Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 30. Juni 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 10

Abgabe bis Dienstag, den 07.07.2009, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 (3+2+4+3+2 Punkte)

Es sei $H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]} = \hat{f} \text{ f. ü.}\}$ der Raum der *bandbeschränkten Funktionen.*

a) Zeigen Sie: H ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$.

b) Weisen Sie $H \subseteq C^0(\mathbb{R})$ nach, genauer: Zeigen Sie, daß für jedes $f \in H$ ein $g \in C^0(\mathbb{R})$ existiert mit $f = g$ f. ü.

c) Definiere

$$\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $(T_k \operatorname{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H ist.

d) Beweisen Sie den *Abtastsatz von Shannon:* Für jedes $f \in H$ (welches nach Teil (b) ohne Beschränkung der Allgemeinheit als stetig angenommen wird) und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(x-k),$$

wobei diese Reihe sowohl in L^2 als auch gleichmäßig konvergiert.

e) Zeigen Sie

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2$$

für alle (o. B. d. A. stetigen) $f \in H$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geqslant a > 0$. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2} \, d\lambda(x)$,

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \, d\lambda(x)$,

Bitte wenden →

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x)$ (falls benötigt, darf $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ benutzt werden),

d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|^2)^3} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Für die Richtung aus $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fassen Sie f als temperierte Distribution auf.