Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 21. Juli 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 13

Abgabe bis Dienstag, den 28.07.2009, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \leqslant n$. Die *partielle Fouriertransformierte* $\mathcal{F}_m(f)$ von $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}_m(f)(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) e^{-i\langle \xi, x\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_m(x)$$

für alle $(\xi, t) \in \mathbb{R}^n$, mit der Identifizierung $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_m : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ein topologischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.

a) Zeigen Sie, daß

$$\varphi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, 0) \, \mathrm{d}\lambda_m(x)$$

in $S'(\mathbb{R}^n)$ liegt.

b) Berechnen Sie $\hat{\varphi}$ explizit. Verwenden Sie dabei die Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (3+4 Punkte)

Sei $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \chi_{(0,\infty)}(t).$$

a) Zeigen Sie, dass $G \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ ist.

b) Sei $\Delta_x : S'(\mathbb{R}^{n+1}) \to S'(\mathbb{R}^{n+1})$ der Laplace Operator bezüglich der ersten n Variablen und ∂_t die partielle Ableitung bezüglich der letzten Variable. Zeigen Sie, dass G Fundamentalgleichung der Wärmeleitungsgleichung ist, das heißt, dass $(\partial_t - \Delta_x)(G) = \delta_0$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die partielle Fouriertransformation aus $S'(\mathbb{R}^{n+1})$.