Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 7. Juli 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 11

Abgabe bis Dienstag, den 14.07.2009, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (dabei bezeichnet f' die punktweise Ableitung, in $\{x_1, \dots, x_n\}$ mit beliebigen Werten). Ferner sei $f \in S'(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f' \in S'(\mathbb{R})$ gilt, und bestimmen Sie $\partial f - f'$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Entscheiden Sie für die folgend (f. ü.) definierten Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils, ob sie temperierte Distributionen sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

$$f_1(x) = \sin(x), \qquad f_2(x) = e^x, \qquad f_3(x) = \log|x|, \qquad f_4(x) = e^x \sin(e^x).$$

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

a) Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß es $C, k > 0$ gibt mit

$$\int\limits_{K_r(0)} |f(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \leqslant C(1+r)^k$$

für alle $r > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

b) Ist die Integralabschätzung aus (a) notwendig für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, weiter sei $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Folge der diskreten Fourierkoeffizienten von f. Zeigen Sie:

i) $f \in S'(\mathbb{R})$.

ii) $\hat{f} = \lim\limits_{N \to \infty} 2\pi \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k \delta_k$ in $S'(\mathbb{R})$.

iii) $f = \lim\limits_{N \to \infty} S_N(f)$ in $S'(\mathbb{R})$.