LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 23. Juni 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 9

Abgabe bis Dienstag, den 30.06.2009, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 (3+4+3 Punkte)

a) Zeigen Sie die Leibniz-Regel: Für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\gamma(f \cdot g) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}(\partial^\alpha f)(\partial^\beta g).$$

Dabei sei $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant c(1+|x|)^m$. Zeigen Sie, daß $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto f \cdot g$ stetig ist, also daß $g_k \to g$ in $S(\mathbb{R}^n)$ auch $f \cdot g_k \to f \cdot g$ in $S(\mathbb{R}^n)$ impliziert.

c) Zeigen Sie, für fest gewähltes $f \in S(\mathbb{R}^n)$, dass die Abbildung $g \mapsto f * g$ auf $S(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 2 (3+3+4+3+1+2 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die n-te *Hermite-Funktion* $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} q^{(n)}(x), \qquad \text{wobei} \quad q(x) = e^{-x^2},$$

jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-x^2/2} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} P^{(n)}(x) e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

für alle Polynome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Folgern Sie, daß $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\tilde{h}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} h_n(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ ist.

Bitte wenden →

c) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|tx|} e^{-x^2} \, d\lambda(x) \in [0, \infty)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) P(x) e^{-x^2} \, d\lambda(x) = 0$$

für alle Polynome P erfüllt, so gilt $f = 0$ (f. ü.). Hinweis: Beweisen Sie zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) e^{-x^2} \, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2} \, d\lambda(x)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

d) Beweisen Sie, daß $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist.

e) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x h_n(x) - h_n'(x) = h_{n+1}(x)$.

f) Bestimmen Sie $\hat{h}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (in Abhängigkeit von h_n).