



Fourieranalysis, Übungsblatt 1

Abgabe bis Dienstag, den 28.04.2009, 11:30 Uhr im Abgabekasten des Lehrstuhls A für
Mathematik (Hauptgebäude, vor Zimmer 155)

Aufgabe 1 (4+3+2+2+3 Punkte)

Ist V ein K -Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) und $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so heißt N *Norm* (und V zusammen mit N *normierter Vektorraum*), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(N1) $N(0) = 0$ und $N(v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

(Definitheit)

(N2) $N(sv) = |s|N(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

(Homogenität)

(N3) $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ für alle $v, w \in V$.

(Dreiecksungleichung)

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und V der Vektorraum der beschränkten stetigen Funktionen auf D , so ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^0} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_{C^0} := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

eine Norm auf V und wird als *Supremumsnorm* bezeichnet. Analog definiert man für $n \in \mathbb{N}$ auf dem Vektorraum V_n der n -mal stetig und beschränkt differenzierbaren Funktionen auf D die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^n} : V_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_{C^n} := \sup\{|f^{(m)}(x)| \mid 0 \leq m \leq n, x \in D\}.$$

Ist X eine nichtleere Menge und $M : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so heißt M *Metrik* (und X zusammen mit M *metrischer Raum*), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) $M(x, x) = 0$ für alle $x \in X$.

(M2) $M(x, y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

(zusammen mit (M1): Definitheit)

(M3) $M(x, y) = M(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(Symmetrie)

(M4) $M(x, z) \leq M(x, y) + M(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

(Dreiecksungleichung)

Ist X ein Raum mit Metrik M und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , so heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Cauchyfolge* in X , wenn gilt

$$\lim_{\min\{m, n\} \rightarrow \infty} M(x_m, x_n) = 0.$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent* in X , wenn es ein $x \in X$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x) = 0.$$

Das x heißt dann *Grenzwert* der Folge.

Grenzwerte von Folgen sind, sofern sie existieren, eindeutig. Konvergente Folgen sind stets Cauchyfolgen, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Indem man zu einer Norm N durch $(x, y) \mapsto N(x - y)$ eine Metrik definiert, erhält man die gleichen Begriffe auch für normierte Vektorräume.

a) Sei $V = C^0([0, 1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Betrachte

$$N : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \inf\{\|g\|_{C^0} \mid g \in V \text{ differenzierbar mit } g' = f\}.$$

Welche Normeigenschaften erfüllt N ?

b) Welche Normeigenschaften erfüllt $\|\cdot\|_{C^n}$ für $n \in \mathbb{N}$?

c) Sei $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x$. Berechnen Sie $\|f\|_{C^n}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere die Funktion $f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Berechnen Sie $\|f_{a,b}\|_{C^1}$ in Abhängigkeit von a und b .

e) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Untersuchen Sie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^0}$ und $\|\cdot\|_{C^1}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeigen Sie Bemerkung 1.2 c) der Vorlesung: Ist f 2π -periodisch und über dem Intervall $[-\pi, \pi]$ Lebesgue-integrierbar, so gilt für alle $y, a \in \mathbb{R}$

$$\int_y^{y+2\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a) \, dt.$$

Aufgabe 3 (2+3+2+2 Punkte)

Nach 1.1 der Vorlesung heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *periodisch*, wenn es ein $T \in \mathbb{R}$ mit $T > 0$ gibt, so dass $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das T heißt dann eine *Periode* von f . Die Menge aller Perioden einer Funktion f sei hier mit $\text{Per } f$ bezeichnet.

a) Sei f stetig und periodisch. Zeigen Sie, dass f sogar gleichmäßig stetig ist. a

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist f stetig, periodisch und nichtkonstant, so ist $\text{Per } f$ hufungspunktfrei.

c) Geben Sie (mit Beweis) eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Per } f = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ an.

d) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind f und g periodisch, so ist auch $f + g$ periodisch.