ für alle $y \in K$. Hinweis: K ist ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt von H auf K einschränkt.

b) Sei H ein Hilbertraum und $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$ sowie $K = \overline{\operatorname{span}\{x_i \mid i \in I\}}$. Zeigen Sie, dass $K = H$ genau dann gilt, wenn für $f \in H$ mit $\langle f, x_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$ stets $f = 0$ gelten muss.

c) Sei $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für $\hat{g}$ dafür an, dass $\operatorname{span}\{T_t g \mid t \in \mathbb{R}\}$ dicht in $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $y'(x) + 2y(x) = \cos(2x)$

b) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \sin(3x) + \cos x$

Aufgabe 3 (6+3 Punkte)

Sei $\phi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung einer glatten überschneidungsfreien geschlossenen Kurve der Länge 2π, die über die Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt, für $\phi : t \mapsto (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ gelte

(i) $x, y \in C^1([-\pi, \pi])$,

(ii) $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$ und $\phi'(-\pi) = \phi'(\pi)$,

(iii) $|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = 1$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$.

Bitte wenden →

Für den Flächeninhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt dann (bei Durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn)

$$A = -\int_{-\pi}^{\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie

$$2 - \frac{2A}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(|n\hat{x}(n) - i\hat{y}(n)|^2 + |n\hat{y}(n) + i\hat{x}(n)|^2 + (n^2-1)(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2)\right).$$

b) Folgern Sie $A \leqslant \pi$, und zeigen Sie, dass $A = \pi$ nur dann gilt, wenn ϕ einen Kreis mit Radius 1 parametrisiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sind $f, g \in L^2_{2\pi}$, so ist $h := f \cdot g \in L^1_{2\pi}$. Zeigen Sie

$$\hat{h}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(k-n)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.