Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 9. Juni 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 7

Abgabe bis Dienstag, den 16.06.2009, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Für $a > 0$ sei $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_a(x) = e^{-ax^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f_a * f_b$ für $a, b > 0$. **Hinweis**: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

b) Für $t > 0$ sei $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $g_t * g_s = g_{s+t}$ für alle $t, s > 0$.

Bemerkung: Die Faltungsprodukte in dieser Aufgabe sind die nichtperiodischen Produkte aus (3.10).

Aufgabe 2 (3+3+5 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - \tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Sei $t > 0$. Benutzen Sie Teil (a) mit $f : x \mapsto e^{-tx^2}$, um

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y-\frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

zu zeigen.

c) Setzen Sie in (b) $t = \frac{|x|}{2}$, um

$$(x \mapsto e^{-|x|})^\wedge(\xi) = \frac{4\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ zu beweisen (dabei bezeichnet $|\cdot|$ wie in 3.1 die Euklidische 2-Norm auf $\mathbb{R}^2$ und Γ die Gamma-Funktion, definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

für alle $x > 0$). **Hinweis**: Verwenden Sie »Integration über Sphären«.

Bitte wenden →

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)

Es seien $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

a) Zeigen Sie: $f * g$ ist stetig, und im Falle $p, q < \infty$ gilt $(f * g)(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-meßbar mit $\lambda(A) > 0$. Zeigen Sie: $A - A = \{a - b \mid a, b \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Umgebung der Null.