Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 16. Juni 2009

# Fourieranalysis, Übungsblatt 8

Abgabe bis Dienstag, den 23.06.2009, 11:30 Uhr

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

Sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-y^2+2xy}\,\mathrm{d}y = 0$.
Zeigen Sie $f = 0$.
**Hinweis**: Betrachten Sie $f * g$, für $g(x) = e^{-x^2}$.

**Aufgabe 2** (2+5 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ in einer Umgebung von 0 beschränkt und $\hat{f} \geqslant 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt.
**Hinweis**: Verwenden Sie Teil (a) mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|^2/(2T^2)}$ für $T > 0$.

**Aufgabe 3** (3+2+2 Punkte)

Sei die stetige Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ derart, dass $f$ und $\hat{f}$ beide Abklingraten $\alpha > 1$ haben.

a) Sei $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ mit $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$. Zeigen Sie, dass $g$ wohldefiniert ist, mit $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

b) Seien $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten von $g$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_n = (2\pi)^{-1}\hat{f}(n).$$

c) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Poisson'sche Summenformel:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

wobei beiden Seiten absolut konvergieren.

**Bitte wenden →**

**Aufgabe 4** (3+3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson'schen Summenformel:

a) Für alle $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

**Hinweis**: Betrachten Sie die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & , -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Für $t > 0$ gilt

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|}.$$