

Heinrich Winter, Aachen

Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung

1	10 Thesen zur Weiterentwicklung der Bruchrechnung (als Zusammenfassung)....	2
2	Ertragsarmut	5
3	Rechtfertigungsfragen – Warum und wozu heute noch Bruchrechnung?	6
3.1	Zur Anwendbarkeit der Bruchrechnung:.....	6
3.2	Einübung in theoretisches Argumentieren	12
3.3	Training im heuristischen Denken	14
4	Alte Zahlen – neue Zahlen, allgemeine Probleme der Zahlbereichserweiterung ...	18
5	Zahlen und Zähler – Führung und Verführung durch Kardination.....	19
6	Gesichter der Bruchzahlen	21
7	Brüche als Zeichen für Zahlen	23
8	Ordnung der Bruchzahlen auf der Zahlengeraden	29
9	Strategien des Zahlvergleichs und Dichte der Bruchzahlen.....	37
9.1	Zahlvergleich.....	37
9.2	Dichte	41
10	Rechnen mit Bruchzahlen – Addition und Subtraktion	48
10.1	Regelwerk.....	48
10.2	Kumulative Pizzateilungen	53
10.3	Die Uhr.....	57
10.4	Der Hebel	59
10.5	Quadratunterteilungen.....	60
10.6	Politische Wahlen.....	63
11	Rechnen mit Bruchzahlen – Multiplikation und Division	67
11.1	Regelwerk.....	67
11.2	Flächeninhalt von Rechtecken	69
11.3	Ähnlichkeit und Maßstab	72
11.4	Anteile als relative Häufigkeiten in 4-Felder-Tafeln	78
11.5	Anteile als Wahrscheinlichkeiten.....	81
11.6	Radfahren und Getriebe	86
12	Literaturverzeichnis.....	90
13	Ergänzendes Material (Anhang).....	92
13.1	Aufgaben zur Bruchrechnung mit Quadraten (Flächeninhalte)	92
13.2	<u>Bruchrechnen zum Anfassen</u> (Spiele mit Kreissektoren, Pizzastücken.....	93
13.3	Geometrische Bruchrechnung am Rechteck (Flächeninhalte)	94
13.4	Geometrische Bruchrechnung an der Zahlengeraden	95
13.5	Aufgaben zur Bruchrechnung am Hebel.....	95
	Bruchrechnen am Tageskreis - Herstellen des Tageskreises (24 Stunden).....	96
13.7	Aufgaben zu Bruchzahlen als Wahrscheinlichkeiten.....	97
13.8	Mass-Stabs-Aufgaben	98

1 10 Thesen zur Weiterentwicklung der Bruchrechnung (als Zusammenfassung)

1. Die Bruchrechnung (in dezimalem und gewöhnlichem Gewand) ist und bleibt ein *anspruchsvoller Lernstoff*, der nicht beliebig durch „methodische Aufbereitung“ vereinfacht und nicht durch didaktische Fehlerverhütungsstrategien sowie tüchtigeres Üben des formalen Rechnens erfolgreicher gelehrt und gelernt werden kann. Der hohe Anspruch legitimiert auch die immer wieder erhobene Forderung, die Bruchrechnung nicht allein als Block (oder Zweierblock) auf die 6. Jahrgangsstufe zu konzentrieren, sondern eine spiralförmige Stoffanordnung anzustreben, einschließlich einer Propädeutik in der Grundschule.
2. Der Erwerb und Gebrauch von Kompetenzen in der Bruchrechnung (Erfassen und Darstellen von Bruchzahlen, Größenvergleich und Formänderung, Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division) darf *nicht einseitig syntaktisch* orientiert sein (Einprägen und Exekution von Regeln, die sich auf die Symbole beziehen, wie Komma verschieben, Zähler belassen, Nenner vervielfachen, ...), sondern muß weit stärker als bisher die *semantische Seite* (Sinn und Bedeutung der Zeichen) betonen. Die Lösung von Aufgaben sollte nicht nur im Rekurs auf *gelernte Verfahrensregeln* erfolgen, sondern stärker ein Rekurs auf *erworbenes Wissen* über Bruchzahlen erfolgen.

Regelwissen: $30 : \frac{1}{4} = \frac{30}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{30 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{120}{1} = 120$

Inhaltswissen: $\frac{1}{4}$ paßt 4-mal in 1, also 120-mal in 30 (o.ä.)

3. Nicht nur aus motivationalen Gründen, sondern vor allem im Hinblick auf übergeordnete pädagogische Ziele der allgemeinbildenden Schule (Aufklärung über Welt und Mensch) muß die Bruchrechnung ernsthaft *verschiedenartige Anwendungen* einbeziehen und so die kalküldominierte Weltabgewandtheit und banale Veranschaulichungspraxis brechen. Insbesondere das Auseinandersetzen mit Fragestellungen aus *Geometrie* und aus Bereichen des *Bürgerlichen Rechnens* sollen Erfahrungsmöglichkeiten zu Bruchzahlen erschließen und so mehr Motivation, mehr Sinnstiftung und mehr Verständnisgewinn ermöglichen. Ernsthafte Anwendungen (vs. wohlfeile Veranschaulichungen) bestehen immer in *Modellbildungen*, die ihrerseits auch das zu diskutierende Spannungsverhältnis zwischen innermathematischer Reinheit und außermathematischen Zwängen, Beschränkungen, Unordnungen betreffen.
4. Der Übergang von den vertrauten natürlichen zu den neuen Bruchzahlen ist unvermeidbar *durch Sprünge* bezüglich Darstellung, Ordnung und Verknüpfungen gekennzeichnet, die tiefliegende intuitive Überzeugungen berühren (z.B. die, daß das Teilungsergebnis nie größer sein kann als die zu teilende Zahl). Diese Diskontinuitäten sind auch bewußt und in ihrer Bedeutung und Reichweite erlebbar zu machen.
5. Die Zahlbegriffserweiterung von den natürlichen zu den Bruchzahlen besitzt eine doppelte Natur; sie besteht nämlich einerseits in Prozessen der *Assimilation* (Neues als Altes im anderen Gewand sehen) und andererseits in Prozessen der *Akkommodation* (Altes als etwas Neues sehen, seine eigenen Vorstellungen angesichts von Problemsituationen ändern, neue Begriffe bilden). Einerseits kann z.B. die Addition / Subtraktion von gleichnamigen Brüchen quasi - kardinal betrieben werden (als

Weiter- oder Zurückzählen), nur eben jetzt nicht mit Ganzen sondern z.B. mit Sechsteln. Tatsächlich ist ja $(\mathbf{N}, +)$ isomorph zu jeder Bruchfamilie $(\mathbf{N} \cdot \frac{1}{q}, +)$. Anderer-

seits erfordert aber schon die Addition / Subtraktion ungleichnamiger Brüche die gänzlich neue Vorstellung, daß Zahlen erst in eine bestimmte Form gebracht werden müssen, um die additive Operation beschreibbar zu machen. Es darf nicht der Eindruck entstehen, Bruchzahlen seien nur abgewandelte („kompliziertere“) natürliche Zahlen; vielmehr muß das Umgekehrte deutlich werden; natürliche Zahlen sind bezüglich des Rechnens spezielle Bruchzahlen.

6. In jeder Phase der Bruchrechnung kann und soll *experimentell* gearbeitet werden und zwar nicht als Konzession an angebliche oder wirkliche Desinteressierte bzw. Langsam- oder Schwerlerner, sondern als wichtiger Bestandteil von Erfahrungsgewinn für alle. Experimentelles Arbeiten reicht vom praktischen *Messen* geeignet repräsentierter Größen (Länge, Flächeninhalte, ...) *Falten* von Papierflächen, *Hantieren* an Hebeln und Waagen, *Zeichnen* (mittels Gummiband, Streifenmuster, Zirkel und Lineal) über den ausgiebigen Gebrauch des *Taschenrechners* (evt. weiterer elektronischer Medien) bis hin zu rechnerischen, symbolischen oder rein gedanklichen Versuchen (*Gedankenexperimente*).
7. Die im MU immer gegebene *Spannung* zwischen *konkret – anschaulich* hier und *abstrakt – symbolisch* dort sollte einerseits bewußt herausgearbeitet aber andererseits auch in beiden Richtungen zu brechen versucht werden. Die sogenannten alltäglichen Brüche, zu denen neben Halben, Vierteln, Dritteln ... vor allem Prozente gehören, sollten auch in Formen erscheinen, die in der Lebenspraxis völlig unüblich sind (z.B. $0,5l \text{ Milch} = \frac{167}{334}l \text{ Milch}$, was als Gedankenexperiment auszugestalten ist), und sperrige Brüche wie $\frac{2315}{6857}$ können umgekehrt durch vergrößernde Sicht mit alltäglichen Bruchgrößen in den Mesokosmos alltäglicher Wahrnehmungen befördert werden.
8. Im Sinne der Assimilation und in Respektierung des heute vorherrschenden maschinellen Rechnens sollte die *Dezimalbruchrechnung* durchgehend mit der „gemeinen“ *Bruchrechnung* auch zur wechselseitigen Erhellung *parallelisiert* werden.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \swarrow = \frac{5}{10} + \frac{25}{100} = \frac{50+25}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \\ \searrow = 0,5 + 0,25 = 0,50 + 0,25 = 0,75 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \quad \swarrow = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 25}{10 \cdot 100} = \frac{125}{1000} \\ \searrow = 0,5 \cdot 0,25 \quad (5 \cdot 25 = 125) = 0,125 \end{array}$$

Dabei darf nicht die Tatsache bagatellisiert werden, daß endliche Dezimalbrüche nur eine winzige Auswahl aller Brüche ausmachen.

9. Eine zentrale Rolle kommt *problemhaltigen Aufgaben* unterschiedlichen Anspruchsgrades zu, nicht (nur) als Zusatzangebot („Knacknüsse“) für besonders Inter-

essierte und Leistungstüchtige, sondern prinzipiell für alle. Nur Problemaufgaben (vs. Routineaufgaben) können zur Weckung und Förderung *heuristischen Denkens* beitragen, zwingen zu inhaltlichen Auseinandersetzungen und begünstigen durch das beständige Hin- und Herwälzen einer Sache vernetztes und kumulatives Lernen und Denken (vgl. dazu die Bedeutung von Einstiegsproblemen in der Unterrichtskonzeption von Dawydow, Hasemann / Mangel 1999, S. 140ff.). Darüber hinaus können wegen der Verbindung von Zahl und Gestalt als heuristischer Leitlinie ästhetische Aspekte eingebracht werden. Das Bild von der Bruchrechnung als Exerzierplatz für – womöglich nur halb verstandene Rechenregeln fraglicher Bedeutung – kann und soll durch Problemorientierung ganz entscheidend verändert werden.

10. Eine weitere wünschenswerte Veränderung des kalküldominierten Bruchrechnens wird erzielt, wenn es gelingt, frühzeitig und behutsam *algebraisch – symbolische* Darstellungsweisen einzuüben. Es geht natürlich nicht darum, allgemein klären zu wollen, was Variable, Terme, Gleichungen, Formeln sind, sondern ein Stück der (durchaus fremden!) Sprache der Algebra in Gebrauch zu nehmen lernen, um die allgemeinen Formen, die Strukturen deutlicher werden zu lassen. So ist $\frac{1}{b}$ (mit b aus \mathbf{N}) nicht nur ein stenografisches Symbol für „Stammbruch“, sondern erlaubt und begünstigt *operatives Durcharbeiten* des Begriffs Stammbruch. (z.B.: wenn $b < 10$, dann ist $\frac{1}{b} > \frac{1}{10}$; $\frac{1}{b} > \frac{1}{b+1}$; $\frac{1}{b} - \frac{1}{b+1} = \frac{1}{b(b+1)}$). Die algebraische Sprache in Verbindung mit geometrischen würde nicht nur den Theoriegehalt (ein Theorem ist ja etwas allgemein „Geschautes“), der Bruchrechnung deutlicher machen und wäre nicht nur ein mächtiges Instrument beim Problemlösen, sondern würde eine wünschenswerte Basis für die weitere mathematische Bildung darstellen.

2 Ertragsarmut

**„Und merk dir ein für allemal den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl, allein ein großes in den Brüchen“ (Goethe)**

Nicht erst TIMSS II hat offenbart, daß die Bruchrechnung kein besonders ertragreiches Unternehmen ist.

„Das Rechnen mit Brüchen galt immer als ein Kreuz für Lehrer und Schüler gleichermaßen; auch heute ist es vielen peinlich, wenn sie in die Brüche geraten“ (Lietzmann 1912, S. 77).

Ob es Erwachsenen wirklich so peinlich ist, mag fraglich sein. Jedenfalls erntete ein sehr bekannter Fernseh-Quizmaster brausenden Beifall, als er bekannte, daß er auch nicht wisse, warum $30 : \frac{1}{2} = 60$ sein soll.

„Das Rechnen mit Brüchen ist für viele Schüler eine Plage, und auch die Lehrer sind nicht zufrieden, wenn sie an den trotz aller Mühe oft nur geringen Erfolg auf diesem Gebiet denken. Fast alle Erwachsenen begeben sich auf Glatteis, wenn sie mit Brüchen rechnen sollen; ob sie dabei die gewöhnliche oder die dezimale Schreibweise benutzen, ist einerlei“ (Schönwald 1955, S. 37).

Die Ertragsarmut zeigt sich natürlich in der Häufigkeit von Fehlern. Padberg hat in mehreren Untersuchungen eine Reihe von *typischen Fehlern* identifiziert. Ein verbreiteter typischer Fehler ist die Bewältigung von Additionsaufgaben nach dem Muster $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, der besonders von den Schülern häufiger begangen wird, die vorher die Multiplikation kennengelernt haben (Padberg 1989, S. 91). Rund 900 Realschüler lösten nur knapp 70% von Additionsaufgaben mit ungleichnamigen Brüchen richtig (Padberg a.a.O., S. 15). Divisionsaufgaben von der Form $\frac{a}{b} : c$ (Bruch durch ganze Zahl) wurden

von etwa 10% der 900 Schüler nach dem Muster $\frac{ac}{b}$ gelöst, vermutlich deshalb, weil die Kehrwertbildung von c als unmöglich angesehen wird (Padberg a.a.O., S. 135f.). Auch die Erfolge in der scheinbar „leichteren“ Dezimalbruchrechnung sind nicht zufriedenstellend. So hielten in einer Untersuchung von 900 Gymnasiasten 8% der Schüler die Zahl 0,287 und 19% der Schüler die Zahl 0,3 für die größte unter den 5 Zahlen 0,3 0,13 0,42 0,135 0,287 (Padberg a.a.O., S. 172)

Die Ertragsarmut ist deshalb besonders schmerzlich und bemerkenswert, weil es gerade zur Bruchrechnung eine lange didaktische Tradition gibt, in der immer wieder neue Zugänge, neue Stofforganisationen, neue Veranschaulichungsweisen und neue Übungsformen entwickelt und erprobt worden sind.

Auch die Versuche zur stärkeren Verwissenschaftlichung im Sinne der Strukturmathematik (Bruchzahlen als Abbildungen oder als Klassen äquivalenter Zahlenpaare) haben offensichtlich die Ertragslage nicht signifikant verbessert, wenngleich auch überzeugende Ansätze der Strukturwelle bis heute nichts von ihrer Bedeutung verloren haben (Winter 1976).

Insgesamt gilt die Bruchrechnung nach wie vor als leidiges Kapitel der Schulmathematik für alle Betroffenen: für Schüler, wenn sie sich mangels Verständnis an die zahlreichen und leicht verwechselbaren Regeln klammern und dennoch scheitern; für Lehrer, wenn sie trotz hohem Übungsaufwand herbe Enttäuschungen erleben; für Eltern, wenn sie ihren Kindern nicht helfen können, weil sie selbst in ihrer Schulzeit auch schon nicht viel verstanden haben; für Vertreter fortführender Bildungsinstanzen, wenn sie sich genötigt sehen, Nachhilfeunterricht im Bruchrechnen zu erteilen.

Dabei betrifft der unbefriedigende Erfolg im Rechnen nur die Oberfläche des Problems Bruchrechnung. Viel wichtiger ist die Frage, in wie weit die Bruchrechnung übergeordnete pädagogische Zielvorstellungen, die den Sinn des ganzen Unternehmens ausmachen, erreicht.

3 Rechtfertigungsfragen – Warum und wozu heute noch Bruchrechnung?

Bisher ist die Bruchrechnung obligat in allen Schulformen, wenn es auch schulformspezifische Ausformungen und Ansprüche gibt. Kein Schüler kann ihr entkommen. Sie ist der zentrale Unterrichtsstoff der Klassenstufen 5 und 6, füllt in der Regel weitgehend die ganze 6. Klassenstufe aus. Damit ist sie ein nicht unbedeutender Faktor in der gesamten Schulkarriere und somit in der Lebenskonzeption der Schüler.

Es gibt unter Fachleuten und Laien einen breiten, wenn auch nicht vollständigen Konsens über die Unersetzbarkeit auch der „gewöhnlichen“ Bruchrechnung. Als wichtigste Rechtfertigungsgründe werden genannt (Freudenthal 1986, Th. Jahnke 1995, Padberg 1999, Profke 1991, Bayreuther 1999)

- (i) Bruchrechnung ist die Grundlage des *Bürgerlichen Rechnens*, das seinerseits wegen seiner Bedeutung für das private, berufliche und öffentliche Leben als Pflichtbereich gänzlich unstrittig ist.
- (ii) Bruchrechnung ist eine notwendige *Einübung in entwickeltere algebraisch-arithmetische und geometrische* Begriffsbildungen und Denkweisen.

Beide Begründungen bedürfen der kritischen Erläuterung.

3.1 Zur Anwendbarkeit der Bruchrechnung:

Da im tradierten Bürgerlichen Rechnen Dezimalbrüche überwiegen, könnte geschlossen werden, man möge die Bruchrechnung überwiegend oder gar ausschließlich auf die Dezimalbruchrechnung beschränken. Die Allgegenwart von Taschenrechnern verstärkt diese Einschätzung.

Tatsächlich wirken Aufgaben der Art „Was kosten $2\frac{1}{5}$ kg Fleisch, wenn der Preis pro

kg $18\frac{3}{4}$ DM beträgt?“ (aus einem früher sehr verbreiteten Schulbuch) bizarr. Es handelt

sich hier eher um eine notdürftig eingekleidete Rechenübungsaufgabe zur Multiplikation gemischter Zahlen, bei der eine Auseinandersetzung mit dem Sachverhalt weder erwünscht noch notwendig zu sein scheint.

Der springende Punkt des Bürgerlichen Rechnens ist es aber gerade, Sachsituationen ernst zu nehmen, um *Aufklärung* über sie zu erlangen. Im Falle des Fleischeinkaufs

handelt es sich um das Verstehen der üblichen Konvention, wonach der Preis einer Ware *proportional* zu ihrer „Menge“ oder „Quantität“, hier zu ihrem Gewicht, sein soll. Das ist ein normatives Modell, keineswegs logisch zwingend, aber plausibel, praxisbewährt und im Prinzip allgemein akzeptiert (mit allerlei interessanten Ausnahmen, die zu diskutieren sind).

Proportionen finden nun eine angemessene Beschreibung in Brüchen, hier etwa: Für jede Art von Gewicht und den zugehörigen Kosten gilt

$$\frac{\text{Kosten der Ware}}{\text{Gewicht der Ware}} = \frac{\text{Kosten von 1 kg der Ware}}{1 \text{ kg der Ware}} = \text{Preis pro 1kg („Kilopreis“)}.$$

Diese Grundgleichung charakterisiert das proportionale Einkaufsmodell und generiert die prinzipiell unendliche Fülle von möglichen Käufen von Fleisch mit diesem Preis pro Gewichtseinheit. Im Beispiel:

$$\frac{18,75\text{DM}}{1\text{kg}} = \frac{37,50\text{DM}}{2\text{kg}} = \frac{56,25\text{DM}}{3\text{kg}} = \frac{9,375\text{DM}}{\frac{1}{2}\text{kg}} = \frac{1,875\text{DM}}{0,1\text{kg}} = K$$

Es handelt sich formal um nichts anderes als um Kürzen und Erweitern (evtl. in einem erweiterten Sinn, weil „Zähler“ und „Nenner“ nicht ganzzahlig zu sein brauchen), und die obige Aufgabe erweist sich als Aufgabe, den „passenden“ Zähler zu suchen:

$$\frac{18,75\text{DM}}{1\text{kg}} \xrightarrow{\cdot 2,2} \frac{\boxed{?}}{2,2\text{kg}}$$

Und die Aufgabe „Wieviel Fleisch bekommt man für 10DM, wenn man für 18,75DM 1kg Fleisch bekommt?“ läuft auf die Bestimmung eines Nenners hinaus:

$$\frac{18,75\text{DM}}{1\text{kg}} \xrightarrow{\cdot \frac{10}{18,75}} \frac{10\text{DM}}{\boxed{?}}$$

Die Bruchschreibweise läßt übrigens auch (vor jeder Rechnung) das Ergebnis abschätzen (hier: etwas mehr als $\frac{1}{2}$ kg); und Abschätzungen solcher Art sind bekanntlich eine wichtige Rechenkontrolle.

Der Preis pro Gewichtseinheit erfüllt neben seiner Rolle als Ausdruck der Proportionalität der Kosten-Ware-Relation eine Rolle als Ausdruck der Preiswürdigkeit oder Billigkeit, worüber der potentielle Käufer rasche Aufklärung wünscht. Da dies nicht einfach eine Geldangabe ist, sondern die Information über Recht und Billigkeit ausdrücken soll, schreibt man auch $18,75 \frac{\text{DM}}{\text{kg}}$. Das Zeichen $\frac{\text{DM}}{\text{kg}}$ verweist darauf, daß wir eine neue

Größe haben mit der Dimension $\frac{\text{DM}}{\text{kg}}$, die die Billigkeit als das Kosten-Leistungs-

Verhältnis wiedergibt (Winter 1986).

Man vergleicht normalerweise zwei Kaufangebote über ihre Preise pro Einheit. Beahlt man z.B. hier für 0,9 kg Fleisch 15,75 DM und dort für 1,05 kg vergleichbarer Qualität 19,11 DM, so erhält man die Preise pro kg:

$$\frac{15,75\text{DM}}{0,9\text{kg}} = \frac{17,50\text{DM}}{1\text{kg}} = 17,50 \frac{\text{DM}}{\text{kg}} \quad \frac{19,11\text{DM}}{1,05\text{kg}} = \frac{18,20\text{DM}}{1\text{kg}} = 18,20 \frac{\text{DM}}{\text{kg}} \quad \text{und kann -}$$

wegen der gleichen Nenner 1 kg – entscheiden, was preiswerter ist.

Daß bei uns in der Regel die Billigkeit durch den Preis pro Einheit ausgedrückt wird, ist mathematisch nicht zwingend. Man könnte genau so gut umgekehrt zum Ausdruck bringen, wie viel Ware einer bestimmten Art man für eine Preiseinheit (z.B. 1 DM)

erhält. Mit der Bruchrechnung ergibt sich z.B. aus $\frac{17,50\text{DM}}{1\text{kg}} \begin{matrix} :17,5 \\ \approx \\ :17,5 \end{matrix} \frac{1\text{DM}}{0,057\text{kg}}$, d.h. man

erhält für 1DM 57g Fleisch.

Was hier für Kosten und Waren angedeutet wurde, gilt analog für viele weitere Bereiche des Bürgerlichen Rechnens (vgl. auch das Beispiel „Druck“ im Anhang):

$$\frac{\text{Lohn der Arbeit (in DM)}}{\text{Dauer der Arbeit (in h)}} = \text{Lohn pro Zeiteinheit} \left(\frac{\text{DM}}{\text{h}}, \text{ Stundenlohn} \right), \text{ durchschnittli-}$$

cher Verdienst

$$\frac{\text{Kraftstoffverbrauch für eine Wegstrecke (in l)}}{\text{Länge der Strecke (in km)}} = \text{Kraftstoffverbrauch pro Längeneinheit}$$

$\frac{l}{\text{km}}$, durchschnittlicher Verbrauch

$$\frac{\text{Länge des zurückgelegten Weges (in km)}}{\text{Dauer der Bewegung (in h)}} = \text{Weglänge pro Zeiteinheit}, \frac{\text{km}}{\text{h}}, \text{ Geschwin-}$$

digkeit, durchschnittliche Schnelligkeit

$$\frac{\text{Gewicht eines Körpers (in g)}}{\text{Volumen eines Körpers (in cm}^3\text{)}} = \text{Gewicht pro Volumeneinheit}, \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}, \text{ Dichte}$$

$$\frac{\text{Zinsbetrag für ein Kapital in 1 Jahr (in DM)}}{\text{Höhe des Kapitals (in DM)}} = \text{Jahreszinsbetrag pro Währungseinheit},$$

durchschnittlicher Zinssatz, Rendite

$$\frac{\text{Jährlicher Steuerbetrag (in DM)}}{\text{Jahreseinkommen (in DM)}} = \text{Steuerbetrag pro Währungseinheit, durchschnittlicher}$$

Steuersatz

In jedem Fall drücken die Brüche links *Durchschnittswerte* aus. Sind sie konstant oder werden als konstant festgelegt, liegt ein proportionaler Zusammenhang vor. Wichtig ist, daß durch die Verhältnisbildung neue Größen (wie z.B. Geschwindigkeit oder Dichte) kreiert werden. In den beiden letzten Beispielen, in denen *gleichartige* Größen ins Verhältnis gesetzt werden, ist die neue Größe eine reine Zahl (ein „Satz“, ein Anteil).

Gänzlich unverzichtbar sind gewöhnliche Brüche, wenn stochastische Situationen betrachtet werden. Die relativen Häufigkeiten, mit der die Ausprägungen eines Merkmals einer Stichprobe auftreten und die Wahrscheinlichkeiten, mit der zufällige Ereignisse in einem Versuch auftreten, sind fast von Natur aus (jedenfalls in den in der S I vorkommenden Fällen) Bruchzahlen. Der Sinn früher stochastischer Schulung (sogar schon in der Grundschule) ist weithin anerkannt.

Kurzum: Die Rechtfertigung der (gewöhnlichen) Bruchrechnung aus der Sicht der Anwendungen ist nach wie vor stichhaltig.

Das Problem aber ist, daß die Bruchrechnung in viel zu geringem Ausmaß anwendungsorientiert gelehrt und gelernt wird. Es kann nicht erfolgreich sein, wenn die Bruchrechnung überwiegend selbstgenügsam als Mathematik auf Vorrat gelernt wird, damit sie später (etwa im Bürgerlichen Rechnen und in der Geometrie) angewandt werde. Die Anwendungen sind vielmehr untrennbar mit den Begriffen verknüpft. In lockerer Anlehnung an den Wissenschaftstheoretiker Sneed (Jahnke, H.N. 1978) kann man einen Begriff als ein System, bestehend aus einem strukturellen Kern (in lingual-algebraischer Sprache) und einem offenen Kranz von Anwendungen ansehen. Der strukturelle Kern modelliert die Anwendungssituationen und interpretiert sie im Sinne des fraglichen Begriffs, während umgekehrt die Situationen den Begriff ausdrücken, verkörpern, dem Begriff Sinn und Bedeutung verleihen und theoretisches Weiterarbeiten anregen.

Die Anwendungsorientierung ist keineswegs schon gegeben, wenn Aufgaben von der Art „Von einer 20m langen Schnur sind $\frac{3}{5}$ abgeschnitten. Wieviel m waren das?“ (Frikke S. 19) gerechnet werden, die in ihrer Isoliertheit und inhaltlichen Armseligkeit weder motivieren noch aufklären.

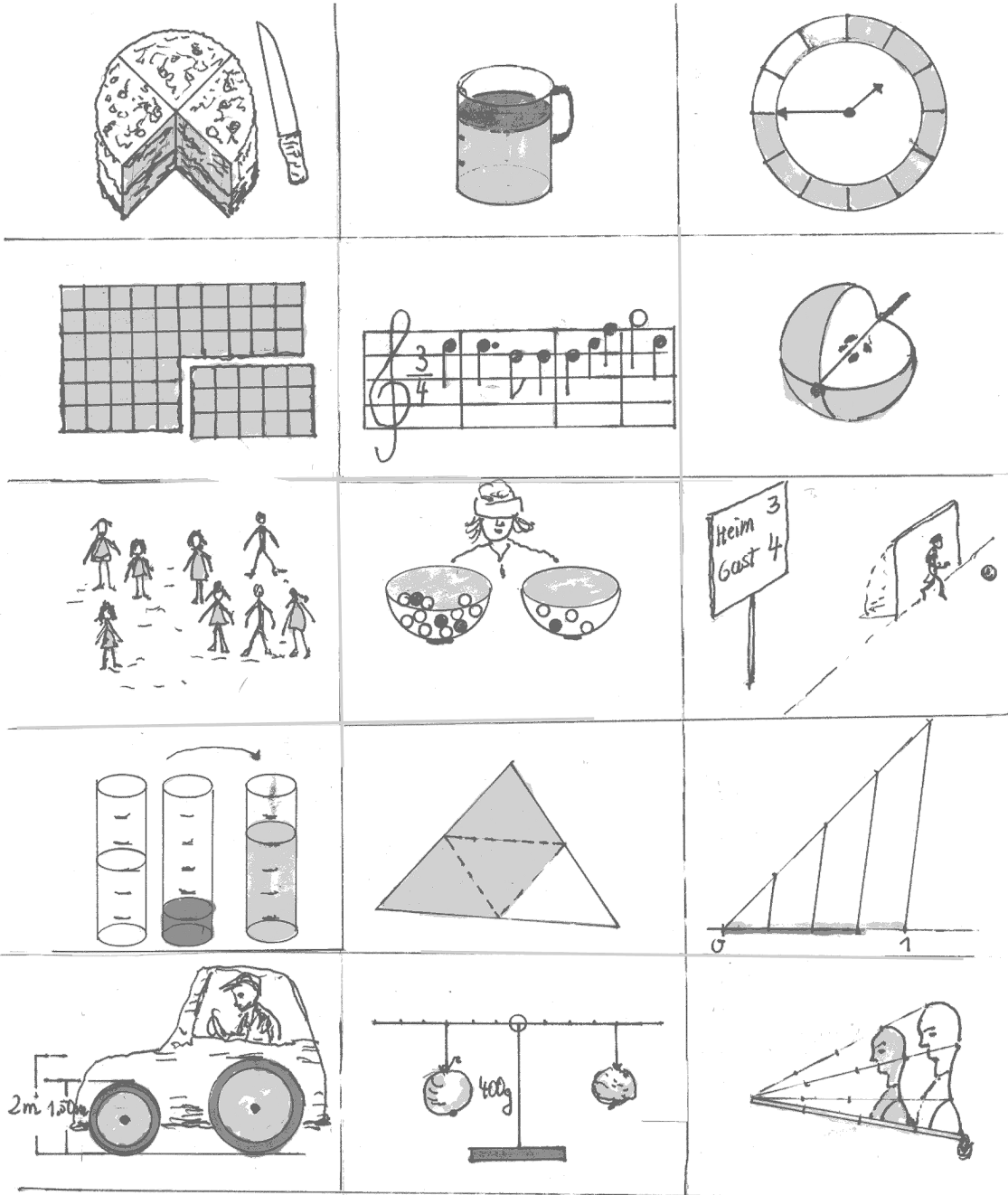
Abb. 1 soll am Beispiel von $\frac{3}{4}$ visuell andeuten, welche nicht erschöpfbare Fülle von

Situationen aus Alltag, Natur, Wirtschaft, Gesellschaft und vor allem Geometrie durch den Bruchbegriff in bestimmter Weise strukturiert werden kann. Daß im sogenannten wirklichen Leben (angeblich oder tatsächlich?) kaum mit gewöhnlichen Brüchen gerechnet wird, schränkt die Bedeutung der Bruchrechnung im Hinblick auf Anwendungen in keiner Weise ein. Denn die Aufgabe des MU besteht nicht darin, Lebenspraxis imitieren zu wollen, sondern Lebenspraxis besser verstehen zu lehren, und besser verstehen heißt: begrifflich ordnen können, Prinzipien durchschauen können, Voraussetzungen und Folgen beurteilen können. Wahrscheinlich wird es in der Lebenspraxis nie vorkommen, daß 13 Personen 9 völlig gleichwertige Pizzen vollkommen gerecht unter sich teilen (und noch unwahrscheinlicher ist es, daß ein Fußballspieler den Spielausgang 3 : 4 mit „ $\frac{3}{7}$ der Tore hat die Heimmannschaft erzielt“ kommentiert). Die Pizzenteilung,

bei der jeder $\frac{9}{13}$ Pizza erhält, ist dennoch realitätsbezogen, wenn sie als Beispiel für das

Modell grundsätzlich aller denkbaren (!) Fälle von „gerechten“ Teilungen gleicher Ganzheiten verstanden wird. Es kommt zunächst auf die Rechtfertigung des Anspruchs auf $\frac{9}{13}$ Pizza pro Person an (ebenso wie der Anspruch einer Partei auf $\frac{23517}{47015}$ Sitze im

Parlament, wenn das ihr Stimmanteil ist). Wie der Anspruch effektiv eingelöst werden kann, ist ein neues und durchaus bedeutsames Problem; im Pizza-Beispiel z.B. die Frage: Wie kann man einen Kreis exakt oder näherungsweise in eine vorgegebene Anzahl von Sektoren unterteilen?)



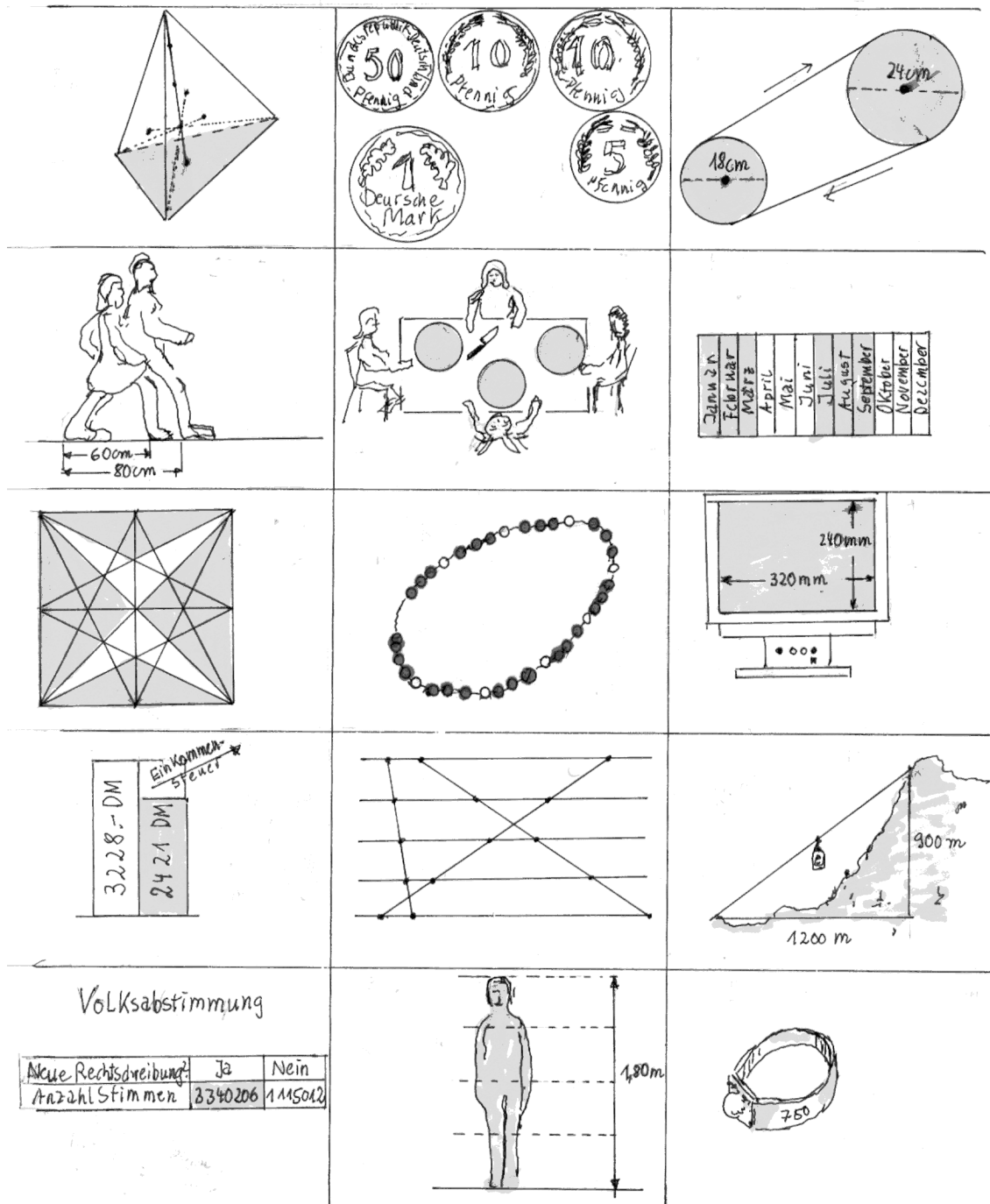


Abbildung 1: Situationen, in denen die Bruchzahl $\frac{3}{4}$ eine Rolle spielt

Soll der Anwendungsaspekt in der Bruchrechnung als wesentliches Element der Begriffsbildung stärker wirksam werden, so muß nicht nur die bisherige stoffliche Organisation der Bruchrechnung erneut überdacht werden (sie sollte dazu eher spiralig entwickelt und über mehrere Schuljahre verteilt werden), sondern auch und vor allem in der Organisation der Lernprozesse verändert werden. Wichtige Kontexte unseres Lebens im MU zu erschließen muß auch ein Leitmotiv für die Weiterentwicklung der Aufgabekultur in der Bruchrechnung sein.

3.2 Einübung in theoretisches Argumentieren

Die Bruchrechnung kann in der Tat eine Einführung in entwickeltere mathematische Begriffsbildungen und Denkweisen darstellen. Das ist dann der Fall, wenn sie mehr darstellt, als eine Einübung in den Gebrauch von Rechenregeln, wenn sie vielmehr das Rechnen auf Wissen und Einsichten gründet und Wissen und Fertigkeiten miteinander verbindet.

Das betrifft nicht nur die Erweiterung des Zahlbegriffs (von \mathbf{N} bzw. \mathbf{N}_0 nach \mathbf{B} bzw. \mathbf{B}_0) samt den damit verbundenen Ordnungs- und Verknüpfungsbegriffen, sondern auch den veränderten Umgang mit den mathematischen Objekten.

Letzteres besagt vor allem, die Argumentationsweisen stärker zu *algebraisieren*, den Segen *symbolischer Ausdrücke* kennenzulernen. So kann der symbolische Ausdruck $\frac{m}{n}$,

wobei m und n irgendwelche natürlichen Zahlen sein sollen, diskutiert werden: Ist $m = n$ (Zähler = Nenner), dann ist $\frac{m}{n} = 1$; ist $m > n$, dann ist $\frac{m}{n} > 1$ („unechter“ Bruch);

ist $m < n$, dann ist $\frac{m}{n} < 1$ („echter“ Bruch). Ist n ein Teiler von m , dann ist $\frac{m}{n}$ eine gan-

ze (natürliche) Zahl; ist $n = 1$, so ist $\frac{m}{n} = m$; haben m und n den gemeinsamen Teiler k ,

so ist $\frac{m:k}{n:k} = \frac{m}{n}$ usw.

Der Segen der Formel wird erst so recht greifbar beim Rechnen. Die umgangssprachliche Formulierung der Addition von Brüchen („Man addiert zwei Brüche, indem man sie, falls nötig, gleichnamig macht, dann die Zähler addiert und den Hauptnenner beibehält und schließlich, wenn möglich, kürzt und einrichtet.“), betont das algorithmische Element, Algorithmus als allgemeines Rechenrezept, das immer ausführbar ist und sich (unter Ausblendung inhaltlicher Bedeutungen) i.W. auf die Manipulation von Zahlzeichen bezieht. Ein Algorithmus ist also auf die Syntax ausgerichtet und wird als Vorwärtsprozeß (von der Aufgabe zum Ergebnis) nach festen Regeln exekutiert. Die Formel (gewonnen als zusammenfassender Ausdruck vielfältiger Erfahrungen mit konkreten Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \left(= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \right) = \frac{ad + bc}{bd}$$

dagegen zielt auf den strukturellen Aspekt, d.h. auf einsichtiges allgemeines und eher deklaratives Wissen, auch über Rechenprozesse. Welche natürlichen Zahlen auch immer für a , b , c , d eingesetzt werden, die Gleichung stimmt immer und man kann sie von links nach rechts oder umgekehrt lesen.

Formelgleichungen können *diskutiert* werden, Wissen wird in gedrängter Form dargestellt und gewonnen, etwa:

- Ist $a = c = 1$, dann haben wir *Stammbrüche*, gewissermaßen die Elemente der Welt der Bruchzahlen und es ist

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{b+d}{bd} = \frac{\text{Summe zweier natürlicher Zahlen}}{\text{Produkt dieser Zahlen}}.$$

Es kann u.a. das hochinteressante Problem entstehen, wann die Summe zweier Stammbrüche wieder ein Stammbruch ist (wie $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$) (Walther 1999). Über-

haupt lohnt sich die Beschäftigung mit Stammbrüchen (Winter 1984, S. 49), auch aus geschichtlichen Gründen (Menninger 1955), wobei geometrische Darstellungen deshalb unersetzbar sind (Abb. 2), weil sie, bei rechter Betrachtung, Formeln im Bild repräsentieren. So ist $\frac{1}{b}$ der symbolische Ausdruck für den b-ten Teil des Ein-

heitsquadrates und $\frac{1}{b}$ durchläuft die Stammbruchfolge, wenn b die natürlichen Zahlen durchläuft. Zu sehen ist, wie die streng fallende Folge immer langsamer fällt.

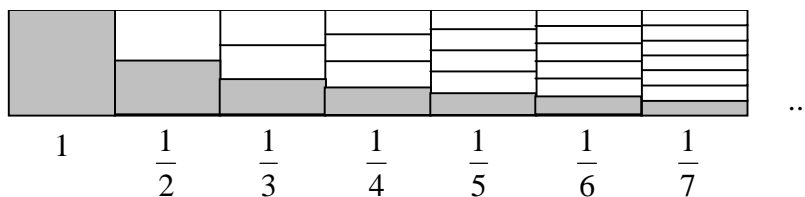


Abbildung 2: Die Folge der Stammbrüche

- Ist $b = d$, haben wir „einfache Verhältnisse“ (gleichnamige Brüche) und formelmäßig ergibt sich auch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab+cb}{b^2} = \frac{a+c}{b}$. Ist gar $b = d = 1$, so haben wir , natürliche Zahlen.

- Ist b ein Teiler von d , $d = kb$, dann spiegelt sich das natürlich auch in der Formel wider: $\frac{a}{b} + \frac{c}{kb} = \frac{ak}{bk} + \frac{c}{kb} = \frac{ak+c}{kb} = \frac{ak+c}{d}$.

Kurzum: Der formelmäßige Umgang mit Brüchen gibt der Bruchrechnung nicht nur Einheitlichkeit, sondern erlaubt vor allem, über das Rechnen und über Brüche zu sprechen, Wissen darzustellen und zu diskutieren. Und nicht zuletzt könnten auch die Anwendungen überzeugender gestaltet werden, da das Prinzipielle deutlich hervortritt.

Allerdings, und hier liegt das große und bisher i.W. *nicht bewältigte Problem*, ist die *algebraische Sprache* durchaus artifizierlicher Natur. Bisher sind die Erfolge jedenfalls in aller Regel recht mager. Die berühmt gewordene Professoren-Studenten-Aufgabe („An einer Universität gibt es P Professoren und S Studenten. Die Zahl der Studenten ist das 6-fache der Zahl der Professoren. Drücken Sie diesen Zusammenhang als Gleichung

aus“) wird auch von vielen Abiturienten und akademisch gebildeten Leuten nicht gemeistert. Malle (1986, S. 3) hat Gründe für die Einschätzung, daß etwa die Hälfte der Schulabgänger – nach mehrjähriger Übung! – nicht „einfachste Formeln aufstellen, interpretieren und umformen“ kann.

Höchstwahrscheinlich können zwei Gründe für die Ertragsarmut verantwortlich gemacht werden: Die algebraische Sprache wird zu spät und dann zu engherzig (Gleichungslehre) eingeführt, und zweitens dominiert dann der Kalkülaspekt derart, daß Schüler glauben, es handele sich um das Umgehen mit inhaltsleeren Symbolen nach bestimmten (zu lernenden) Regeln. Die Symbole symbolisieren da nichts, sie stehen nur im Symbolkontext, so wie die Spielsteine des Schachspiels, die nach bestimmten, akzeptierten, aber nicht begründeten Regeln bewegt werden dürfen.

Für die Bruchrechnung wäre zu folgern, daß von Anfang an Variable in Gebrauch genommen werden, um durch sie mehr Klarheit in gesetzmäßige Zusammenhänge zu bringen. Dabei müssen *geometrische Darstellungen* eine Art Vermittlerrolle spielen, denn in geometrischen Figuren können sich die allgemeinen, also strukturellen Sachverhalte spiegeln. Jedoch sprechen sie nicht wie von selbst aus sich heraus, vielmehr muß die geometrische Sprache gelernt werden, und dazu gehört es auch, Figuren als Variable, als bildhafte Symbole aufzufassen (Jahnke, HN 1978).

Es bedarf auch in dieser Hinsicht einer Weiterentwicklung der Aufgabekultur.

3.3 *Training im heuristischen Denken*

Die Rechtfertigungsproblematik darf mit dem Verweis auf die Bedeutung der Bruchrechnung für Anwendungen und für eine entwickeltere mathematische Bildung nicht als abgeschlossen betrachtet werden.

Ein weiterer Grund, die Bruchrechnung zu unterrichten liegt (iii) in ihrer Bedeutung als Erfahrungsfeld für die Schulung des *heuristischen Denkens*

Dieser Aspekt wird bisher zu stark vernachlässigt. In der Schule überwiegt bei weitem das Erlernen der Verfahren, und die didaktischen Bemühungen sind darauf gerichtet, das Lernen der Verfahren so zu gestalten, daß ihrem systematischen Aufbau Schritt für Schritt entsprochen wird und Fehlerquellen minimalisiert werden. Insofern ist die Bruchrechendidaktik zu stark „negativ“ motiviert: die zu befürchtenden „Mißerfolge“ sollen durch die „richtigen“ Unterrichtsmethoden begrenzt werden.

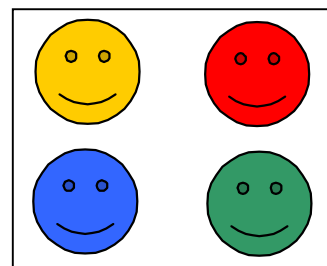
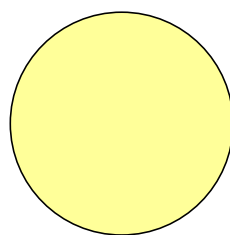
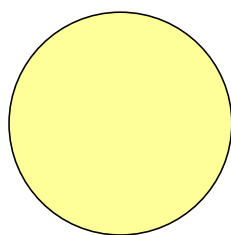
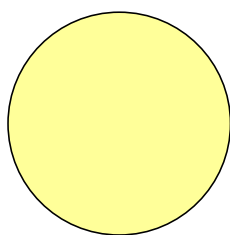
Es kann aber nur begrenzt Erfolge geben, wenn der Schwerpunkt der didaktischen Bemühungen auf dem „Beibringen“ und Einüben von Verfahren liegt und nicht mindestens ebenso entschieden auf der Begünstigung von *Verständnisgewinn*. Verständnis aber läßt sich nicht von außen willkürlich herbeiführen, es kann nur und muß deshalb durch Erfahrungsangebote *angeregt* werden. Diese Angebote sollen das Staunen, Fragen, Vermuten, Darstellen, Formulieren, Umformulieren, Ausprobieren, Überprüfen, Übertragen, Anwenden, Fortspinnen stimulieren, im Schlagwort: *aktiv-entdeckendes Lernen* ist anzustreben. Um dafür Voraussetzungen zu schaffen, ist es zunächst notwendig, die Vorstellung von der Bruchrechnung als einer Sammlung von Rechenverfahren und also einer eher langweiligen Durststrecke deutlich zu korrigieren, indem man die vielen Möglichkeiten wahrnimmt, interessante *Problemstellungen* zu finden und zu verfolgen. Ohne die stark selbständige Auseinandersetzung mit Problemen kann es keine Verbesserung der heuristischen Struktur geben, weil die Lösung von Routineaufgaben definitionsgemäß gar keiner heuristischen Aktivitäten bedarf, sondern eben nur des Reurses auf erlernte Verfahren.

Eine inzwischen bewährte Lernumgebung, Erfahrungen der angestrebten Art schon auf früher Stufe zu ermöglichen, ist die *Pizza-Welt* (Strefland 1986, Kurth 1995). Es geht dabei eben *nicht* darum, Brüche zu veranschaulichen und Bruchrechenregeln abzuleiten und die hausbackene Torte durch die moderne Pizza zu ersetzen (Bayreuther 1999, S. 15), sondern darum, Schüler mit *Teilungsproblemen* zu befassen, die auf verschiedene Arten gelöst und beschrieben werden können, ohne auf eine einzige syntaktische Regel (wie gleichnamig machen) zu rekurrieren, diese jedoch anzubahnen. Die Initialaufgabe, 3 Pizzen an 4 Kinder „gerecht“ zu verteilen, betrifft einmal ein Grundmotiv der Bruchrechnung, nämlich Aufgaben wie $3 : 4$ Sinn zu geben, zum anderen enthält die Aufgabenstellung Freiräume, deren Nutzung neue Erkenntnisse abwirft und Bruchschreibweisen ohne endgültige Begriffsbestimmung schon einmal in Gebrauch nimmt. So kann die Initialaufgabe auf mindestens 5 Arten gelöst werden, was mit zueinander kongruenten Kreisscheiben aus Papier simulierbar ist (Abbildung 3):

- (1) Nacheinander jede der 3 Pizzen durch 4 teilen, da erhält jeder $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ von einer ganzen Pizza.
- (2) Gleichzeitig (aufeinander legen!) alle 3 Pizzen vierteln, da erhält jeder $3 : 4$ Pizzen, also $3 : 4 = \frac{3}{4}$.
- (3) Zuerst 2 Pizzen an 4 Kinder verteilen, da erhält jeder $\frac{1}{2}$ Pizza, dann noch 1 Pizza an 4 Kinder verteilen, da bekommt jeder noch $\frac{1}{4}$ Pizza dazu, also $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- (4) Das 1. Kind bekommt von der 1. Pizza $\frac{3}{4}$, das zweite Kind von der 2. Pizza $\frac{3}{4}$, das dritte Kind von der dritten Pizza $\frac{3}{4}$ und das 4. Kind die restlichen $3 \cdot \frac{1}{4}$, also $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.
- (5) Teilen in Gedanken: Wären es 4 Pizzen und 4 Kinder, dann erhielte jedes 1 ganze Pizza. Nun sind es aber nur 3, da müsste jeder $\frac{1}{4}$ von seiner ganzen Pizza wieder zurückgeben, also $3 : 4 = 4 : 4 - 1 : 4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

3 Pizzen an 4 Personen gleich verteilen

3 : 4



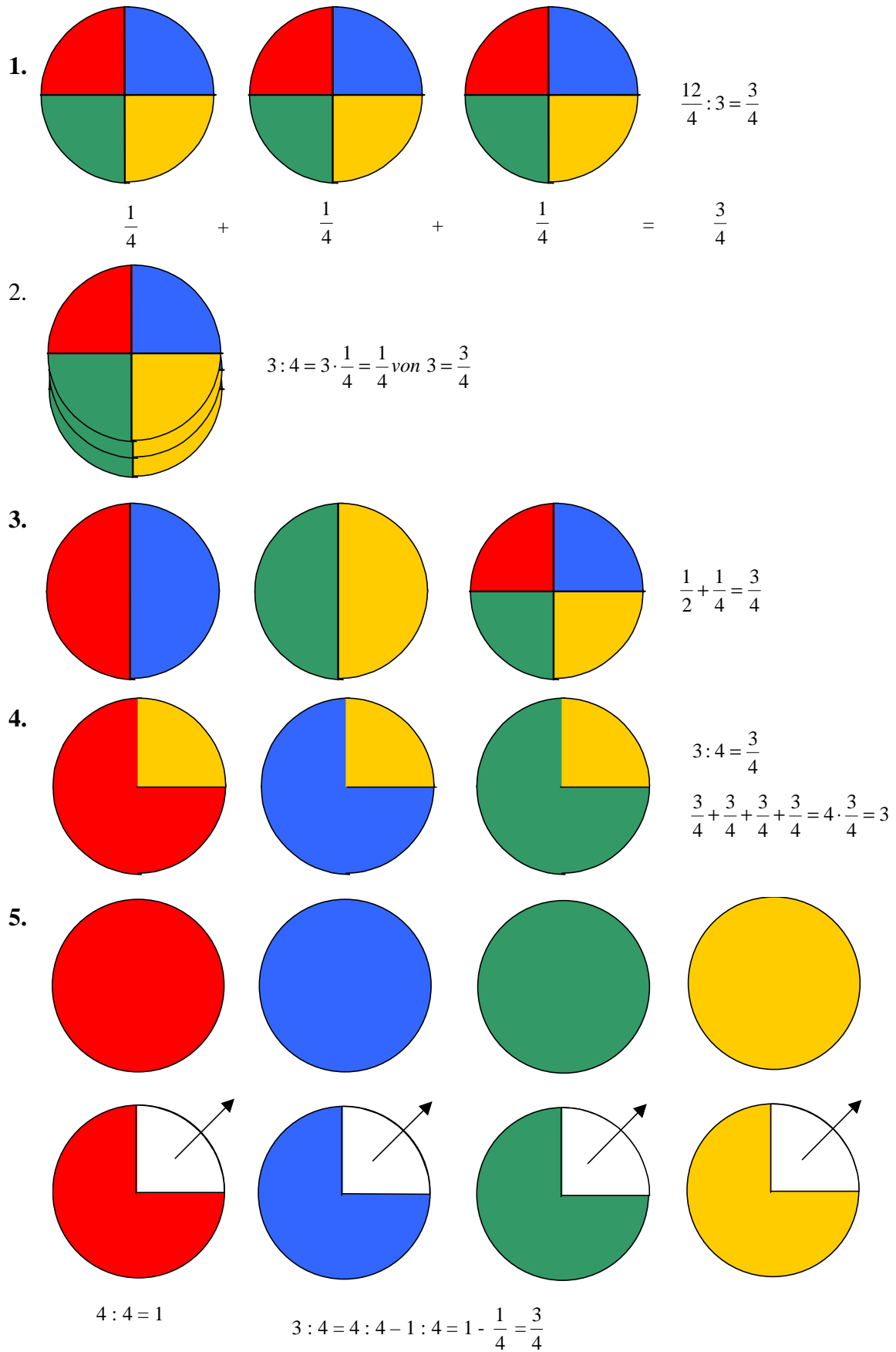


Abbildung 3: 5 verschiedene Arten, 3 Pizzen an 4 Kinder zu verteilen

Eine Problemaufgabe auf entwickelterer Stufe gehört zum Kontext Teilungen eines Quadrats: Die Schüler sollen allein durch Falten und Zeichnen eine quadratische Papierfläche so zerlegen, daß dabei eine quadratische Teilfläche entsteht, die $\frac{1}{5}$ der quadratischen Gesamtfläche ausmacht. Kurz: Mache aus einem großen Quadrat ein kleines Quadrat, das 5mal in das große passen würde. (Oder auch umgekehrt: Man gibt die Figur vor und fordert die Schüler auf, den Anteil des kleinen Quadrats am großen Quadrat zu finden.)

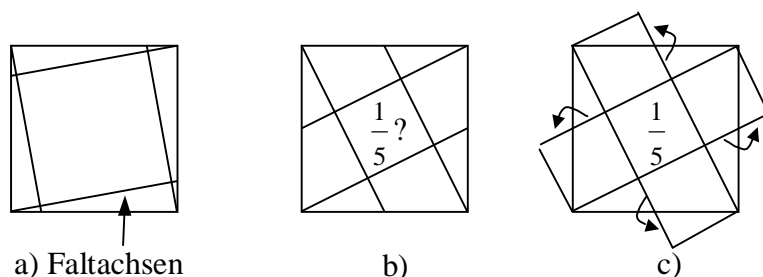


Abbildung 4: Kleines Quadrat aus großem Quadrat herstellen

Völlig unangemessen wäre es, eine Lösung vorzuführen oder fragend-entwickelnd zu „erarbeiten“. Zunächst sollen die Schüler sich ganz allein bastelnd und zeichnend selbst versuchen. Bald wird man feststellen, daß systematisches Falten parallel zu den Seiten nicht zum Ziel führen kann; man erhält nur Halbe, Viertel, Achtel usw. (Nenner ist Zweierpotenz). Man muß auf etwas Neues kommen, im wahrsten Sinne des Wortes querdenken. Und da kann entdeckt werden, daß es durch planmäßiges „Querfalten“ möglich ist, ein kleineres Quadrat zu erhalten (Abb. 4a). Dessen Größe hängt davon ab, „wie quer“ gefaltet wird. Was sind dabei die Extremfälle?

Im Sonderfall, wenn die Faltsachsen von einer Ecke zur Mitte einer nicht anliegenden Seite verlaufen, scheint sich die Lösung zu ergeben. Dies ist die entscheidende Entdeckung (Abb. 4b). Daß es wirklich die Lösung ist – der zweite Teil des Problems –, kann eingesehen werden, wenn man die 4 rechtwinkligen, zueinander kongruenten Dreiecke sieht (Umstrukturieren!), die sich zu einem Quadrat zusammensetzen lassen, in das 4mal das mittlere gesuchte Quadrat paßt. Jedes der vier genannten Dreiecke ist flächengleich dem Quadrat. Oder es wird die tolle Umgestaltung in Abb. 4c gefunden.

Dann kann Weiteres entdeckt werden, z.B. daß jedes der 4 kleinen Teildreiecke in den Ecken die Flächengröße $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ besitzt, wenn das Ausgangsquadrat den Flächeninhalt 1 besitzt usw.

Die Pflege des heuristischen Denkens darf sich nicht in der Bearbeitung isolierter Problemstellungen (Sternaufgaben, Knacknüssen, möglichst als „Futter“ für die Leistungstärksten) erschöpfen, sondern muß den Unterricht insgesamt durchdringen. Vorschläge dazu bringen die folgenden Kapitel.

Auf einen speziellen, aber wichtigen Punkt sei hier noch kurz hingewiesen. Zum heuristischen Denken gehört nicht nur das Finden, sondern auch das Überprüfen einer Lösung. Es müßte zur Angewohnheit erzogen werden, nichts aus der Hand zu geben, das nicht – möglichst auf einem anderen Wege – kontrolliert worden ist. Wenn ein Schüler

bei $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ unsicher ist und dann auf $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$ setzt, so sollte er gewohnheitsmäßig etwa den Test an bekanntem Material machen; es wäre dann ja $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

4 Alte Zahlen – neue Zahlen, allgemeine Probleme der Zahlbereichserweiterung

Die Schüler sind durch Erfahrungen in der Vorschul- und Grundschulzeit mit den natürlichen Zahlen vertraut. Sie sind sogar damit geprägt in dem Sinne, daß ihre arithmetischen Kompetenzen auf ungefragten, quasi archetypischen, intuitiv tief verankerten Überzeugungen beruhen.

Dazu gehören:

- Kardination: Eine Zahl und eine Rechenaufgabe beantworten immer eine Frage nach „wie viele?“.
- Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen: Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung (Zahlnamen), der visuell aus einer Folge von Ziffern und auditiv aus einer bestimmten Folge von Grundzahlwörtern (mit Stellenwertangabe) besteht.
- Diskrete Ordnung: Jede Zahl hat einen Nachfolger und – außer der kleinsten Zahl – einen Vorgänger. Die Menge der Zahlen ist wie eine Kette mit Anfang aber ohne Ende.
- Rechnen: Jede Elementaroperation $a + b$, $a - b$ (wenn $a \geq b$), $a \cdot b$ und $a : b$ (wenn b Teiler von a) ist bei in der Ziffersprache gegebenem a , b unmittelbar durchführbar und liefert wieder eine Zahl in der üblichen Ziffersprache.
- Einschränkung der Division: Die Division $a : b$ ist nicht immer restlos möglich. Wenn sie möglich (und der Teiler größer als 1) ist, dann ist das Ergebnis immer kleiner als die geteilte Zahl.

Multiplikation und Ordnung: Multipliziert man zwei Zahlen, die größer als 1 sind, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen (Multiplizieren als „starkes“ Vermehren).

Diese Überzeugungen werden in der Bruchrechnung sämtlich in Frage gestellt. Darin liegt die unhintergehbare und nicht einfach hinwegmethodisierbare Schwierigkeit der Bruchrechnung, und dies macht nicht nur Schülerfehler verständlicher, sondern auch das mühselige Zögern (auch in der Geschichte der Mathematik), Bruchzahlen überhaupt als Zahlen zu akzeptieren.

Eine Definition der Bruchzahlen und ihrer Verknüpfungen oder eine mengentheoretische Konstruktion der Bruchzahlen als Klassen äquivalenter Paare natürlicher Zahlen kann für Schüler keinerlei Gewinn darstellen, da ja so die o.g. Überzeugungen überhaupt nicht in ihrer intuitiven Verankerung betroffen werden. Man muß sich als Lehrer schon um *intuitive Aufklärung* bemühen, was voraussetzt, sich der Problematik der Zahlbereichserweiterung bewußt zu sein.

5 Zahlen und Zähler – Führung und Verführung durch Kardination

Nichts scheint so unverrückbar festzustehen, daß Zahlen zum Zählen da sind und Zählresultate fixieren. Das gilt für das „reine“ Zählen als Sprachspiel (eins, zwei, drei,...) wie für das Abzählen von Gegenständen in realen Situationen: Wie viele Kühe sind jetzt auf dieser Weide, wie viele Mädchen in unserer Klasse, wie viele Kunden sind jetzt im Geschäft, wie viele Einwohner (am Stichtag) in unserer Stadt? usw.

Wohlbegründeterweise spielen Anzahlsituationen im Sachrechnen in der Grundschule eine hervorragende Rolle, die Kardination ist die erste große mathematische Leistung zur Erhellung realer Situationen. Nebenbei bemerkt: Die Operationen mit natürlichen Zahlen haben dasselbe Doppelgesicht wie die mit Bruchzahlen, nämlich lebensweltliche Bedeutsamkeit und innermathematische Strukturiertheit.

Vernünftig ist im Prinzip auch die Verbindung des Rechnens mit dem Zählen: Addieren als Weiterzählen, Subtrahieren als rückwärts zählen, Multiplizieren als Zählzählen, Dividieren als rückwärts Zählzählen (Abbildung 5), wobei aber schon in den Rechenarten zweiter Stufe (Multiplikation/Division) die beiden Operanden begrifflich unterschiedlich sind; in $3 \cdot 4$ Perlen bezieht sich 3 nicht auf Perlen, sondern auf Gruppen von Perlen.

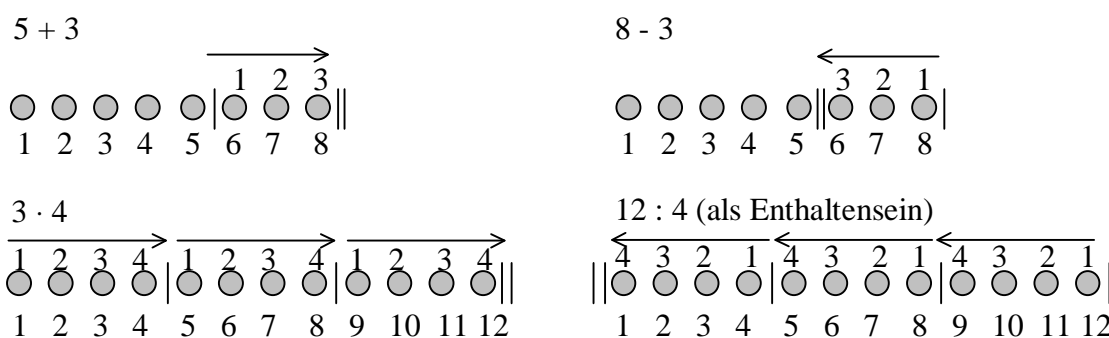


Abbildung 5: Kardinales Rechnen als Zählen in der Grundschule

Diese Unterscheidung kann und sollte als *Vorerfahrung* zum Bruchzahlbegriff ausgebaut werden, etwa: 4 ist dreimal in 12 enthalten, 4 ist ein Drittel von 12, 8 sind 2 Drittel von 12. Aber dies sprengt grundsätzlich nicht den kardinalen Rahmen; in $12 : 4 = 3$ ist ja 3 doch auch als Anzahl zu verstehen, entweder als Anzahl von Perlen je Gruppe (Verteilen) oder als Anzahl von Gruppen (Aufteilen).

Auch die „gebrochenen“ Größen, die in der Grundschule vorkommen wie 3,25m oder 2,125kg usw. werden in der Regel der Kardination assimiliert, indem 3,25m als $3\text{m} + 25\text{cm} = 3,25\text{cm}$ verstanden wird und gerechnet wird in der „kleineren“ Einheit, was später in der Bruchrechnung wieder aufgegriffen werden sollte. Eine nützliche Vorerfahrung wäre es auch, wenn 3,25m als $3\frac{1}{4}\text{m}$ und 2,125kg als $2\frac{1}{8}\text{kg}$ bedacht und geschrieben würde.

Darüber hinaus und vor allem sollte die *Maßzahldeutung* der natürlichen Zahlen schon in der Grundschule mehr zu ihrem Recht kommen und nicht unter dem Übergewicht der kardinalen Deutung verkümmern. Das heißt dann auch, daß neben dem Zählen das *Messen* mehr zu kultivieren ist. Ein ausgezeichnetes Mittel dazu sind Zahlstäbe, insbesondere die farbigen und nicht unterteilten *Cuisenaire-Stäbe* (Besuden 1998). Im Messen von Stäben aneinander haben wir eine enaktive Verkörperung der Division mit Rest, die

später zu einfachen Fällen der Wechselwegnahme mit Bruchzahldeutung führen kann (Abbildung 6).

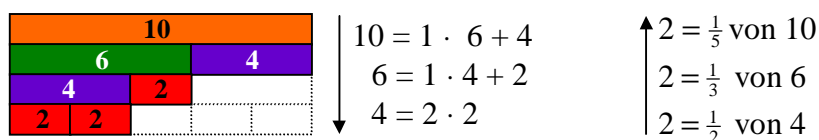


Abbildung 6: Messen mit Cuisenaire-Stäben

Diese Prozedur des aufeinander folgenden Aneinandermessens ist noch weitaus spannender, wenn die Länge der Stäbe, die aneinander zu messen sind, numerisch nicht bekannt ist und man doch zu einem numerischen Ergebnis gelangen kann, wenigstens zu einem angenäherten (Abb. 7). Das läßt sich z.B. mit 2 Strohhalmen enaktiv ausführen, und man muß diese Prozedur praktisch ausführen und zeichnen lassen. Es ist bereits eine fundamentale Erfahrung zu Bruchzahlen, wenn das Ergebnis von Abbildung 7 in $S = \frac{7}{24} W$ oder $W = \frac{24}{7} S$ o.ä. ausgedrückt wird.

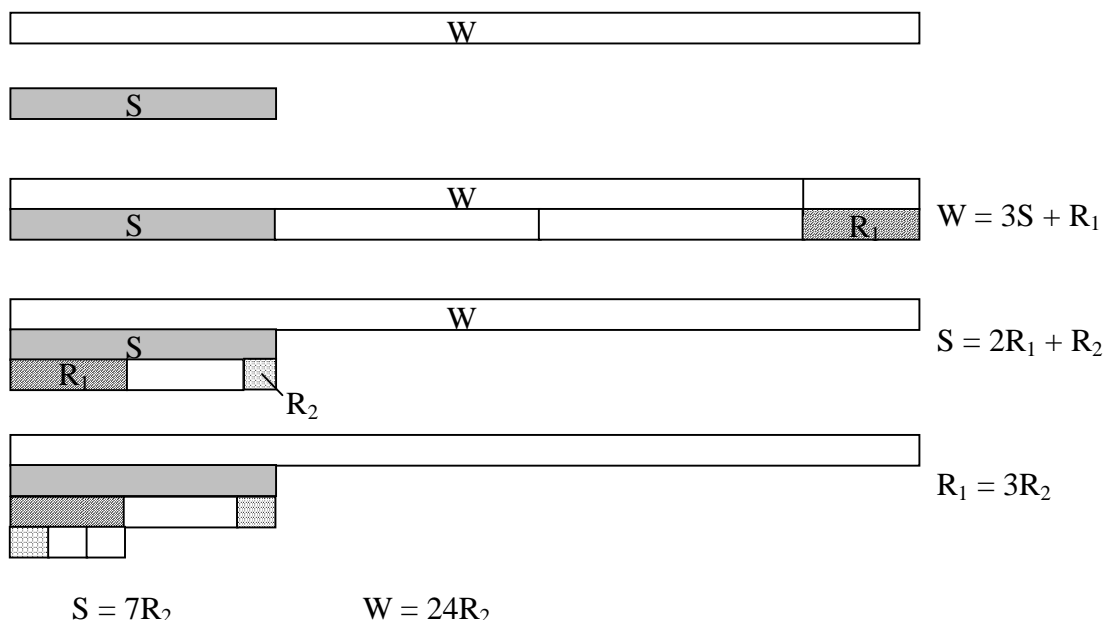


Abbildung 7: Aneinandermessen bis zu einer gemeinsamen Maßeinheit (hier R_2)

Es gibt eine große Verführung, die kardinale Sicht durch *Analogsierung* in der Bruchrechnung fortzusetzen, nicht nur bei Addition und Subtraktion. $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$ wird als „praktisch dasselbe“ angesehen wie $4m + 2m$ oder wie 4 Nüsse + 2 Nüsse usw. Siebtel erscheint dann als eine Benennung dessen, auf was die zählende Addition (oder Subtraktion) angewandt werden soll, was durch die Bezeichnung „Nenner“ ja auch noch bestärkt wird; und bei gleichnamigen Brüchen funktioniert das ja auch prächtig. Eine langjährig geübte und auch erfolgreiche Analogie sitzt tief, und Schüler greifen besonders in Streß- oder Unsicherheitssituationen fast unweigerlich darauf zurück. Deshalb braucht man sich nicht zu wundern, wenn Schüler auch in $\frac{4}{7} + \frac{2}{5}$ fast wie selbstverständlich

„zusammenzählen“ wollen und etwa auf $\frac{4+2}{7+5}$ verfallen, wenn dies auch gerade nicht von

der Analogie getragen wird, es wäre ja so etwas wie 4 Äpfel + 2 Nüsse. Die Bedeutung der Nenner wird ausgeblendet.

Große Unsicherheit besteht, und das zeigen auch Fehleranalysen (Padberg, S. 93 f.), wenn *natürliche Zahlen und Brüche in Rechnungen gemeinsam* auftreten, wie in $3 + \frac{2}{5}, \frac{2}{5} + 3, 3 - \frac{2}{5}$. Jetzt scheint die kardinale Sicht (Weiterzählen) eine besondere Ver-

führung (Strefland 1986) zu sein, indem nach dem Muster $a + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, $a - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

„gerechnet“ wird, wobei auch die „Analogie“ zur Multiplikation (da „geht“ es ja! $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$) eine Rolle spielen mag. Den geringsten Anteil richtiger Lösungen fand man

bei Subtraktionsaufgaben der Art $1 - \frac{7}{15}$ (Padberg, S. 100 f.), die ja „eigentlich“ fast gar

kein Rechnen erfordern, sondern „nur“ Basisvorstellungen von Brüchen.

Die „syntaktische“ Analogiebildung, Nenner als Namen für etwas anzusehen, die ja bei der Addition/Subtraktion gleichnamiger Brüche erfolgreich ist, führt im Falle der Mul-

tiplikation fast konsequenterweise auf das Muster $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, und tatsächlich treten Fehler

dieser Art, allerdings nur bei wenigen Schülern systematisch, auf (Padberg, S. 116 f.). Die

Division vom Typ $\frac{a}{b} : \frac{c}{b}$ müßte dann eigentlich wieder erfolgreich sein, vor allem dann, wenn

c ein Teiler von a ist und die Aufgabe als Maßaufgabe (enthalten sein) gedeutet wird, also

richtig $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c$. Tatsächlich gibt es aber gehäuft den Fehler vom Typ

$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$ (Padberg, S. 134), also $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$, das hieße auch 9 Nüsse : 3 Nüsse

= 3 Nüsse; und da stimmen die Zahlen auch noch, wenn auch Unsinn dasteht.

Insgesamt gibt es durchgehend große Schwierigkeiten in Bruchrechenaufgaben, wenn natürliche Zahlen und Bruchzahlen gemeinsam auftreten. Halten die Schüler (unbe-

wußt) am Kardinalzahlkonzept, wonach Nenner Namen von etwas sind, fest, können sie zwar in den Rechenarten erster Stufe bedingt erfolgreich sein; ungleichnamige Brüche

werden ja gleichnamig (!) gemacht, und dann geht es weiter mit Weiter- oder Zurück-

zählen der Zähler. Aber dieser analoge Prozeß verdeckt eher ein inhaltliches Bruchver-

ständnis, was sich eben bei „gemischten“ Aufgaben der o.g. Art $\frac{1}{7} + 3, 4 - \frac{1}{7}, 5 \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{7} : 6, \frac{15}{16} : \frac{3}{16}$ u.ä. niederschlagen kann.

6 Gesichter der Bruchzahlen

Der entscheidende Punkt ist, daß Schüler natürliche Zahlen als spezielle Bruchzahlen verstehen lernen sollen, und nicht umgekehrt Bruchzahlen als spezielle natürliche Zahlen, nämlich als benannte natürliche Zahlen, wie das die o.g. syntaktische Analogie

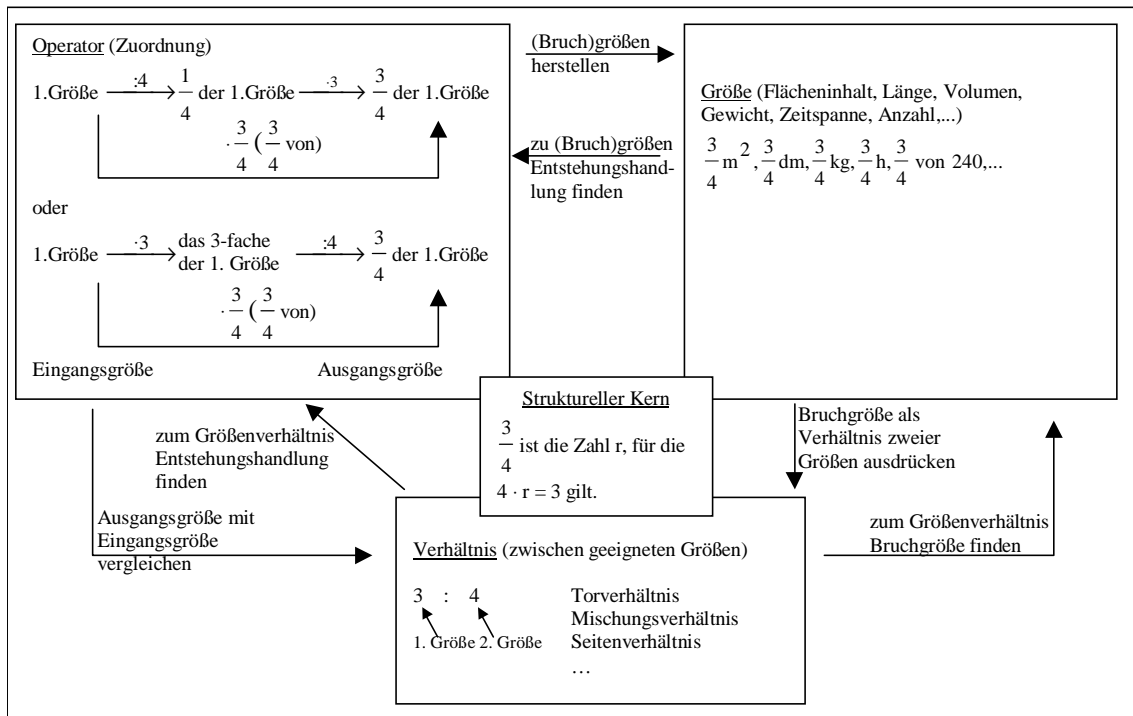


Abbildung 8: Drei wichtige Deutungen von Bruchzahlen am Beispiel $\frac{3}{4}$

suggeriert. Zwar ist es didaktisch unbedingt richtig, das Neue so weit wie möglich dem Altbekanntem anzupassen (Assimilation i.S. Piagets), aber genau so richtig ist es, die Grenzen dieser Anpassung wahrzunehmen und die Notwendigkeit zur Kreation neuer Ideen und Vorstellungen zu erkennen (Akkommodation i.S. Piagets). $\frac{3}{4}$ ist eben nicht als Anzahl im Sinne der Mächtigkeit einer Menge von wohlunterschiedenen Elementen deutbar. Aber $\frac{3}{4}$ ist als Quantitivum deutbar, und zwar 1. vor allem als wohldefinierte Größe nach Festlegung einer Ganzheit (Einheit), 2. als doppelte Handlungs- oder Operatoranweisung (nimm das 3-fache des 4. Teils einer (Einheits)Größe, teile das 3-fache einer (Einheits)Größe durch 4), die sich auf Größen bezieht und 3. als Verhältnis zweier (geordneter) Größen zueinander (das 4-fache der ersten Größe ist gleich dem dreifachen der zweiten Größe). Abb. 7 soll diese 3 Deutungen und ihren Zusammenhang illustrieren.

Diese Deutungen werden einerseits mit Hilfe der natürlichen Zahlen gefunden, andererseits lassen sich natürliche Zahlen nun neu deuten als spezielle Bruchzahlen: n als Operator ($\frac{n}{1}$), als Größe (n-faches einer Einheitsgröße), als Verhältnis $n : 1$.

Die neue Deutung der „alten“ Zahlen ist keine bare Selbstverständlichkeit, wenn es um Anwendungen geht. Von 5 Kühen zu reden, ist klar, nicht aber, in $\frac{5}{1}$ oder gar in $\frac{15}{3}$ Kühen einen Sinn zu sehen. Es muß gelernt werden, daß auch eine gebrochene Zahl von Kühen eine sinnvolle Gedankenkonstruktion ist, etwa als durchschnittlicher Viehbe-

stand von Bauernhöfen, wobei es zu diesem Modell gehört, sich die Kühe als untereinander gleiche Idealkühe (sog. GVE = Großvieheinheiten) zu denken.

Es kommt nicht darauf an, die o.g. Deutungen in der Schule systematisch zu thematisieren, unverzichtbar aber sind vielfältige Erfahrungen zum Begriff der Bruchzahlen einschließlich der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen.

Was die eminent wichtige Verhältnisdeutung angeht, so ist zu beachten, daß eine Verhältnisangabe immer kontextgebunden ist; es drückt „Gestalthaftes“ numerisch aus (Führer 1999). Man kann nicht einfach mit Verhältnissen rechnen. Spielt eine Mannschaft A gegen eine Mannschaft B einmal mit dem Ergebnis 3 : 4 und beim nächsten

Mal mit dem Ergebnis 1 : 2, dann haben weder $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ noch $\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ so ohne weitere

ein Sinn, der sich auf Fußballspiele bezieht.

7 Brüche als Zeichen für Zahlen

Einer der größten Brüche zwischen natürlichen und Bruchzahlen wird durch die Bezeichnung markiert. Während jeder natürlichen Zahl (nach Wahl der Basis, üblicherweise bei uns 10) eineindeutig ein „Wert“ aus dem Alphabet der 10 Ziffern 0 bis 9 zugeordnet wird, besteht „der“ Name einer Bruchzahl aus einem Komplex von 3 Zeichen: Zähler, Bruchstrich, Nenner, wobei Zähler und Nenner je Namen von natürlichen Zahlen sind. Die Nennung einer natürlichen Zahl geschieht in einem Wort (und sei es auch ein Ungetüm: „zweihundertdreißigtausendvierhundertvierundfünfzig“), die Nennung einer Bruchzahl jedoch in zwei oder gar in drei Wörtern („zwei Drittel“, „zwei durch drei“). Dies ist an sich schon ein Sachverhalt, der umso beunruhigender wirken muß, je weniger die Differenz zwischen Zeichen und Bezeichnetem erkannt ist bzw. je mehr Zeichen und Bezeichnetes als „dasselbe“ angesehen wird.

Es wird hier keineswegs dafür plädiert, die Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem in der Primar- oder Erprobungsstufe allgemein zu thematisieren. Zwar lernen die Kinder in der Grundschule verschiedene geometrische und algebraische Darstellungen derselben Zahl kennen (Abbildung 9), aber es ist fragwürdig, ihnen weismachen zu wollen, $5 + 3$, $10 - 2$, $2 \cdot 4$, $16 : 2$, usw. seien nur verschiedene Namen derselben Zahl, deren Standardname 8 sei. Tatsächlich ist es wichtig und richtig, wenn die Kinder auch den Gleichheitscharakter des Gleichheitszeichens kennenlernen, die algebraische Sicht und nicht nur den „ergibt“-Charakter, die funktionale Sicht (links Aufgabe, rechts Ergebnis der Rechnung). Dann haben wir in $5 + 3 = 16 : 2$ weniger ein Phänomen der Namensverschiedenheit bei Objektgleichheit als vielmehr eine Aussage: Die Aufgabe $5 + 3$ führt zum selben Ergebnis wie die Aufgabe $16 : 2$, die beiden Seiten sind ergebnisgleich und können ausgetauscht werden (Winter 1970, 1982). In der funktionalen Sicht einer Zahlgleichung dominiert die Handlung, das Verfahren, die Herstellung, die Prozedur, sie ist sicher die ursprüngliche, während die algebraische Sicht stärker begriffsorientiert ist, hier dominiert das urteilende, deklarierende, informierende Moment.

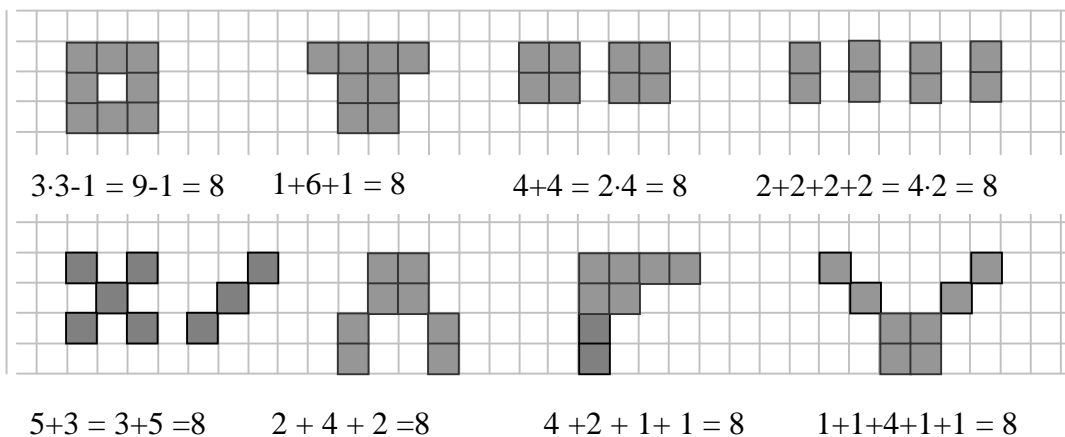


Abbildung 9: Verschiedene Zahldarstellungen in der Grundschule am Beispiel 8

In der Kommunikation wird zweckmäßigerweise zwischen dem Namen einer Zahl und ihren möglichen Darstellungen unterschieden. Wie heißt die Zahl? Ist eine andere Frage als die Frage: Was weißt du über die Zahl? „89“ ist der (bei uns übliche) Name einer bestimmten Zahl, „24. Primzahl“, oder „ $8^2 + 5^2$ “, „ $100 - 11$ “ usw. sind Darstellungen der Zahl 89, die über sie – allerdings eindeutig – informieren.

Die Zahlenamen für fast alle natürlichen Zahlen sind keine vereinbarten willkürlichen Setzungen, wie es Kindstufen sind, sondern systematisch aus Grundzeichen aufgebaut, nachdem man sich auf diese Grundzeichen, bei uns die Ziffern 0 bis 9, geeinigt hat. Insofern informieren unsere Zahlenamen doch über die durch sie benannten Zahlen: Sie stellen eine Vielfachsumme aus Zehnerpotenzen dar.

$$40142 = 4ZT + 0T + 1H + 4Z + 2E = 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Es ist eine sehr wichtige Aufgabe des MU in der Primarstufe, diese Zahlenamen verstehen zu lehren (natürlich zunächst ohne Potenzschreibweise), wobei u.a. der Gebrauch des Abakus als enaktive Form der Stellenwertdarstellung unersetzbar ist.

Genau eine solche Entschlüsselung als Summe von „leicht“ zu fassenden Basiszahlen (wie 1, 10, 100,...), die durch die Stellen allerdings stillschweigend gegeben sind, ist bei gewöhnlichen Brüchen nicht ohne weiteres möglich. Der (ägyptische) Ausweg, die Bruchzahlen durch Stammbruchzahlen als Bausteine möglichst kurz summativ darzustellen, ist zwar mathematisch interessant, aber höchst unpraktisch. So ist z.B.

$$\frac{12}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{156} \text{ (was herauszufinden übrigens eine schöne Übung zum additiven$$

Bruchrechnen ist), und man könnte $\overline{2} \overline{3} \overline{12} \overline{156}$ als „kanonischen“ Namen dieser Bruchzahlen vereinbaren. Aber solche Namen für sehr viele Bruchzahlen überfordern schnell das Gedächtnis (die Ägypter benutzten Tafeln) und sind rechenunfreundlich, z.B. wäre

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} \text{ als } \overline{3} + \overline{4} + \overline{6} = \overline{2} \overline{4} \text{ zu schreiben.}$$

Wesentlich effektiver ist da die dezimale Bezeichnung der Bruchzahlen, also die Benennung der Zahlen in Form von Dezimalbrüchen. Das ist ein hervorragendes Beispiel von Assimilation des Neuen in das Alte. Jedenfalls kann das Prinzip der Vielfachsummenbildung – von Basiszahlen – und zwar wie in \mathbf{N} von links nach rechts – fortgesetzt werden, und man kann im Prinzip auch das gewohnte Ordnen und Verknüpfen von Zahlen übertragen. Die Entschlüsselung eines Dezimalbruchs ist genau so leicht und

genau so schwierig wie die der Bezeichnung einer natürlichen Zahl.
 $12,2034 = 1Z + 2E + 2z + 0h + 3t + 4zt = 12 + \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$.

Aus diesem Grunde ist es im Sinne des Lernens als Weiterlernen dringend geboten, während der gesamten Bruchrechnung Dezimalbrüche – gewissermaßen als Vertraute im fremden Land – zu gebrauchen.

Allerdings müssen auch die Grenzen deutlich werden, die o.g. Fortsetzung ist nicht ohne neue Ideen möglich. Schon der „alltägliche“ gewöhnliche Bruch $\frac{1}{3}$ läßt sich nicht

restlos dezimal darstellen. $0,333\dots$ oder $0,\bar{3}$ als Zahlbezeichnung zu akzeptieren, setzt die Ungeheuerlichkeit voraus, eine unendliche Summe

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + K$$

als Darstellung für etwas Bestimmtes, Endliches anzusehen. Das erfordert eine das alltägliche Denken übersteigende und fundamentale Einsicht in den Sachverhalt, daß etwas unaufhörlich wächst und dennoch nicht grenzenlos groß wird, weil man es einschachteln kann. Dies ist auch geometrisch möglichst weit zu verfolgen (Abbildung 10).

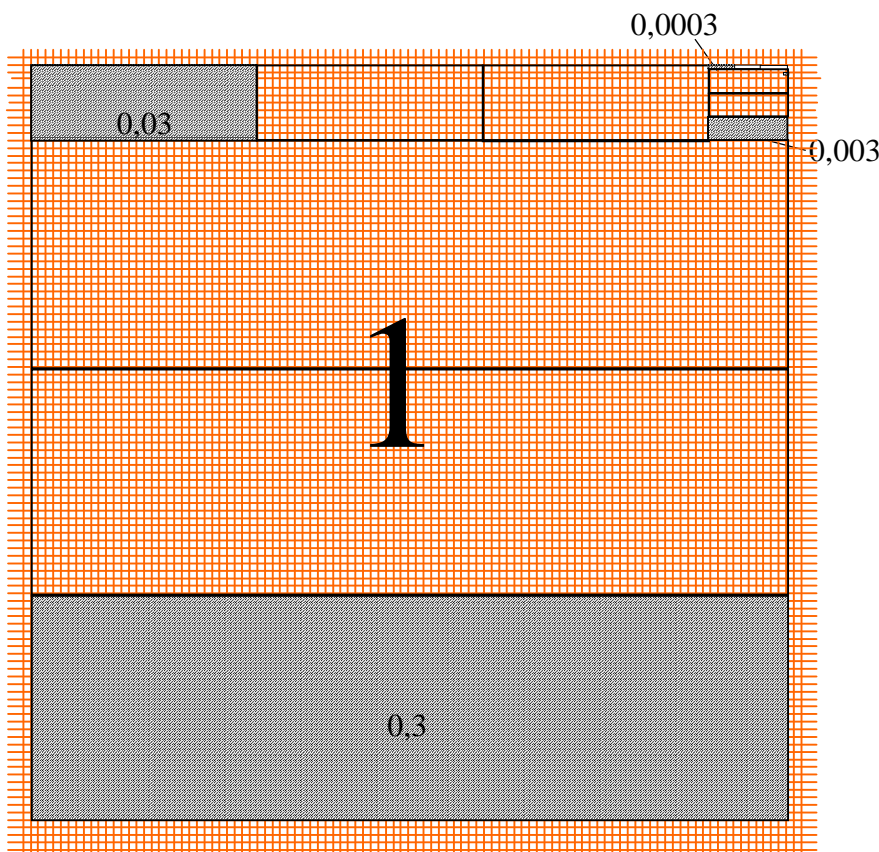


Abbildung 10: $\frac{1}{3}$ als Dezimalbruch auf mm-Papier

$$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$$

$$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$$

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$$

$$\quad \quad \quad \text{N} \quad \quad \quad \text{N}$$

$$0,\bar{3} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$$

Insoweit dieses dezimale Nähern auf beliebige Genauigkeit verstanden wird, lassen sich – auch in Verbindung mit dem Taschenrechner – beliebige Ungetüme von gewöhnlichen Brüchen zähmen und damit auch wenigstens dem Näherungsrechnen gefügig machen.

$$0 < \frac{436}{3971} < 1$$

$$0,1 < \frac{436}{3971} < 0,2$$

$$0,10 < \frac{436}{3971} < 0,11$$

$$0,109 < \frac{436}{3971} < 0,110$$

$$0,1097 < \frac{436}{3971} < 0,1098$$

$$\quad \quad \quad \text{N} \quad \quad \quad \text{N}$$

Solche Ungetüme kommen in der Lebenspraxis vor, z.B. bei Wahlen als Stimmanteile.

Auf jeden Fall kann so die Überzeugung wachsen, daß Ausdrücke der Form $\frac{m}{n}$ tatsächlich Zahlen im fast gewohnten Sinn sind, die fast wie gehabt eineindeutig dezimal getauft werden können. „Nur“ kommt ein Zeichen für „unendlich periodisch“ hinzu. Ferner brauchen Endnullen so wenig geschrieben zu werden wie Anfangsnullen bei natürlichen Zahlen, was aber begründet werden muß (Erweitern!). Schließlich werden Neunerperioden nicht zugelassen, um Eineindeutigkeit zu erhalten (3,34 und $0,33\bar{9}$ wären zwei verschiedene Namen derselben Zahl).

So wichtig die Kodierung in Dezimalbrüche ist, so sehr bedarf es doch auch der Erfahrungen zu einem unmittelbaren Verständnis von geschriebenen gewöhnlichen Brüchen. Die verinnerlichte Überzeugung mit den Bezeichnungen für natürliche Zahlen, daß sich die Größe einer Zahl zunächst einmal in der Anzahl der Stellen, d.h. in der Länge des Zahlwortes niederschlägt, hat hier keine Entsprechung. Es muß z.B. verstanden werden,

daß $\frac{17}{256}$ viel kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Die Begründung dafür sollte aber nicht nur formal erfolgen

gen ($\frac{1}{2} = \frac{1^{(17)}17}{34} > \frac{17}{256}$, weil $34 < 256$), sondern inhaltlich bis hin zu anschaulichen Episoden

dierungen (1 Pizza an 2 Personen verteilen vs. 17 Pizzen an 256 Personen verteilen). Eine hoch zu schätzende Aktivität, weil sie auch Ängste vor Ungetümen abbauen kann, ist das *Vergleichen mit sog. alltäglichen* Brüchen wie Halben und Vierteln und, was

bisher viel zu wenig beachtet wurde, Hundertstel (Prozente). Eine genaue anschauliche Vorstellung von z.B. $\frac{833}{1120}$ kann und braucht man nicht zu haben. Aber daß die Größe

(der Wert, das Quantum) des Bruches auf jeden Fall größer als $\frac{1}{2}$ und kleiner als 1 ist, sollte sofort gesehen werden können (Überschlagsrechnen), aber auch die Nähe zu $\frac{3}{4}$ sollte (ohne Formalismus, etwa durch Runden ($\frac{8}{11}$)) begründet werden können.

Von entscheidender Bedeutung für das Entschlüsseln (d.h. das Erfassen des Wertes) ist die Kenntnis des Zusammenspiels von Zähler und Nenner. Neu gegenüber den natürlichen Zahlen ist die *unendliche Synonymie*, d.h. ein und dieselbe Zahl läßt sich auf unendlich verschiedene Arten und immer nur durch den Gebrauch unserer 10 Ziffern und des Bruchstrichs benennen und diese Synonymie ist sogar äußerst nützlich. Das findet seinen Ausdruck in der eingeschränkten Möglichkeit des Kürzens und der stets gegebenen Möglichkeit des Erweiterns. Wieder ist es wichtig, daß Schüler nicht nur lernen, *wie* man kürzt und erweitert, sondern mehr noch, *was* dies eigentlich besagt und *wozu* das benutzt wird, etwa: Wird der Zähler verdoppelt, verdreifacht,... und der Nenner belassen, so kommt man zu Brüchen mit doppeltem, dreifachem,... Wert. Wird der Zähler belassen und der Nenner verdoppelt, verdreifacht,..., so kommt man zu Brüchen, deren Wert nur noch die Hälfte, ein Drittel,... des Wertes beträgt. Werden Zähler und Nenner zugleich verdoppelt, verdreifacht, so bleibt der Wert erhalten, es ist dieselbe Zahl. In der Pizza-Welt: Bei Vervielfachung oder (falls möglich) Teilung der Zahl der Pizzen und zugleich der Personen bleibt das, was bei Gleichverteilung jeder bekommt, dasselbe.

Hier muß man dramatische Zuspitzungen ausleben; daß $\frac{1}{2} = \frac{7500}{15000}$ ist, bedeutet ja, daß

es für die an den Teilungsaktionen beteiligten Personen gleichgültig ist, ob 1 Pizza an 2 oder 7500 Pizzen an 15000 Personen verteilt werden. Man kann sich dazu vorstellen, daß die 15000 Personen an 7500 Tischen mit je 2 Stühlen sitzen (Kurth 1995).

Die große Bedeutung der „Formänderung“ für das Bürgerliche Sachrechnen wurde schon angedeutet. So beschreiben $\frac{10\text{km}}{2\text{h}}$, $\frac{5\text{km}}{1\text{h}}$, $\frac{50\text{km}}{5\text{h}}$, ... dieselbe (durchschnittliche)

Schnelligkeit einer Fortbewegung, und $\frac{3\text{l Wasser}}{2\text{l Sirup}}$, $\frac{30\text{l Wasser}}{20\text{l Sirup}}$ beschreiben Flüssig-

keitsmengen mit demselben Süßegrad. „Formänderung“ ist eben auch ein Abstraktionsvorgang: Alle denkbaren Paare von Wasservolumen und Sirupvolumen z.B., die zur Mischung anstehen können, werden als ein und dieselbe Mischung angesehen, wenn sich dieselbe Süßigkeit ergibt. Das ist abstrahierendes Modelldenken, denn in der Praxis

kann es schon ein Unterschied sein, ob ich $\frac{1}{2}$ oder $\frac{150}{300}$ Schokolade vor mir habe, oder

ob jemand bei 40000 DM Einkommen 4000 DM Steuern oder bei 400000 DM Einkommen 40000 DM Steuern zahlt. In der statistischen Bewertung ist es ein gewaltiger Unterschied, ob von 2 Erkrankten 1 stirbt, oder ob von 1000 Erkrankten 500 sterben.

Nach wie vor sind neben Bürgerlichen Sachverhalten geometrische Kontexte bei der Entschlüsselung von Brüchen unverzichtbar, wie umgekehrt geometrische Sachverhalte in Brüchen ihren Ausdruck finden. Geometrische Figurationen sollen nicht nur die Verfahren Kürzen und Erweitern veranschaulichen, sondern auch den *erwähnten Abstraktionsvorgang mit Sinn füllen*.

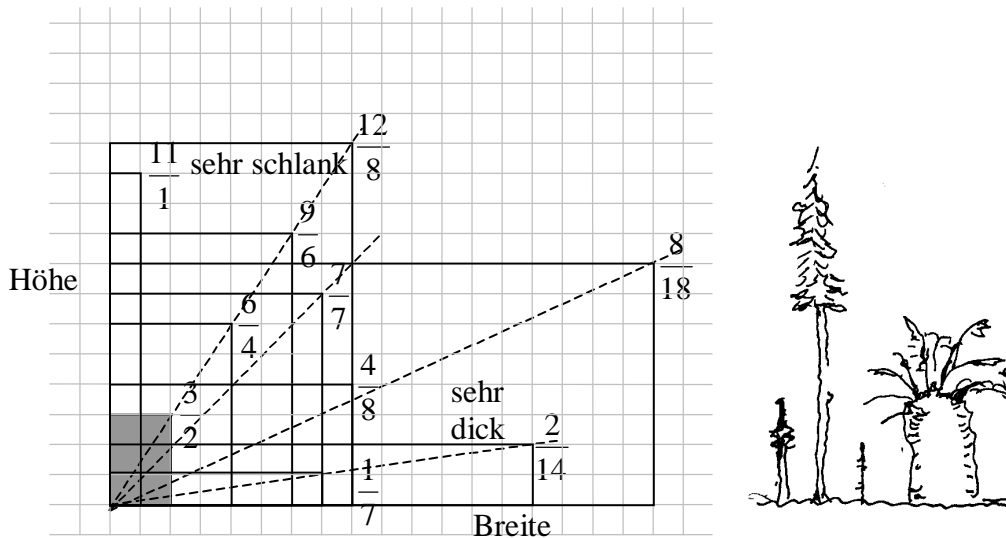


Abbildung 11: Schlankeitsgrad (z.B. von Pflanzen) im Quadratgitter

Ein Beispiel kann die Schlankheit von stehenden Gegenständen (Türen, Häuser, Bäume, Möbel,...) sein, die in vereinfachter Form als „stehende“ Rechtecke im Quadratgitter des Rechenpapiers untersucht werden können (Abbildung 11). Daran gibt es, bei qualitativer Einschätzung, eine Variation von bohnenstangendünn bis behäbig breit. Um das zu präzisieren, werden Höhe und Breite der Rechtecke in ihrer Bedeutung für den Schlankheitsgrad aufeinander bezogen, etwa: Je höher das Rechteck (als Querschnitt des realen Gegenstandes) im Vergleich zur Breite ist, um so schlanker ist es. Sehr hoch und dabei sehr schmal bedeutet sehr schlank, sehr niedrig und zugleich sehr breit bedeutet sehr gedrunken, dick, behäbig. Eine exaktifizierende Quantifizierung die zu entwickeln ist, lautet: Ein Höhenrechteck ist schlanker als ein anderes, wenn sein Verhältnis $\frac{\text{Höhe}}{\text{Breite}}$ größer ist als das des anderen. Zwei Rechtecke sind gleich schlank, wenn sie

dasselbe Höhen-Breiten-Verhältnis haben, d.h. auch, daß sie dieselbe *Form* haben, zueinander *ähnlich* sind (Vollrath 1976). Es ist dann zu entdecken, daß zueinander ähnliche (formgleiche) Rechtecke durch *maßstäbliche* Vergrößerungen oder Verkleinerungen auseinander hervorgehen. Wenn die Rechtecke Gitterrechtecke sind, also ganzzahlige Höhe und Breite haben, dann entspricht dem maßstäblichen Verändern Erweitern und Kürzen des Verhältnisses $\frac{\text{Höhe}}{\text{Breite}}$, was als Bruch geschrieben werden kann. Ist die Höhe = 3 Einheiten, die Breite = 2 Einheiten, dann stehen sie im Verhältnis 3 : 2 zueinander, und das bedeutet: Höhe = $\frac{3}{2}$ von der Breite, Breite = $\frac{2}{3}$ von der Höhe. Die Zahl

$\frac{3}{2}$ kann als Schlankheitsgrad einer unendlichen Schar von zueinander gleich schlanken

Rechtecken erklärt werden. Und dies kann, wie in Abbildung 11, durch die Diagonalgeraden sehr schön zum Ausdruck gebracht werden. Je schlanker die Rechtecke (einer Klasse zueinander gleich schlanker Rechtecke) sind, um so steiler ist diese Diagonalgerade.

Dieser Kontext kann auf vielerlei Weisen ausgebaut werden, u.a. zu zahlentheoretischen, geometrischen und koordinaten-algebraischen Fragestellungen hin. Hier sollte in erster Linie *eine* Erfahrungsmöglichkeit zum inhaltlichen Erfassen der Größe von Bruchzahlen und ihrer Beschreibung in Brüchen angedeutet werden. Dieses inhaltliche Erfassen der Größe kann nicht in einer separierten einmaligen Lernsequenz erfolgen, Bemühungen darum müssen die gesamte Bruchrechnung durchziehen.

8 Ordnung der Bruchzahlen auf der Zahlengeraden

Die Ordnung der natürlichen Zahlen ist geprägt vom Bild einer Kette. Die Zahlen folgen, mit der kleinsten Zahl (0 oder 1) beginnend, der Größe nach Stück für Stück aufeinander, und es gibt kein Ende, keine größte Zahl. Die Zahlen sind wie Perlen auf einer Schnur aufgereiht, wobei es eine Anfangsperle aber keine letzte gibt, vielmehr gibt es immer weitere Perlen, wie weit man auch schreitet. Die Größenordnung der Bruchzahlen besitzt zwar auch immer die fundamentale Eigenschaft der Linearität: für zwei

Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gibt es stets genau eine der drei Möglichkeiten:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Sie lassen sich also der Größe nach anordnen, nicht jedoch

aneinanderreihen wie Perlen auf der Schnur, wo es zu jeder Perle eine nächste gibt. Die „nächste Bruchzahl“ der Größe nach wäre eine Bestimmung, die keinen Sinn ergibt. Die

nächste Bruchzahl von z.B. $\frac{1}{3}$ ist nicht $\frac{2}{3}$, weil z.B. $\frac{1}{2}$ der Größe nach näher an $\frac{1}{3}$

liegt, aber auch $\frac{1}{2}$ ist nicht die nächste, weil $\frac{3}{8}$ noch näher an $\frac{1}{3}$ liegt usw. Bruchzahlen

haben der Größenordnung nach keine Nachbarn. Das ist eine völlig andere Art von Ordnung: Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Bereich der natürlichen Ordnung liegen die Bruchzahlen der Größe nach nicht *diskret* (voneinander getrennt), sondern *dicht*, was bedeutet: Zwischen zwei verschiedenen Bruchzahlen, und sei ihre Differenz noch so gering, liegen stets unendlich viele weitere Bruchzahlen.

Dies muß bewußt erlebt werden, weil dies keine randliche Erscheinung, sondern eine fundamentale Eigenschaft ist, die auch in Anwendungen große Bedeutung besitzt: Die Dichtigkeit ist Ausdruck dafür, daß zwei Größen derselben Art so genau wie gewünscht aneinander gemessen werden können.

Das Anordnen gegebener Bruchzahlen der Größe nach ist wesentlich anspruchsvoller als das Anordnen gegebener natürlicher Zahlen. Schon einfachste Fälle sind für Schüler

(und Erwachsene) eine Hürde. So wird $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ behauptet, weil ja $3 < 4$ ist. Aus demsel-

ben „Grund“ ist $\frac{3}{5} < \frac{5}{12}$, weil $3 < 5$ und $5 < 12$ ist (Padberg, S. 75).

Das Konzept der Kardination (der Bezug auf Zählzahlen) erweist sich immer wieder als möglicher Anker, vor allem dann, wenn die Aufmerksamkeit syntaktisch fixiert ist: die Suche nach einer leichten Regel, die sich auf die Notation bezieht. Erfolgreich ist die kardinale Sicht (Nenner ist Benennung) wieder, wenn in den vorgelegten Brüchen die Nenner gleich sind.

Im Falle der natürlichen Zahlen ist die Anordnung gegebener Zahlen allein über die Ziffernbilder, also über die Namen möglich. Bei unterschiedlicher Stellenzahl (Länge des Zahlwortes) entscheidet allein das schon über die Ordnung der Größe nach. Bei gleicher Stellenzahl werden – von links nach rechts – die Ziffernwerte verglichen, und danach wird entschieden. Diese (lexikographische) Strategie wird in der folgenden Aufgabe demonstriert.

Ordne diese Zahlen der Größe nach:
31426, 13117, 90011, 11009, 11900, 24631

Der Schüler soll realisieren, daß der Zahlenwert an der höchsten, zweithöchsten usw. Stelle ausschlaggebend ist (lexikographisches Ordnen). Die allgemeine Strategie zur Anordnung nach der Größe wird durch diesen Plan angedeutet, wobei z.B. hervorzuheben ist, daß alle Zahlen, die mit 1ZT beginnen, kleiner sind, als

1****	11***	11009
1****	11***	11900
1****	→ 13***	→ 13117
2****	24631	24631
3****	31426	31426
9****	90011	90011

alle Zahlen, die mit 2ZT, 3ZT usw. beginnen. Auf jeden Fall ist immer eindeutig eine Ordnung herzustellen und selbstverständlich ist klar: Es handelt sich genau dann um dieselbe Zahl, wenn auf allen Stellen dieselbe Ziffer steht.

Damit kann man im Falle von gewöhnlichen Brüchen nichts anfangen.

Der Weg über Dezimalbrüche bietet sich wieder im Rahmen des *Assimilationsprinzips* (Forme die Problemsituation so um, daß das Problem mit dem bisherigen Wissen gelöst werden kann.) an. Und darauf sollte man in der Schule keineswegs verzichten, denn man hat dadurch – vor allem bei Einsatz des Taschenrechners – ein effektives Mittel

auch beim Vergleich sehr sperriger Brüche. So ist $\frac{11813}{45117} < \frac{14719}{56213}$, weil $0,2618\mathbf{3}0352\dots < 0,2618\mathbf{4}3345\dots$ ist, wie Ziffernvergleich von links nach rechts zeigt. Allerdings ist dieses Vorgehen alles andere als selbstverständlich, es muß gelernt werden.

Aber – abgesehen von der Stellenbeschränktheit des Taschenrechners, die z.B. bei 10

Stellen nicht mehr den Unterschied zwischen $\frac{2871566314}{3566112207}$ und $\frac{2871566314}{3566112208}$ anzeigt –

der Bruchzahlvergleich über die dezimale Umkodierung kann in seiner syntaktischen Orientierung leicht zu einem rein mechanischen Hantieren geraten und auch zu Fehlern führen. So muß Schülern keineswegs klar sein, daß 0,3 und 0,3000000 dasselbe ist. Es handelt sich ja um Kürzen und Erweitern von Dezimalbrüchen. Darüber hinaus besteht keine Gleichheit zwischen 0,3 und 0,30, wenn es sich um Meßwerte handelt; da wird nämlich zum Ausdruck gebracht, wie genau der Meßwert (der in der Praxis immer ein Näherungswert ist) ermittelt wurde.

Wir benötigen unbedingt Erfahrungen, die semantisch orientiert sind und sich auf die Bruchzahlen in der gewöhnlichen Bruchschreibweise beziehen.

Unersetzbar ist dafür die Darstellung der Bruchzahlen auf der *Zahlengeraden* (Abbildung 12), die ja auf allen Altersstufen des Schulunterrichtes verwandt werden kann und soll.

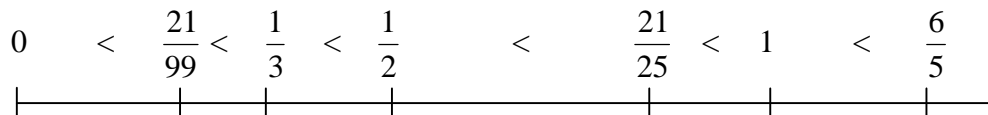


Abbildung 12: Lineare Ordnung der Bruchzahlen

An der Zahlengeraden kann vielleicht am nachhaltigsten erfahren werden, daß Gebilde wie $\frac{15}{97}$ wirklich Zahlen sind, da sie – nach Wahl der Einheitsstrecke – als Streckenlängen eindeutig darstellbar sind. Allerdings genügt es nicht, Schülern diese Darstellung als Veranschaulichung zu zeigen. Viel nachhaltiger ist es, wenn sie lernen, Bruchzahlen als Streckenlängen auf der Zahlengeraden *selbst auf geometrische Weise* darzustellen. Das geometrische Halbieren, Vierteln, Achteln,... läßt sich über fortgesetztes Falten von Papierstreifen schon in der Grundschule enaktiv bewerkstelligen (Abbildung 13).

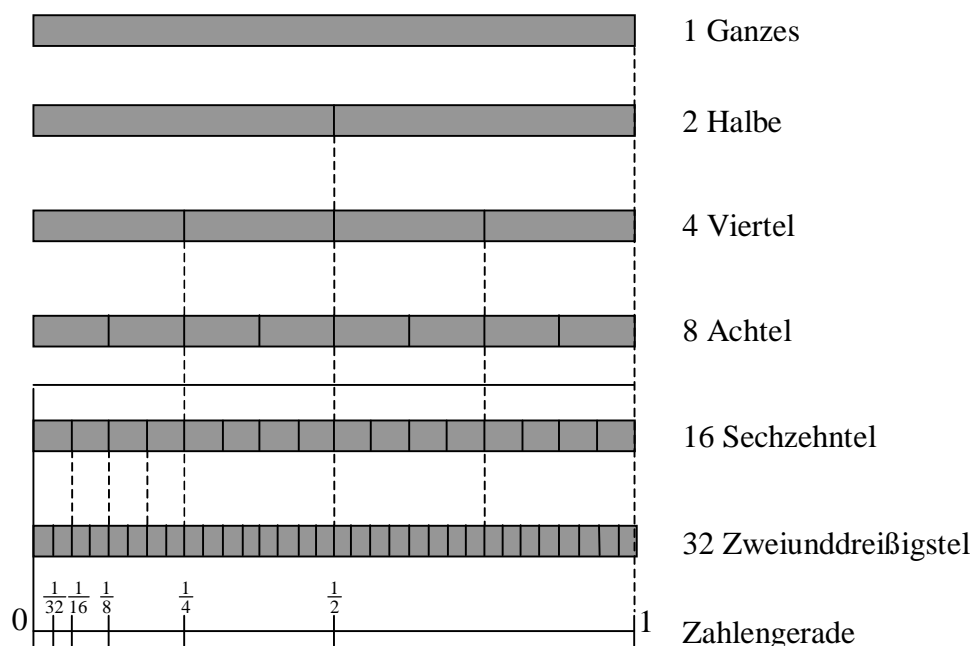


Abbildung 13: Darstellen von Bruchzahlen über fortgesetztes Falten von Papierstreifen auf der Zahlengeraden

Wie hieran viele Erfahrungen zur Ordnung von und zum Rechnen mit Bruchzahlen gemacht werden können, liegt auf der Hand, z.B. $\frac{19}{32} < \frac{3}{4}$, $\frac{7}{8} = \frac{28}{32}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ usw.

Wie aber stellt man geometrische Bruchzahlen mit beliebigen Nennern auf der Zahlengeraden, z.B. Drittel, Fünftel, Sechstel, Siebtel, Neuntel usw. dar?

Ein ebenso einfaches wie mächtiges Mittel ist der Gebrauch eines Gummibandes, das – möglichst eng – skaliert ist. Sehr rasch lassen sich durch Anlegen an eine gegebene

Einheitsstrecke Bruchzahlen auch mit sperrigen Nennern recht exakt darstellen (Abb. 14). Je kleiner der Nenner ist, um so mehr muß das Band gedehnt werden, weil die Stücke um so größer sind, eine willkommene *sinnliche Erfahrung* zur Größe von Bruchzahlen.

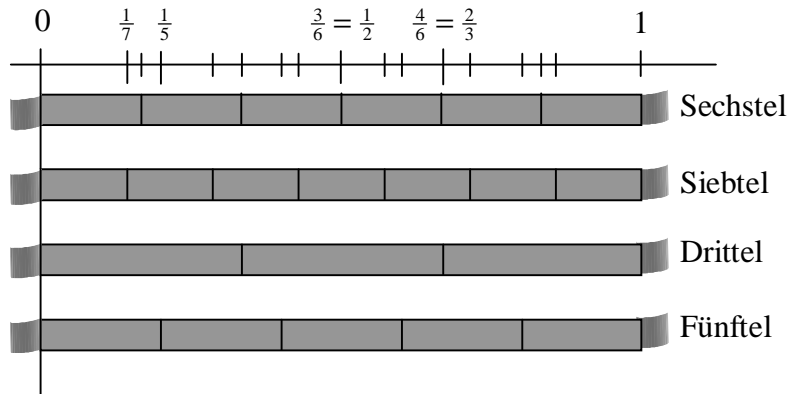


Abbildung 14: Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl mit Hilfe eines skalierten Gummibandes

Aufwendiger, jedoch auch bereichernder ist die *Konstruktion mit Zirkel und Lineal*. Die Entdeckung, daß Halbe an jedem beliebigen Dreieck gefunden werden können, könnte die entscheidende Konstruktionsidee befördern. Jedes beliebige Papierdreieck läßt sich durch Falten in 4 zueinander kongruente Teildreiecke zerlegen (Abbildung 15).

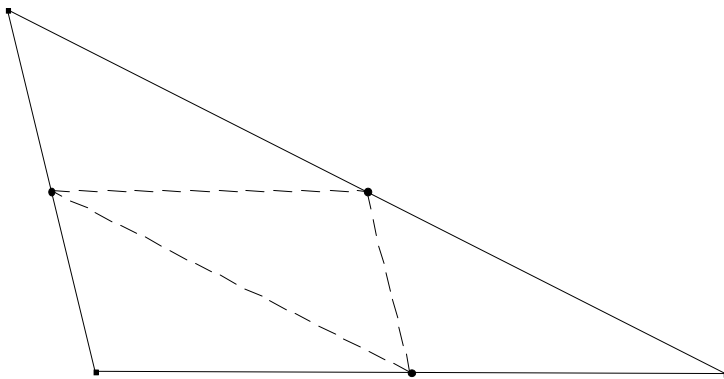


Abbildung 15: Mittellinien im Dreieck

Durch „Anfalten“ werden zunächst die Mittelpunkte der Seiten gefunden. Verbindet man diese paarweise (über Falten oder Zeichnen) miteinander, so entstehen immer 4 Teildreiecke. Die entscheidende Entdeckung ist dann, daß jedes dieser Teildreiecke eine maßstäbliche Verkleinerung im Maßstab 1 : 2 des ursprünglichen Dreiecks ist, was als Sätze über die Mittellinien im Dreieck ausgedrückt werden kann: (1) Die Mittellinie zweier Seiten ist parallel zur 3. Seite. (2) Die Mittellinie zweier Seiten ist halb so lang wie die 3. Seite. (3) Die Mittellinien zerlegen das Dreieck in 4 zueinander deckungsgleiche Dreiecke.

Dieser Fund ist an sich schon wertvoll und kann ausgebaut werden. Was hier interessant ist, ist eine konstruktive Anwendung, nämlich wie man Halbe rein zeichnerisch darstellen kann (Abbildung 16).

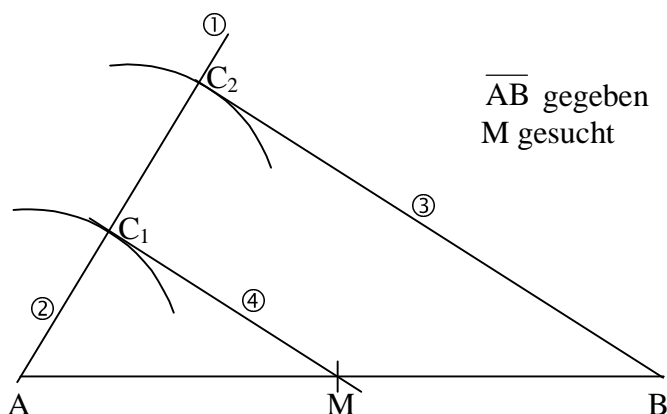


Abbildung 16: Zeichnerisches Halbieren einer Strecke

Gesucht der Mittelpunkt M einer gegebenen Strecke \overline{AB} beliebiger (unbekannter) Länge.

- (1) Zeichne durch A einen beliebigen Strahl auf dem nicht B liegt.
- (2) Trage von A aus mittels Zirkel aufeinanderfolgend 2 Strecken gleicher aber beliebiger Länge (Zirkelöffnung!) ab und nenne die Endpunkte C_1, C_2 .
- (3) Zeichne die Strecke $\overline{C_2B}$.
- (4) Zeichne die Parallele zu $\overline{C_2B}$ durch C_1 . Auf \overline{AB} ergibt sich so der gesuchte Punkt M.

Die Verallgemeinerung (was 2 recht ist, sollte 3, 4, 5,... billig sein!) ist die klassische Konstruktion zur Zerlegung einer Strecke in n gleich lange Teile, also der Längendarstellung von n-teln (Abbildung 17) auf der Zahlengeraden.

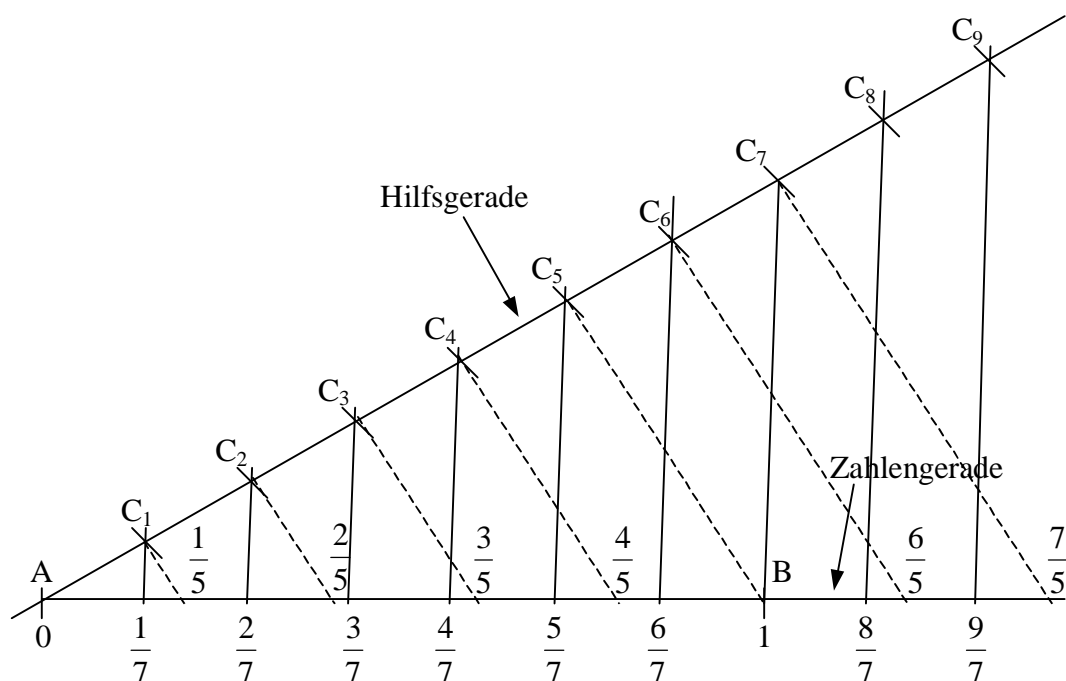


Abbildung 17: Zeichnerische Darstellung von Siebteln und Fünfteln auf dem Zahlenstrahl (bei gegebenem (0, 1))

Natürlich wird durch Messen und Rechnen kontrolliert, was nicht nötig wäre, jedoch zu einem stimmigen Gefühl verhelfen kann. Ist die gegebene Einheitsstrecke (Strecke auf dem Zahlenstrahl von 0 bis 1) z.B. 96 mm lang, dann müßte die Strecke für $\frac{1}{7} \frac{96 \text{ mm}}{7} \approx 13,7 \text{ mm}$ lang sein. Stimmt's?

Eine Zeichnung wie Abbildung 17 lädt zu Beobachtungen, Vermutungen und rechnerischen Aktivitäten ein, z.B.: Nur in 1 (2, 3,...) treffen Fünftel und Siebtel genau aufeinander; in $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{5}$ scheinen sie sich aber recht nahe zu sein; wie groß ist $\frac{3}{5} - \frac{4}{7}$? Ordne

alle Siebtel und Fünftel zwischen 0 und 3 der Größe nach usw. Das Unterteilungsmuster auf der frei gewählten Hilfsgeraden bildet sich auf der Zahlengeraden ab. Das ist der geometrische Sachverhalt, der üblicherweise in der Form des *Streifensatzes* (als diskreter Sonderfall des Strahlensatzes) ausgedrückt wird: Jede Querstrecke in einer Schar gleichabständiger Parallelen wird durch sie in Teilstrecken gleicher Länge zerlegt. Diesen Satz kann man – vor der systematischen Geometrie – einsichtig machen, z.B. mit Hilfe von Transparentpapier.

Wichtig ist die praktische zeichnerische Erfahrung – und ebenso ihre gedankliche Verallgemeinerung, d.h. die Durchführung der Bruchherstellung im Gedankenexperiment, die *immer* möglich ist, mag der Nenner noch so groß sein. Die Darstellung von einer so

sperrigen Bruchzahl wie $\frac{31}{365}$ (der Anteil des Januars an einem bürgerlichen Normaljahr) auf dem Zahlenstrahl (0, 1 gegeben) bedeutet ja: Stelle in Gedanken den Nenner 365 auf der Hilfsgeraden durch 365 gleich lange Strecken dar, übertrage dieses Muster durch Parallelen auf die Einheitsstrecke und zähle dann darauf 31 Teilstrecken ab. Das liefert einen ganz bestimmten Punkt auf der Einheitsstrecke, den man markiert mit $\frac{31}{365}$.

Die Größe dieser Bruchzahl ist etwa $\frac{1}{12}$. Da $31 \cdot 12 = 372$ ist, also $\frac{1}{12} = \frac{31}{372}$, ist $\frac{1}{12}$

(etwas) kleiner als $\frac{31}{365}$.

Eine sehr ökonomische, (wenn auch praktisch wieder beschränkte) Methode, Bruchzahlen als Längen darzustellen, ist der Gebrauch von *Streifenmustern* (Winter 1984). Ein Streifenmuster, d.h. eine Schar von gleichabständig zueinander verlaufenden Geraden, ist vorgegeben, die gegebene Einheitsstrecke – auf einem Papierstreifen markiert – wird eingepaßt (Abbildung 18). Ist das Muster genügend fein, so kann irgendeine frei gewählte Einheitsstrecke in Halbe, Drittel, Viertel,... durch Streifenlinien zerlegt werden. Die Teilpunkte werden auf dem Papierstreifen markiert. Man erhält so mit einem Schlag durch eine einzige Einpassung im Prinzip eine ganze *Bruchfamilie* (in Abbildung 18 links Siebtel). Wird noch der Zirkel eingesetzt, so ergibt sich jeweils eine ganze Schar von Bruchfamilien (in Abbildung 18 rechts Ganze bis Zehntel) und die Möglichkeit, eine Zahlengerade aufzufüllen.

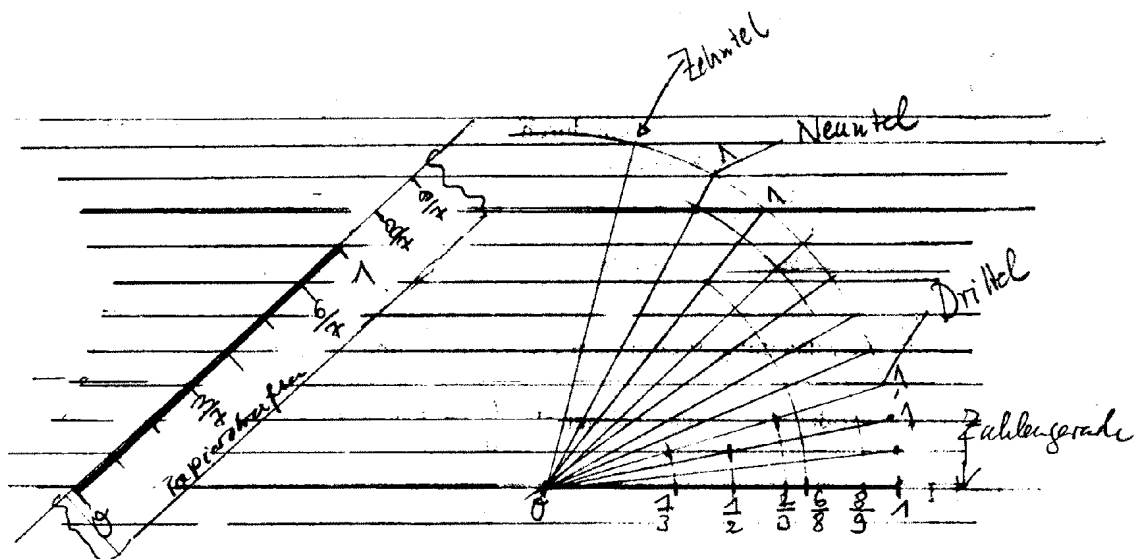


Abbildung 18: Bruchzahlen am Streifenmuster, Prinzip und Systematik

Das Streifenmuster kann übrigens das gesamte Bruchrechnen durchziehen: Formänderungen, Ordnungsbeziehungen, alle Rechenoperationen finden in der Streifenwelt Erfahrungsmöglichkeiten (Winter 1984, Padberg 1989).

Das Ordnen von gegebenen Bruchzahlen der Größe nach an der Zahlengeraden kann und sollte durch weitere Aktivitäten geübt werden.

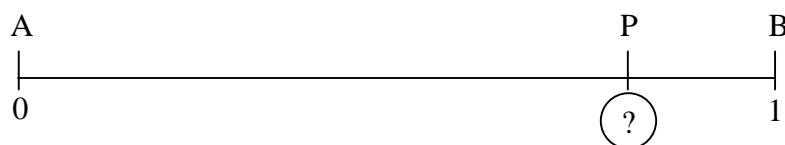


Abbildung 19a: Aufgabe: Welche Bruchzahl zeigt \overline{AP} ?

Eine vielleicht sogar spannende, problemorientierte Übung ist das Schätzen. Auf einer Strecke, auf der die Einheitsstrecke \overline{AB} (unbekannter, beliebiger Länge) markiert ist, wird irgendwo ein Punkt P festgelegt (Abbildung 19a). Die Schüler sollen allein per Augenschein schätzen, welche Bruchzahl durch \overline{AP} dargestellt ist. Die Schätzzahlen werden notiert. Dann erfolgt eine Kontrolle durch eine aufgelegte Rasterung der Einheitsstrecke z.B. in Zehntel (Abbildung 19b). Die Schätzungen werden diskutiert.

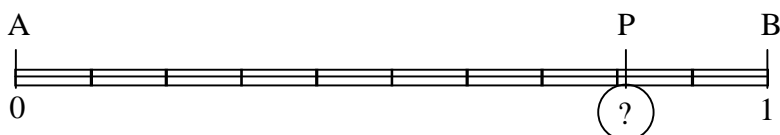


Abbildung 19b: Zur Lösungskontrolle der Aufgabe von Abbildung 19a

Sie ergibt hier, dass die gesuchte Zahl zwischen $\frac{8}{10}$ und $\frac{9}{10}$ liegt. Alle diejenigen, deren

Schätzzahl größer als $\frac{9}{10}$ oder kleiner als $\frac{7}{10}$ ist, haben die gesuchte Zahl mehr oder weniger verfehlt. Es kann Streit darüber geben, wer am besten geschätzt hat. Ist z.B.

$\frac{4}{5}$ eine bessere Schätzung als $\frac{6}{7}$? Beide wären auf jeden Fall gute Schätzungen. Zur

Entscheidung wird noch eine Siebentelrasterung aufgebracht. Da wir aber überhaupt nicht exakt, sondern nur angenähert entscheiden können, welche Zahl dargestellt ist, weil es immer Zeichenungenauigkeiten und Sehfehler gibt, bescheiden wir uns mit Näherungswerten, etwa: Sieger ist, wessen Schätzzahl zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{6}{7}$ liegt.

Diese Übung kann zum Problem führen, wie man auf geometrische Weise die gesuchte Zahl wenigstens annähernd bestimmen kann. Das könnte wieder auf die *Wechselwegnahme* führen, die in unserem Fall gemäß Abbildung 19c beginnt. Nach zwei Schritten ergibt sich bereits, daß die gesuchte Zahl ziemlich genau $\frac{5}{6}$ ist.

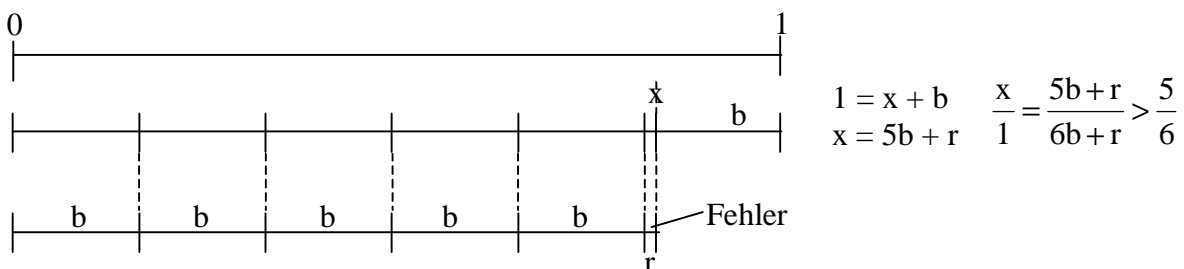


Abbildung 19c: Zur Lösung der Aufgabe der Abb. 15a durch Wechselwegnahme

Eine Variante dieser Übung ergibt sich, wenn jemand den Punkt P durch eine Konstruktion der von anderen zu schätzenden Zahl festlegt.

Empirische Probleme vermeidet man in einer zweiten, problemorientierten Übung am Zahlenstrahl. Jemand schreibt, für die anderen nicht einsehbar, irgendeine Bruchzahl, z.B. zwischen 0 und 1, auf einen Zettel und steckt diesen in die Tasche. Die anderen sollen durch Raten die Zahl möglichst genau bestimmen. Der Befragte antwortet aber nur immer mit „ja“ oder „nein“. Blindes Raten: „Ist es $\frac{3}{4}$ ($\frac{5}{7}$, $\frac{25}{26}$, K)?“ führt bald zu

der Einsicht, daß diese Fragestrategie nur höchst zufällig zu einem Treffer führen kann, weil – und das ist hier entscheidend – es zwischen 0 und 1 unendlich viele Bruchzahlen gibt. Also (?) fragt man besser nicht nach bestimmten Zahlen, sondern danach, ob die zu suchende Bruchzahl in einem bestimmten *Abschnitt* auf der Zahlengeraden zwischen 0 und 1 liegt, z.B. „Ist die Zahl größer als $\frac{3}{4}$?“. Zu entdecken ist dann, daß fortgesetzte

Halbierung des Suchbereichs eine optimale Fragestrategie darstellt. Schon nach 5 geschickten Fragen hat man die gesuchte Zahl so eingeschachtelt, daß man höchstens $\frac{1}{32}$

von der gesuchten Zahl entfernt ist. Im Beispiel von Abbildung 20 weiß der Frager nach 5 geschickten Fragen, daß die gesuchte Zahl auf jeden Fall kleiner als $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ und nicht

kleiner als $\frac{23}{32}$ ist. Für die gesuchte Zahl gilt also $\frac{23}{32} \leq x < \frac{24}{32}$.

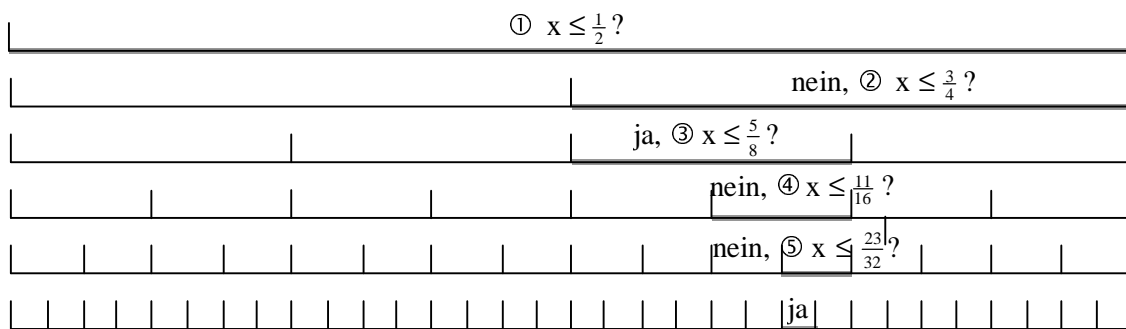


Abbildung 20: Optimale Strategie des Suchbereichs beim Erraten einer Bruchzahl zwischen 0 und 1.

Nach weiteren 5 Fragen ist der Suchbereich nur noch $\frac{1}{1024}$. Allerdings – und das soll ja

gerade bewußt werden – gibt es auch in diesem Suchbereich wieder unendlich viele Bruchzahlen, die in Frage kommen.

Dieses Einfangen von Bruchzahlen kann auch umgekehrt betrieben werden, z.B.: In welchem Halb-, Viertel-, Achtel-... –Bereich liegt $\frac{17}{19}$? Weitere Varianten sind denkbar.

9 Strategien des Zahlvergleichs und Dichte der Bruchzahlen

9.1 Zahlvergleich

Mit den Erfahrungen zum ordnenden Vergleichen von Bruchzahlen an der Zahlengeraden können 4 wichtige Strategien erarbeitet werden, mit denen der Größenvergleich zweier Bruchzahlen *systematisch* betrieben werden kann.

- Umformen auf gleiche Nenner
- Umformen auf gleiche Zähler
- Vergleiche mit bekannten Bruchzahlen als Stützzahlen
- Gleichförmiges Verändern von Zähler und Nenner

Die Aufgabe, $\frac{7}{11}$ und $\frac{19}{31}$ zu vergleichen, kann demgemäß auf mindestens 4 Arten gelöst werden.

$$\text{a) } \frac{7}{11} \stackrel{(31)}{=} \frac{217}{341}, \quad \frac{19}{31} \stackrel{(11)}{=} \frac{209}{341}, \quad \frac{217}{341} > \frac{209}{341}, \text{ also } \frac{7}{11} > \frac{19}{31}$$

$$\text{b) } \frac{7}{11} \stackrel{(19)}{=} \frac{133}{143}, \quad \frac{19}{31} \stackrel{(7)}{=} \frac{133}{217}, \quad \frac{133}{143} > \frac{133}{217}$$

$$\text{(weil 143-tel größer als 217-tel sind), also } \frac{7}{11} > \frac{19}{31}$$

$$\text{c) Vergleich mit 1: } 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}, \quad 1 - \frac{19}{31} = \frac{12}{31}, \quad \frac{4}{11} = \frac{12}{33} < \frac{12}{31}, \text{ also liegt } \frac{7}{11} \text{ näher an 1}$$

$$\text{als } \frac{19}{31}, \text{ also ist } \frac{7}{11} > \frac{19}{31}$$

$$d) \frac{7}{11} \stackrel{(3)}{=} \frac{21}{33} > \frac{20}{32} > \frac{19}{31}$$

Normalerweise überwiegt in der Schule Strategie a) bis hin zur Ausschließlichkeit, es handelt sich um *das* kanonische Vergleichsverfahren. Das ist einmal darin begründet, daß Gleichnamigmachen eine notwendige Voraussetzung für die Strich-Rechenarten (Addition/Subtraktion) ist. Ferner sind die Prozeduren Erweitern und Kürzen sehr suggestiv – als Verfeinern und Vergrößern erfahrbar und faßbar. Schließlich – und nicht zuletzt – kann wieder auf das vertraute Zählkonzept (die Kardination) zurückgegriffen werden, also auf die Argumentationsformen: Wenn $a < b$ ist, genau dann ist auch $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$

(Weniger gleich große Bruchstücke bedeutet weniger Wert).

Letzteres unterscheidet die Strategien a) und b) voneinander. Während $\frac{217}{341} > \frac{209}{341}$ fast

unmittelbar klar ist (mehr gleich große Stücke), erfordert die Aussage $\frac{133}{143} > \frac{133}{217}$ noch

den Rekurs auf das Wissen, daß die Größe des Nenners in Gegenläufigkeit die Größe der Bruchteile bestimmt. Genau dann ist $\frac{a}{n} < \frac{a}{k}$, wenn $n > k$ ist. Dieses Wissen ist nun

aber grundlegend für den verständigen Umgang mit Bruchzahlen, so daß auch Strategie b) zu kultivieren ist. Strategie b) kann auch – wie im Beispiel – Rechenarbeit vereinfachen (kleinere Zähler und Nenner).

Gemeinsam ist den Strategien a) und b) die weit über das Anliegen des Größenvergleichs von Bruchzahlen hinaus reichende allgemeine heuristische Strategie, die Vielfalt von Ausdrücken für ein und dasselbe Objekt auszunutzen.

Der entscheidende Unterschied zwischen den Strategien a) und b) einerseits und c) und d) andererseits besteht darin, daß die letzteren nicht von rein algorithmischer Natur sind.

Die Strategien a) und b) lassen sich total formalisieren, a) etwa beim Vergleich $\frac{a}{b}$ mit

$$\frac{c}{d} :$$

1. Erweitere $\frac{a}{b}$ mit d, $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$

2. Erweitere $\frac{c}{d}$ mit b, $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$

3. Bilde die Differenz $ad - cb$

$$\text{Ist } ad - cb \leq 0, \text{ dann ist } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$

$$\text{Ist } ad - cb > 0, \text{ dann ist } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

In der Sprache der Schüler:

- 1./2. „Über-Kreuz“-Erweitern

3. Neue Zähler vergleichen

D.h. aber, der Zahlvergleich läßt sich ohne Bezug auf inhaltliche Vorstellungen, gewissermaßen blindlings, immer korrekt bewerkstelligen. Das ist – wie in vielen vergleichbaren Situationen des MU – Segen und Fluch zugleich. Der Segen besteht in der Öko-

nomie: Entlastung der Denkarbeit und Kontrollierbarkeit der Prozedur. Zum Fluch gerät ein Algorithmus, wenn er in seiner Reduktion auf syntaktische Aspekte aus dem Auge verlieren läßt, welchen Sinn das Verfahren hat, hier den Umgang mit Bruchzahlen zu verstehen. Es wäre sogar ein starkes Stück *Unmündigkeit*, wenn z.B. der Vergleich von $\frac{2}{117}$ mit $\frac{3}{118}$ oder gar von $\frac{51}{52}$ mit $\frac{53}{51}$ über Strategie a) abgspult würde.

Strategie c) kann nicht blind gehandhabt werden. Man muß sich zunächst die beiden Bruchzahlen ansehen, um sie grob einordnen zu können. Oft ist da schon mit einem Blick eine Entscheidung zu fällen, wenn etwa der eine Bruch größer als 1 bzw. $\frac{1}{2}$, der

andere kleiner als 1 bzw. $\frac{1}{2}$ ist. Wenn das nicht erkennbar ist, werden andere Vertraute

(Drittel, Viertel, Zehntel, Prozente) getestet. Dieser Suchprozeß erfordert einerseits inhaltliche Vorstellungen und Wissens Elemente (z.B. über Subtrahieren), andererseits – das ist wenigstens die begründbare Hoffnung – wird dadurch die Kompetenz im Umgang mit Brüchen gefördert. Die Kultivierung von Strategie c) wäre ein wichtiger Beitrag zur Stärkung und Verbesserung (Sublimierung) der Intuition im Bezug auf Bruchzahlen. Ganz abgesehen davon kann sie auch die Subtraktion (es sind ja subtraktive Vergleiche) motivieren. Entsprechend kann man auch über die Division vergleichen. Da ist eine Bruchzahl genau dann größer als eine 2., wenn ihr Quotient größer als 1 ist. Für unser Beispiel: $\frac{17}{11} : \frac{19}{31} = \frac{7}{11} \cdot \frac{31}{19} = \frac{217}{209} > 1$.

Strategie d) ist derzeit offenbar kaum in der Schule bekannt. Formal kann man sie so darstellen:

$$\text{Ist } m < n, \text{ so ist } \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1} < \frac{m+2}{n+2} < K < 1$$

$$\text{Ist } m = n, \text{ so ist } \frac{m}{n} = \frac{m+1}{n+1} = \frac{m+2}{n+2} = K = 1$$

$$\text{Ist } m > n, \text{ so ist } \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+1} > \frac{m+2}{n+2} > K > 1$$

Schüler können (und sollten) das auf verschiedene Arten entdecken und begründen.

Hilfreich ist der Vergleich mit 1, also der Bezug zur Strategie c). $\frac{4}{11} < \frac{5}{12} < 1$, weil auf

jeden Fall beide Brüche erstens kleiner als 1 sind und weil zweitens $\frac{4}{11}$ weiter von 1

entfernt ist als $\frac{5}{12}$; bei $\frac{4}{11}$ fehlen nämlich $\frac{7}{11}$ an 1, bei $\frac{5}{12}$ jedoch nur $\frac{7}{12}$ (Beziehung zur Strategie b).

In der Pizza-Welt wird der Sachverhalt handfest diskutiert: Was passiert, so die Problemaufgabe, wenn sowohl 1 Pizza als auch 1 Person dazu kommen? In Abbildung 21 geht es um die Frage, was im Fall des Übergangs von ursprünglich 5 Pizzen und 8 Personen auf dann 6 Pizzen und 9 Personen passiert: Jede der 9 Personen erhält dann $\frac{5}{8}$

Pizzen und noch $\frac{1}{9}$ von den restlichen $\frac{3}{8}$ Pizzen, also noch $\frac{1}{24}$ Pizza dazu. Analog können beliebige weitere Beispiele durchdacht werden.

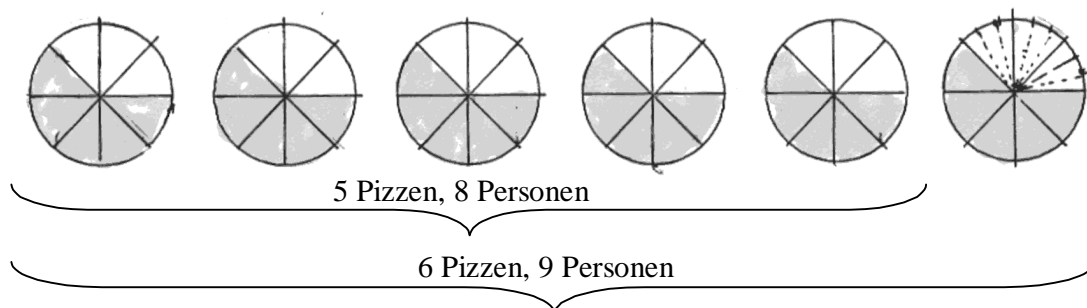


Abbildung 21: Zur Begründung von $\frac{5}{8} < \frac{6}{9}$

Eine geometrische Begründung für das Verhalten beim additiv gleichmäßigen Verändern von Zähler und Nenner (Abbildung 22) rekurriert unmittelbar auf das konstruktionsorientierte Verständnis der Bruchzahl als Länge und ist allgemeiner Natur.

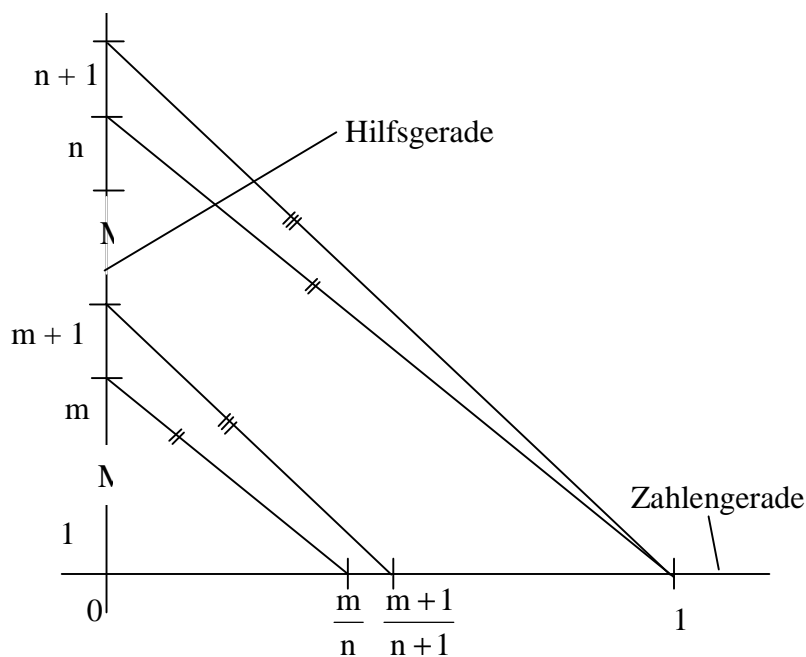


Abbildung 22: Zur Begründung von $m < n \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1} < 1$

Es wird deutlich: Der Bruchzahlvergleich über das zunächst vielleicht kindisch aussehende Manipulieren an Zähler und Nenner gemäß Strategie d) bringt neue Aspekte des Bruchzahlbegriffs hervor und ist in vielen Situationen (evtl. in Verbindung mit anderen Strategien) sehr effektiv. Z.B. ist $\frac{72}{97} < \frac{84}{107}$, weil $\frac{72}{97} < \frac{72+12}{97+12} = \frac{84}{109} < \frac{84}{107}$ ist.

Insgesamt ist der Vergleich von Bruchzahlen eine Thematik, die nicht nur unerlässlich für die Herausbildung von brauchbaren Vorstellungen über Bruchzahlen ist, sondern auch zahlreiche Möglichkeiten zum kreativen Denken und Handeln bietet.

9.2 Dichte

Was die Ordnung der Bruchzahlen von den natürlichen ganz besonders spektakulär unterscheidet, ist die schon angesprochene *Dichtheit*.

Erfahrbar kann das nur dadurch werden, daß man Methoden kennt, die es gestatten, zu jedem denkbaren, gegebenen Paar verschiedener Bruchzahlen eine Zwischenzahl effektiv anzugeben.

Eine Leitaufgabe kann also lauten: Suche eine Bruchzahl, die zwischen $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{8}$ oder –

schwieriger – zwischen $\frac{13}{25}$ und $\frac{15}{17}$ liegt. Beschreibe dann allgemein deine Methode des

Bestimmens einer Zwischenzahl.

Standardstrategien, die gefunden werden können, sind:

(a) Über Erweitern:

$$\frac{5}{6} = \frac{40}{48}; \frac{7}{8} = \frac{42}{48}, \text{ also Zwischenzahl } \frac{41}{48}$$

$$\text{oder } \frac{5}{6} = \frac{35}{42}; \frac{7}{8} = \frac{35}{40}, \text{ also Zwischenzahl } \frac{35}{41}$$

(b) Über Dezimalbrüche:

$$\frac{5}{6} = 0,8333\dots; \frac{7}{8} = 0,875, \text{ also Zwischenzahl z.B. } 0,84 = \frac{21}{25}$$

(c) Über Mittelwertbildung:

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right) \cdot 2 = \frac{82}{48} : 2 = \frac{41}{24}$$

Schön ist es, wenn Schüler auch finden:

(d) Über „Mischen“ („falsche Addition“)

$$\frac{5}{6} < \frac{5+7}{6+8} < \frac{7}{8}$$

(Zähler + Zähler, Nenner + Nenner)

Die Strategie (d) ist extrem einfach, sieht erst aus wie Hokuspokus, aber wieso funktioniert sie? Das ist das neue Problem.

In der Pizza-Welt könnte der Beweis gemäß Abbildung 23 aussehen. Es genügt da zunächst eine anschauliche Begründung in Beispielen, soweit dabei die allgemeine Idee sichtbar gemacht wird.

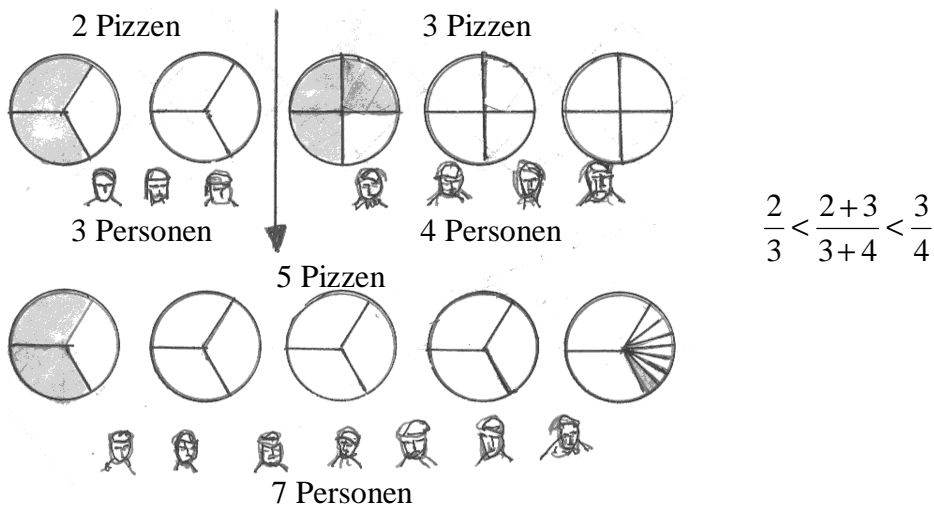


Abbildung 23: Zum Satz: $\frac{m}{n} < \frac{h}{k} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+h}{n+k} < \frac{h}{k}$ in der Pizza-Welt

Hier erhält jede der 7 Personen zunächst $\frac{2}{3}$ Pizza, dann wird die noch übrigbleibende $\frac{1}{3}$

Pizza durch 7 geteilt. Offensichtlich erzielen wir durch den Zusammenschluß der beiden Gruppen einen Konsumausgleich: Die vorher mehr bekamen, erhalten jetzt weniger und umgekehrt. Unversehens sind wir mitten in der Problematik von arm und reich: Durch Zusammenlegung der Güter der wenigen Reichen und der vielen Armen auf alle werden die Reichen ärmer und die Armen reicher.

Suggestiv ist auch die Deutung des Sachverhaltes in der Welt der Mischungen. Ist eine Sirup-Wasser-Mischung weniger süß als eine zweite, so ergibt sich beim Zusammenschütten eine Mischung, die süßer ist als die erste und weniger süß als die zweite. Hier kann und muß auch klar werden, daß das Zusammenschütten keineswegs der Addition der Süßgrade, d.h. der sie definierenden Bruchzahlen, entspricht. Werden z.B. zwei

25%ige Getränke (je $\frac{1}{4}$ aus Sirup und $\frac{3}{4}$ aus Wasser bestehend) zusammengeschüttet,

so ergibt es auf jeden Fall wieder ein 25%iges Getränk und nicht ein 50%iges Getränk, und zwar ganz gleich, welches Volumen die beiden Getränke haben. Wird aber ein 10%iges mit einem 20%igen Getränk zusammengeschüttet, so wird auf jeden Fall eine Mischung erzielt, die mehr als 10% und weniger als 20 % Sirup enthält. Will man mehr wissen, so müssen die Volumina (Mengen) mit ins Spiel gebracht werden. Haben die beiden Getränke gleiches Volumen, z.B. je 1l, so hat die Mischung 2l Gesamtvolumen und $\frac{3}{10}$ l Sirupvolumen, also ist sie 15%ig. Wenn aber das 10%ige Getränk 1l Gesamt-

volumen hat und das 20%ige Getränk nur $\frac{1}{4}$ l, so ergibt sich ein Mischgetränk von $1\frac{1}{4}$ l

Gesamtvolumen und $\frac{3}{20}$ l Sirupvolumen, also ist ein 12%iges Getränk. Das folgende

Schema und Abbildung 24 mögen genügend Anregung sein, wie man durch interessante Mischprobleme das Aufsuchen von Bruchzahlen, die zwischen zwei verschiedenen liegen, zugleich motivieren wie einsichtig machen kann. Auch wäre die Umdeutung des Mischens als Wägephänomen lohnend.

	1. Getränk	2. Getränk	Mischgetränk
Gesamtvolumen	1l	$\frac{1}{4}$ l	$1\frac{1}{4}$ l
Sirupvolumen	$\frac{1}{10}$ l	$\frac{1}{20}$ l	$\frac{3}{20}$ l
Wasservolumen	$\frac{9}{10}$ l	$\frac{4}{20}$ l	$\frac{22}{20}$ l
Anteil Sirup	$\frac{1}{10}=10\%$	$\frac{1}{5}=20\%$	$\frac{3}{20}=12\%$
Mischungsverhältnis	1:9	1:4	3:22

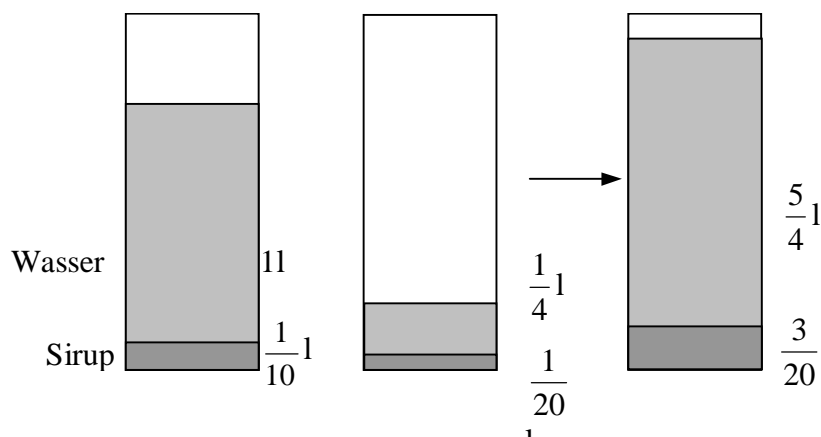


Abbildung 24: Getränke verschiedenen Gesamtvolumens und verschiedenen Sirupvolumens mischen (zusammenschütten)

Für das Verständnis der Dichte von Bruchzahlen ist es nun wichtig, daß man unsere Prozedur (Zähler + Zähler, Nenner + Nenner) beliebig wiederholen kann. Startet man z.B. mit $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$, so gewinnt man fortgesetzt beliebig viele weitere Bruchzahlen dazwischen:

Start

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

1. Schritt

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

2. Schritt

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

3. Schritt

$$\frac{1}{3} < \frac{4}{11} < \frac{3}{8} < \frac{5}{13} < \frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$$

usw.

Es wird die überquellende Fülle an Zwischenzahlen deutlich. Schon nach 3 Schritten haben wir 7 Bruchzahlen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ eingeschachtelt. Es können weitere Entdeckungen gemacht werden, etwa die, daß die Folge der Bruchzahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \dots$ (2. Schrägreihe) beständig kleiner wird, sich der Bruchzahl $\frac{1}{3}$ nähert, ihr sogar beliebig nahe kommt, sie aber nicht erreichen kann. Umgekehrt können weitere Folgen von Bruchzahlen, die sich auf eine Bruchzahl zubewegen, gefunden werden.

Diese dichte Fülle der Bruchzahlen stellt eine enorme Herausforderung an das Vorstellungsvermögen dar. Man hat nicht den Überblick, wie bei den natürlichen Zahlen, wo brav eine auf die andere folgt. Jeder noch so kleine Schritt von einer Bruchzahl zu einer größeren führt über einen Abgrund von unübersehbar unendlich vielen Zwischenzahlen, so daß es verständlich ist, wenn Bruchzahlen auch aus diesem Grunde Angst einflößen. Um so wichtiger erscheint es, vielerlei Erfahrungen zu ermöglichen; nur durch sie können Angst oder Abscheu abgebaut werden.

Eine wichtige spezielle Erfahrung bezieht sich auf *kleine Größen*, Größen, die möglicherweise sogar unterhalb der Schwelle unserer sinnlichen Wahrnehmungsfähigkeit liegen können. Wie dick ist ein menschliches Haar, das man ja noch sehen kann? Die etwa $\frac{7}{100}$ mm Dicke des Haupthaars und $\frac{1}{8}$ mm Dicke des Kinnbarthaars eines Mannes sind noch beträchtlich im Vergleich zum Durchmesser eines roten Blutkörperchens (etwa $\frac{75}{10000}$ mm). Viele Anregungen für die Thematik Größenordnungen findet man im

Buch von Morrison (1988).

Es sind attraktive Probleme für Schüler, selbständig etwa die Dicke einer Postkarte, eines Schreibpapierbogens oder einer Frischhaltefolie zu bestimmen (Strategie: Stapel messen!) und sich über den Wert so dünner Dinge Gedanken zu machen, wobei wir uns hier ja immer noch im Mesokosmos alltäglicher Erfahrungen befinden.

Auch winzige Zeitspannen, winzige Gewichte usw. können ein Faszinosum sein. Schließlich der einzelne Mensch selbst: Bei rund 6 Milliarden Menschen macht er rund $\frac{1}{6}$ Mrd. der Menschheit aus.

Vielleicht könnte das Kleine zur „philosophischen“ Frage führen, ob es in der Natur Dinge beliebig kleiner Größe gibt, oder ob man schließlich auf Dinge stößt, die nicht mehr teilbar sind. Rechnerisch-gedanklich gibt es keine untere Grenze, die größer als 0 ist.

Paradox (?) erscheint das Ergebnis des folgenden *Gedankenexperiments*, das aber tagtäglich in der Wirklichkeit erscheint: Ein Fahrzeug verlangsamt gleichmäßig seine Geschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit nehme genau so wie die Zeit ab. Bewegt es sich jetzt z.B. mit $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (das ist Spitzengeschwindigkeit für Menschen (Sprinter) auf

kurzen Strecken, langsam für Autos ($36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)), und in 1s nur noch mit $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, in 2s nur

noch mit $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ usw., dann kommt es nach 5s zum Stillstand kommt. Andererseits durch-

läuft es während der 5 Sekunden ab jetzt alle Grade der Geschwindigkeit (bzw. der Langsamkeit) von jetzt $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bis dann $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach $4 \frac{1}{2}, 4 \frac{3}{4}, 4 \frac{7}{8}, 4 \frac{15}{16}, \dots$ Sekunden? Nach $4 \frac{15}{16} \text{s}$ beträgt sie nur noch $= \frac{1}{16} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (in 1s $6 \frac{1}{4} \text{cm}$), das ist immer noch weitaus höher als Schneckentempo, nach $4 \frac{255}{256} \text{s}$ ist die Geschwindigkeit auf weniger als 4mm pro Sekunde abgesunken. Auf jeden Fall durchläuft die Geschwindigkeit auch die Folge $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \dots$. Und diese Halbierungsfolge strebt zwar gegen $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, aber die Folgenglieder erreichen nie genau die Stillstandsgeschwindigkeit $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Also kommt das Fahrzeug doch nicht zum Stillstand? Die Auflösung der Paradoxie besteht nun nicht in dem (richtigen) Hinweis, daß die Folge $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \dots$ gegen $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ konvergiert, vielmehr im Beachten des Tatbestandes, daß dieser Geschwindigkeitsabbau *nicht* in gleich langen Zeitspannen erfolgt, sondern in Zeitspannen, die selbst eine Halbierungsfolge bilden. Von $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ vergehen nach unserer Annahme $2 \frac{1}{2} \text{s}$, von $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ jedoch nur $1 \frac{1}{4} \text{s}$ usw., und das heißt nach der endlichen Zeitspanne $2 \frac{1}{2} \text{s} + 1 \frac{1}{4} \text{s} + \frac{5}{8} \text{s} + \frac{5}{16} \text{s} + \dots = 5 \text{s}$ ist die Geschwindigkeit auf $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gebracht (Abbildung 25a). Daß eine solche unendliche Summe aus sich fortgesetzt halbierenden Summanden einen endlichen und bestimmbaren Wert hat, kann geometrisch einsichtig gemacht werden (Abbildung 25b). Diese Erfahrung scheint verfrüht, gehört scheinbar in den Analysisunterricht. Tatsächlich handelt es sich aber um den Kernpunkt des Verständnisses von – den angeblich so einfachen – Dezimalbrüchen, nämlich unendlich periodischen Dezimalbrüchen (vgl. auch Abbildung 10).

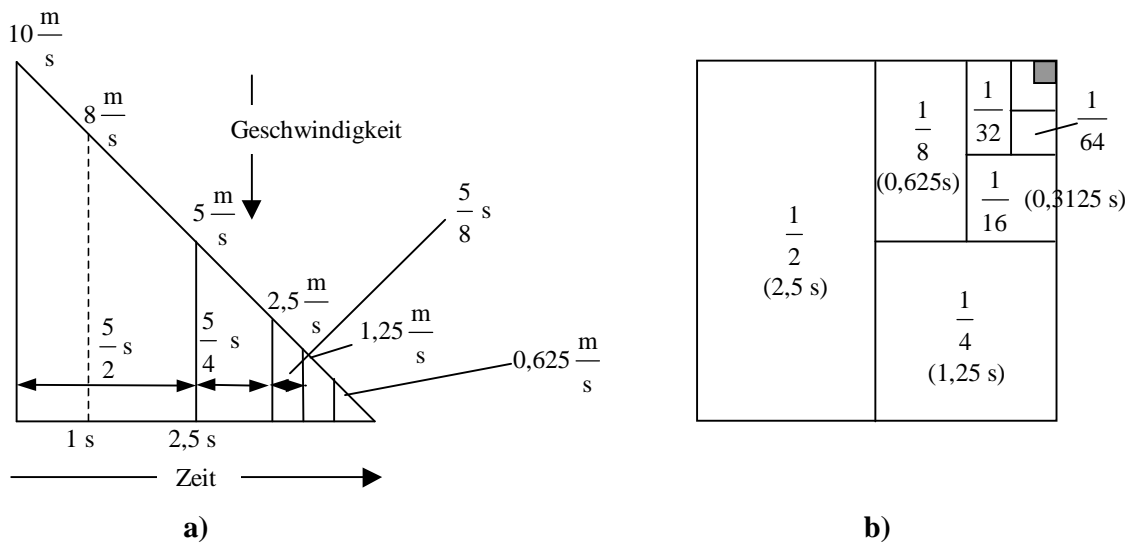


Abbildung 25: a) Gleichmäßig in der Zeit abnehmende Geschwindigkeit. b) sich halbierende Geschwindigkeiten in sich halbierenden Zeitspannen.

Ein anderes Gedankenexperiment zum verwirrenden Tatbestand, daß es nach 0 keine „erste“ (kleinste positive) Bruchzahl geben kann, besteht darin, sich vorzustellen, daß diejenigen Punkte auf der Zahlengeraden, die eine positive Bruchzahl markieren, mit einem Sensor behaftet sind. Wird ein solcher Punkt getroffen, so erzeugt diese Berührung ein akustisches Signal. Nähern wir uns mit einem dünnen Fadentaster von links der Nullmarke, so bleibt bis dahin alles still. Sobald wir aber die Nullmarke nach rechts fortschreitend verlassen, ertönt das Signal. Es *beginnt* also zu ertönen, aber wir können nicht sagen, bei welcher Bruchzahl es beginnt. Nicht bei $\frac{1}{10}$, nicht bei $\frac{1}{11}$, nicht bei

$\frac{1}{1000}$ usw., sondern immer schon vorher (Winter 1976, S. 146).

Der immense Vorteil der dichten Ordnung in der Menge der Bruchzahlen (gegenüber der der natürlichen Zahlen) besteht in dem theoretisch wie praktisch zentralen Befund: Jede Größe läßt sich – so genau wie gewünscht – mit jeder Größe derselben Art messen. Oder anders: Bruchzahlen verbessern gegenüber den natürlichen Zahlen das allgemeine Meßproblem (die reellen Zahlen vollenden es). D.h.: Zu gegebenen Größen g_1, g_2 gibt es immer Bruchzahlen $\frac{m}{n}$ derart, daß $g_1 = \frac{m}{n}g_2 + r$ ist, wobei der Rest r so klein wie gewünscht gemacht werden kann. Zwei klassische und anspruchsvolle Beispiele mögen das noch einmal deutlich machen.

(a) Wie lang ist die Diagonale eines Quadrats gemessen an der Seitenlänge s ?

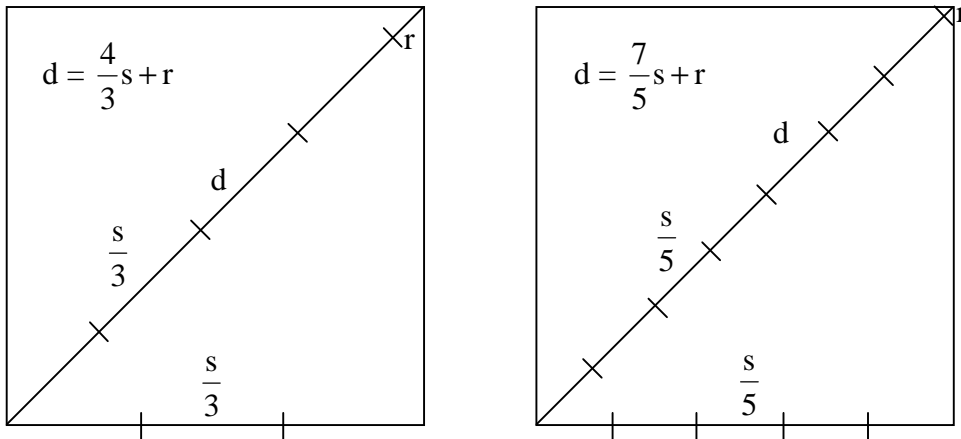


Abbildung 26: Messen der Diagonale an der Seite des Quadrates

Die allgemeine (empirische) Strategie ist: Zerlege s in $2, 3, 4, \dots, n$ Teile und trage, so oft es ganzzahlig geht, $\frac{s}{2}, \frac{s}{3}, \frac{s}{4}, \dots, \frac{s}{n}$ auf der Diagonalen ab. Für $n = 3$ und $n = 5$ zeigt

dies Abbildung 26. Im Fall $n = 12$ z.B. kann es rein empirisch strittig werden, ob $\frac{s}{12}$ sich nur 16mal oder doch schon 17mal auf der Diagonalen abtragen läßt. Ist der Taschentuchbeweis für den Sachverhalt $d^2 = 2s^2$ bekannt (Winter 1989, S. 19), so läßt sich das geometrisch-theoretisch entscheiden. $2 \cdot 12^2 = 288$, $17^2 = 289$, also geht es nur fast 17mal, wir können schreiben $d \approx \frac{17}{12} s$, eine ausgezeichnete Näherung.

Eine alternative Art der Maßbestimmung ist die schon wiederholt erwähnte *Wechselwegnahme*. Wieso es zu keinem n ein m derart gibt, daß $d = \frac{m}{n} s$ genau aufgeht, ist ein weiteres Problem für Fortgeschrittene, das aber hier bereits anklingen sollte. Es zeigt: Die Dichte der Bruchzahlen reicht für das vollständige theoretische Messen doch nicht aus.

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreises gemessen am Radiusquadrat?

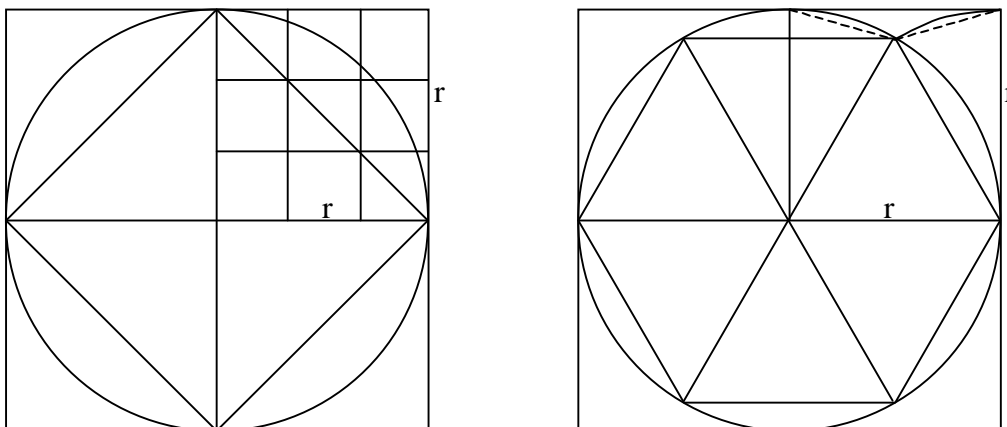


Abbildung 27: Messen der Kreisfläche an der Radiusquadratfläche

Das Radiusquadrat wird in $2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$ Teilquadrate zerlegt, dann wird nachgezählt, wie viele dieser Teilquadrate im Inneren der Kreisfläche liegen. Für $n = 3$ (Abbildung

27 links) ergibt sich Kreisfläche = $\frac{16}{9}$ Radiusquadratfläche + Restfläche. Diese Restfläche ist allerdings viel zu groß. Wenn auch die zerschnittenen Teilquadrate Beachtung finden, wird gesehen, daß die Fläche $\frac{\text{Radiusquadrat}}{9}$ bestimmt 24mal in die Kreisfläche paßt, also Kreisfläche = $\frac{24}{9}$ Radiusquadratfläche + Restfläche. Wird n vergrößert (Benutzung von mm-Papier!), so findet man auf diese empirische Weise immer bessere Meßwerte.

Andere Zerlegungen der Radiusquadratfläche sind nicht ausgeschlossen, z.B. Zerlegung in 2 flächengleiche, rechtwinklige Teildreiecke, so daß man (Abbildung 27 links) fast sofort die Fundamentalbeziehung $2r^2 < \text{Kreisfläche} < 4r^2$ ablesen kann.

Einen wesentlich raffinierteren Meßprozeß zeigt Abbildung 27 rechts. Die Kreisfläche kann man in 6 zueinander kongruente Kreissektoren zerlegen, die je aus einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge r und einem Kreisabschnitt der Sehnenlänge r bestehen (Daß sich der Radius genau 6mal auf der Kreislinie abtragen läßt, gehört zu den unverzichtbaren frühen Entdeckungen in jeder Schule.). Die Radiusquadratfläche ist etwas kleiner als 2 der Kreissektoren, weil die Restfläche (Abbildung 27 rechts) etwas kleiner ist als ein Kreisabschnitt mit Sehnenlänge r. Damit ergibt sich: Die Kreisfläche ist etwas größer als das 3-fache der Radiusquadratfläche. Das wäre für die 6. Klassenstufe ein großartiger Satz.

10 Rechnen mit Bruchzahlen – Addition und Subtraktion

10.1 Regelwerk

Sind beim Rechnen mit natürlichen Zahlen zwei Zahlen a, b in der üblichen Dezimalstellenwertschreibweise gegeben und sind die mündlichen, halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren bekannt, so gibt es prinzipiell kein Problem, wenn $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ ausgerechnet werden soll (und bei der Subtraktion $a \geq b$ und bei der Division a Vielfaches von b ist). Stets gibt es eine wohlbestimmte Zahl wieder in der vertrauten Schreibweise.

Das kann im Bereich der Bruchzahlen fortgesetzt werden, wenn sie als *Dezimalbrüche* dargestellt werden, allerdings nur eingeschränkt und nur, wenn zusätzlich die Komma-setzungsregeln geklärt sind.

Die Einschränkung bezieht sich auf den Tatbestand, daß man entweder Näherungsrechnen oder Rechnen mit unendlichen Summen dann betreiben muß, wenn die vorkommenden Dezimalbrüche periodisch sind, und das kommt sehr häufig vor. Ein gewöhnlicher (gekürzter) Bruch $\frac{m}{n}$ läßt sich ja dann und nur dann als endlicher Dezimalbruch

darstellen, wenn der Nenner n nur die Primfaktoren 2 oder 5 (oder beide) enthält. Eine interessante Problemaufgabe kann ein Gefühl dafür vermitteln, wie „normal“ es ist, daß sich ein gewöhnlicher Bruch in einen endlichen Dezimalbruch umwandeln läßt:

Schreibe alle echten, gewöhnlichen Brüche auf, deren Nenner mindestens 2 und höchstens 12 ist. Wie viele gibt es? Streiche alle diejenigen, die sich kürzen lassen. Wie viele

bleiben übrig? Streiche jetzt noch alle, die sich *nicht* in einen endlichen Dezimalbruch umwandeln lassen. Wie viele bleiben jetzt noch übrig?

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \\ \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \\ \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \\ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8} \\ \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \\ \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10} \\ \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11} \\ \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12} \end{array}$$

Es sind insgesamt 66 Brüche, davon sind 45 nicht kürzbar, und von diesen 45 Brüchen lassen sich 29 nicht in einem endlichen Dezimalbruch darstellen. Es bleiben nur 15 (gekürzte) Brüche übrig, die eine endliche Dezimalbruchentwicklung besitzen. Offenbar ist es überhaupt nicht „normal“, daß sich ein vorgelegter gekürzter Bruch als endlicher Dezimalbruch darstellen läßt.

Schon die Aufgabe $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ mit fast alltäglichen Brüchen bringt Probleme:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\dots$$

$$\frac{1}{6} = 0,1666666666\dots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0,4999999999\dots$$

Wieviel Stellen wir auch „nehmen“ – und hier kennen wir ja alle Stellen –, wir erreichen nie exakt 0,5, wie es sein sollte. Denken wir uns die periodische Schreibweise als unendliche Summe, dann haben wir das Problem der Rückübersetzung. Hier muß erkannt werden, daß $0,\overline{3} + 0,\overline{16} = 0,\overline{49}$ ein dezimaler Name für $\frac{1}{2}$ ist, ein anderer als 0,5.

Noch schwieriger wird es, wenn die Perioden länger sind, wie z.B. bei $\frac{1}{17}$, wo die Periodenlänge maximal ist, nämlich 16 beträgt ($\overline{0,0588235294117647}$), der Taschenrechner aber z.B. nur 10 Stellen liefert.

Was die Kommaregeln angeht, so ist schon die Addition/Subtraktion nicht ohne Hürden, vor allem dann, wenn Nullen auftreten bzw. nicht auftreten. Die Aufgabe

$3,02 + 0,0489$ macht es erforderlich, $3,02$ als $3,0200$ zu lesen und die Lösung von $6 - 3,002$ setzt voraus, 6 als $6,000$ sehen zu können. Viele Schüler rechnen $3,48 + 4,2 = 7,50$ und $0,70 + 0,40 + 0,20 = 0,130$ (Padberg, S. 185) offenbar nach der „Regel“, daß die Zahlen rechts vom Komma genauso addiert werden wie die Zahlen links vom Komma, eine „Regel“, die erstens Teilerfolge garantiert ($3,15 + 1,16 = 4,31$) und zweitens durch die Grundschulerfahrung (Komma trennt Sorten, links z.B. die kg, rechts die g) „begründet“ ist.

Das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen wird nun dadurch grundsätzlich komplexer, als bei jeder Operation von zwei Bruchzahlen zwei Paare von natürlichen Zahlen auf je spezifische Weise zu betrachten sind. Bei sogenannten gemischten Zahlen ist es noch deutlich komplizierter.

Die Addition und Subtraktion gemischter Zahlen besteht aus einer Reihe von Prozeduren, die z.T. keine Parallele zur Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen haben, wenn auch der Begriff der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen als ein „Zusammensetzen“ bzw. „Abtrennen“ von Größen wie bisher verstanden werden kann. Bei starker Regelorientierung kann die Addition/Subtraktion gemischter Zahlen etwa so aussehen:

Addition

$$34\frac{2}{3} + 13\frac{5}{11}$$

- (1) Addiere die ganzen Zahlen.

$$34 + 13 = 47$$

- (2) Addiere die Brüche

- (2a) Bestimme den Hauptnenner der beiden Brüche.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 11 ist 33.

- (2b) Erweitere beide Brüche, so daß sie beide den selben Nenner, den Hauptnenner, haben.

$$\frac{2}{3} = \frac{22}{33} \quad \frac{5}{11} = \frac{15}{33}$$

- (2c) Addiere die beiden gleichnamigen Brüche, indem du ihre Zähler addierst und den Hauptnenner unverändert läßt.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{11} = \frac{22+15}{33} = \frac{37}{33}$$

- (2d) Schreibe das Ergebnis, falls möglich, als gemischte Zahl

$$\frac{37}{33} = 1\frac{4}{33}$$

- (2e) Kürze, wenn möglich.

- (3) Addiere die Ergebnisse von (1) und (2).

$$47 + 1\frac{4}{33} = 48\frac{4}{33}$$

Subtraktion

$$34\frac{2}{3} - 13\frac{5}{11}$$

- (1) Subtrahiere die ganzen Zahlen voneinander.

$$34 - 13 = 21$$

- (2) Subtrahiere die Brüche voneinander

- (2a) Bestimme den Hauptnenner der beiden Brüche

Das kgV von 3 und 11 ist 33.

- (2b) Erweitere beide Brüche, so daß sie beide den selben Nenner, den Hauptnenner, haben.

$$\frac{2}{3} = \frac{22}{33} \quad \frac{5}{11} = \frac{15}{33}$$

- (2c) Subtrahiere die beiden gleichnamigen Brüche voneinander, indem du ihre Zähler voneinander subtrahierst und den Nenner unverändert läßt.

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{11} = \frac{22-15}{33} = \frac{7}{33}$$

- (2d) Falls das Ergebnis negativ würde (die Subtraktion nicht ausführbar ist), dann verwandele 1 Ganzes der 1. Zahl in einen Bruch mit dem Hauptnenner als Nenner.

- (2e) Kürze, wenn möglich.

- (3) Addiere die Ergebnisse von (1) und (2).

$$21 + \frac{7}{33} = 21\frac{7}{33}$$

Das sind nicht nur langwierige Prozeduren, sie sind auch z.T. von völlig anderer Qualität als die zum Addieren/Subtrahieren natürlicher Zahlen. Während man dort sofort – ohne Rücksicht auf die Größe der Zahlen – loslegen kann, muß hier in (1) die Gestalt der Operanden wahrgenommen und gedeutet werden, nämlich als Summen: $34\frac{2}{3} = 34 + \frac{2}{3}$ und $13\frac{5}{11} = 13 + \frac{5}{11}$. Das ist die Basis für die Strategie der gesonderten Behandlung der Ganzen und echten Brüche.

$$34\frac{2}{3} + 13\frac{5}{11} = \left(34 + \frac{2}{3}\right) + \left(13 + \frac{5}{11}\right) = (34 + 13) + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{11}\right)$$

$$34\frac{2}{3} - 13\frac{5}{11} = \left(34 + \frac{2}{3}\right) - \left(13 + \frac{5}{11}\right) = (34 - 13) + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{11}\right)$$

Diese Umformungen beziehen ihre Berechtigung aus arithmetischen Gesetzen (Kommutativität, Assoziativität), die – meist stillschweigend – für alles Zahlenrechnen als gültig angenommen werden.

Bei der Subtraktion geht speziell das Gesetz $a - (b + c) = (a - b) - c$ ein, worüber zwar viele Erfahrungen mit natürlichen Zahlen vorliegen mögen (bereits in der 1. Klassenstufe: $13 - 6 = 13 - 3 - 3$), das aber hier in spezifischer Form benutzt werden muß.

Man sieht in (1) bereits, daß die wesentlichen Schwierigkeiten nicht im Rechnen selbst (als Manipulation mit Ziffern) stecken, sondern im Erkennen der algebraischen Formen. Klar ist deshalb, daß schon Schritt (1) zu Fehlern führen kann.

Die Strategie der Trennung (Ganze, echte Brüche) ist natürlich nicht zwingend. Die Alternativ-Strategie (1'), zunächst die gemischten Zahlen in (unechte) Brüche zu verwandeln,

$$34\frac{2}{3} + 13\frac{5}{11} = \frac{104}{3} + \frac{148}{11} \qquad 34\frac{2}{3} - 13\frac{5}{11} = \frac{104}{3} - \frac{148}{11}$$

setzt auch voraus, in gemischten Zahlen Summen zu sehen, führt aber dann auf algebraisch einfachere, jedoch numerisch aufwendigere Form (große Zähler). Bei der Subtraktion umgeht man nach Strategie (1') die Fallunterscheidung des Größenvergleichs der beiden echten Brüche in den gemischten Zahlen. In $34\frac{5}{11} - 13\frac{2}{3}$ müßte ja wegen

$\frac{5}{11} < \frac{2}{3}$ „geliehen“ werden ($34\frac{5}{11} = 33\frac{16}{11}$), um Strategie (1) durchziehen zu können.

Mindestens zur Kontrolle bietet sich Strategie (1') an.

Die Schritte in (2), die wiederum nur teilweise algorithmisch sind, arbeiten das Unterprogramm „Addieren/Subtrahieren ungleichnamiger Brüche“ ab. Allein (2a) (Hauptnennerbestimmung) zerfällt – systematisch gesehen – in mehrere Teilbereiche, etwa: Beide Nenner in Primfaktoren kanonisch zerlegen, Faktoren des kgV bestimmen, kgV ausrechnen. Bei großen Nennern kann sich diese Teilaufgabe (2a) zum Hauptproblem aufblähen, weshalb man sich normalerweise in der Schule auf Nennerpaare beschränkt, deren kgV ohne größeren Rechenaufwand bestimmbar ist. Das aber bedeutet, daß ein nicht-algorithmisches Element zugelassen wird. Der Schüler sollte im obigen Beispiel „sehen“, daß Drittel und Elftel zugleich in Dreiunddreißigstel verwandelt werden können und daß Dreiunddreißigstel sogar die größtmöglichen gemeinsamen Bruchteile sind. Dabei kann er sich (geschickterweise) auf den Bruch mit dem größten Nenner (11)

stützen, also die Serie $\frac{5}{11} = \frac{10}{22} = \frac{15}{33}$ bilden, bis ein Nenner erscheint, der den anderen

Nenner (3) enthält. Dieses eher intuitive Vorgehen kann zum algorithmischen Verfahren ausgebaut werden: Bilde das Produkt der beiden Nenner, das ergibt auf jeden Fall einen gemeinsamen Nenner. Damit kann das Gleichnamigmachen (Schritt 2b) letztlich blind erfolgen und Schritt 2a wird sogar überflüssig. Der Preis für diese „Erleichterung“ ist

jedoch, daß unnötig große Zähler und Nenner auftreten können. Auf $\frac{6}{37}$ und $\frac{25}{111}$ ange-

wandt ergibt sich $\frac{6}{37} = \frac{666}{4107}$ und $\frac{25}{111} = \frac{925}{4107}$, dabei ist der kleinste gemeinsame Nen-

ner, der Hauptnenner, 111. $\frac{6}{37} = \frac{18}{111}$, was jemand „sieht“, der 37 mit 111 multiplikativ

vergleicht. Um das Gleichnamigmachen einerseits zu algorithmisieren und andererseits

gleichzeitig am Hauptnennerkonzept festzuhalten, wird in der Schulpraxis oft nach dem Verwandtschaftsgrad der Nenner in gestufter Form entwickelt: (1) beide Nenner sind klein, man „sieht“ den Hauptnenner, (2) ein Nenner ist Teiler des anderen, (3) beide Nenner haben einen gemeinsamen Teiler (größer 1), (4) die Nenner sind zueinander teilerfremd, (5) die Nenner sind beliebig. Aufgaben der Stufe (5) bedürfen dann der Abfrage: Ist ein Nenner Teiler des anderen? Haben beide Nenner einen gemeinsamen Teiler: Sieht man mit einem Blick den Hauptnenner?

Die entscheidende Frage ist, wie solche Unterscheidungen erfahren werden. Die hier vertretene These ist: Wenn ein Lehrgang der Addition/Subtraktion von Bruchzahlen wie überhaupt die ganze Bruchrechnung verfahrensdominant und schwierigkeitsgradig gestuft entwickelt wird, etwa

Addition/Subtraktion gleichnamiger Brüche
 Addition/Subtraktion gemischter Zahlen mit gleichnamigen Brüchen
 Addition/Subtraktion ungleichnamiger Brüche
 kleine, überschaubare Nenner
 ein Nenner ist Teiler des anderen
 Nenner mit gemeinsamem Teiler
 teilerfremde Nenner
 beliebige Nenner

Addition/Subtraktion gemischter Zahlen mit ungleichnamigen Brüchen

dann erhält die *Syntax* der Bruchrechnung ein Übergewicht, das auf Kosten des Verständnisses gehen muß. Um die Verfahrensregeln verwendbar zu machen und zu erhalten, müssen sie nämlich beständig wiederholt und in langen Übungssequenzen „eingeschliffen“ werden. Angesichts einer Aufgabenstellung wird die Aufmerksamkeit darauf fokussiert, welche Verfahrensregel hier anzuwenden ist. Bei vielen ähnlich klingenden Regeln kommt es geradezu zwangsläufig zu Verwechslungen und/oder Fehldeutungen. Es besteht die Gefahr, daß der inhaltlich-begriffliche Aspekt (die *Semantik* der Bruchrechnung) nicht hinreichend zur Geltung kommt, im Extrem bleiben Sinnstiftung und Verständnis auf der Strecke.

Die Alternative zu verfahrenorientierten und schwierigkeitsgradig (vom Lehrer) gestuften Lehrgängen sind problemorientierte Lehrgänge, in denen die Schüler möglichst selbst die Schwierigkeitsstufen erkennen und darauf hin *fortschreitend* ihre Lösungswege *schematisieren* (Treffers 1983). Da beginnt das Addieren/Subtrahieren nicht mit

Aufgaben der Art $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ und $\frac{3}{8} - \frac{1}{8}$, sondern mit dem Angebot von Problemsituationen,

die Gelegenheit bieten, das Addieren/Subtrahieren von Bruchzahlen nachzuerfinden, seine Sinnhaftigkeit zu sehen und die Prozeduren selbst zu entwickeln.

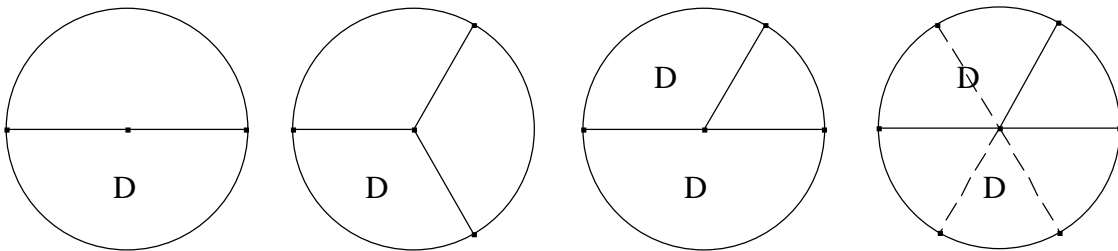
Ein wichtiger Typ von additiven Situationen ist dadurch gekennzeichnet, daß *mehrere* (voneinander unabhängige und überschneidungsfreie) *Teilungsprozesse* realisiert werden.

10.2 Kumulative Pizzateilungen

Der einfachste nicht-triviale aber ausbaufähige Fall in der Pizza-Welt liegt vor, wenn zunächst 1 Pizza an 2 Personen und dann noch 1 Pizza an 3 Personen verteilt werden. Eine Initialaufgabe kann lauten: Daniel hat heute zweimal Pizza gegessen, zuerst hat er sich 1 Pizza mit seinem Bruder geteilt und danach 1 Pizza mit seinen beiden Freunden. Naheliegend sind dann die Fragen nach Summe und Differenz der beiden Pizza-Mahlzeiten (z.B. auch im Hinblick auf die Kosten). Wieviel Pizza hat Daniel insgesamt verzehrt?

Abbildung 28: Zur Lösung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Daß die beiden Bruchteile zusammengefügt werden, ist *problemlos*. Eine neue Sinngebung der Addition ist im Gegensatz zur Multiplikation und Division nicht erforderlich, wenn Bruchteile als Größen betrachtet werden. Ein Problem aber ist es, die zusammen-



gefügte Größe zu beschreiben. Ohne jedes Rechnen kann gefunden werden, daß die beiden Pizzateile zusammen auf jeden Fall kleiner als 1 und größer als $\frac{2}{3}$ (Pizza), sogar größer als $\frac{3}{4}$ sind, weil... (Abbildung 28).

$$\text{Also: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{3}{4}$$

Das ist schon einmal ein wichtiges selbstgefundenes Ergebnis. Man möchte es aber genau wissen. Zu entdecken wäre da die Nützlichkeit der Tatsache, daß jede Bruchzahl auf unendlich viele Arten dargestellt werden kann, oder – kontextverhaftet – daß Daniel auf unendlich verschiedene Teilungsarten zu $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ Pizza gelangen kann:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = K \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = K$$

so daß die Lösungen aufgeschrieben werden können

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

oder

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{2}{12}$$

oder...

Wichtig ist, daß diese Prozedur als *Gedankenexperiment* verstanden wird: Tatsächlich werden die Pizzen ja nicht in Sechstel geteilt. Aber wir können sie uns geteilt *denken* (und das auch zeichnen), um das Ergebnis ausdrücken zu können.

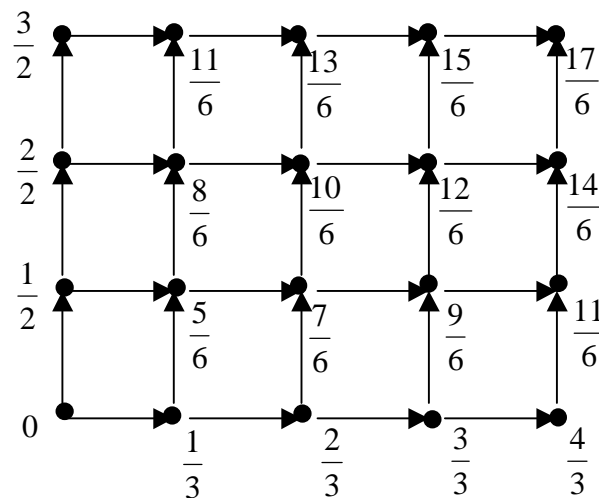
Natürlich muß der Lösungsvorgang nicht genau so verlaufen. Es kann z.B. gesehen werden, daß von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ bis 1 gerade $\frac{1}{2}$ Drittel = $\frac{1}{6}$ fehlt, so daß ohne jede weitere

Rechnung sofort $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ geschrieben werden kann.

Nachdenken über das Ergebnis ($\frac{5}{6}$) führt zu dem Schluß: Werden 5 Pizzen an 6 Personen (gleich)verteilt, so erhält jeder $\frac{1}{2}$ und noch $\frac{1}{3}$ Pizza, was natürlich auch im Bild festgehalten werden sollte.

Ein weiterer Lösungsweg und gleichzeitig eine weitere Motivation zur Addition ergibt sich, wenn die Kosten ins Spiel gebracht werden: Was muß Daniel insgesamt bezahlen, wenn jede Pizza 7,50 DM kostet?

Varianten der Aufgabe drängen sich auf: Variation der Anzahl Pizzen, der Anzahl Personen, der Anzahl Pizzen und Personen. Daß sich je 2 und dann noch je drei Personen eine Pizza teilen, kann sich ja gleichzeitig an verschiedenen Tischen der Pizzeria oder nacheinander an verschiedenen Tagen ereignen. Dies systematisch durchzuspielen, kann zu einer *produktiven Übung* führen, die sich in folgender Additionstafel niederschlägt:



Das ist produktiv, weil in der Rhythmik erfahren wird, wie Halbe, Drittel und Sechstel generell additiv zusammenhängen (also die Form $\frac{m}{3} + \frac{n}{2} = \frac{2m+3n}{6}$ zu erfahren ist),

weitere Entdeckungen möglich sind (z.B. Gleichheiten wie $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$ oder daß

alle Sechstel irgendwo vorkommen, nur nicht $\frac{1}{6}$) und Umdeuten (Redefinieren) geübt

werden kann (z.B.: Wie kann man $\frac{31}{6}$ aus Dritteln und Halben zusammensetzen?).

Eine anspruchsvollere Initialaufgabe aus der Pizza-Welt ist:

Daniel ist mit 6 Freunden in einer Pizzeria zusammen, sie teilen sich 5 Pizzen. Zu Hause gibt es noch einmal Pizza, da teilt er sich mit seinen beiden Schwestern 2 Pizzen.

Wieviel Pizza vertilgte Daniel? Hat er in der Pizzeria mehr als zu Hause gegessen?
Wenn ja, wieviel mehr?

Die Lösungen können auf unterschiedliche Art praktisch-anschaulich gefunden werden. Zwei Lösungen sind in Abbildung 29 dargestellt.

a) In der Pizzeria Zu Hause
5 Pizzen, 7 Personen (D, 1, 2, 3, 4, 5, 6) 2 Pizzen, 3 Personen (D, I, II)

1. $\frac{5}{7} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{21} = \frac{28}{21} + \frac{1}{21} = \frac{29}{21} = 1 \frac{8}{21}$

2. $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{1}{21}$

b) In der Pizzeria Zu Hause
5 Pizzen, 7 Personen (D, 1, 2, 3, 4, 5, 6) 2 Pizzen, 3 Personen (D, I, II)

1. $\frac{5}{7} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{21} = \frac{9}{7} + \frac{2}{21} = \frac{27}{21} + \frac{2}{21} = \frac{29}{21} = 1 \frac{8}{21}$

2. $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{5}{7} - \frac{4}{7} - \frac{2}{21} = \frac{1}{7} - \frac{2}{21} = \frac{3}{21} - \frac{2}{21} = \frac{1}{21}$

Abbildung 29: 2 Lösungswege zu $\frac{5}{7} \pm \frac{2}{3}$ in der Pizza-Welt

Solche „unorthodoxen“ aber autonomen Lösungen stellen intensive Auseinandersetzungen inhaltlicher Art dar, können als Kontrollen nützlich sein und – nicht zuletzt – motivieren überhaupt erst die Suche nach einem ökonomischen und leicht zu merkenden Standardweg.

Das sog. „gerechte“ Teilen (Gleichverteilung), das hier immer ausgeübt wurde, ist durchaus diskussionswert und -bedürftig. Zwei Personen können sich, vielleicht sogar einvernehmlich, auf sehr verschiedene ungleiche Arten 3 Pizzen (oder 3 teilbare Größen irgendwelcher Art) teilen. Es ist eine ausgesprochen kreative Übung zur Addition/Subtraktion, wenn Schüler selbst viele Beispiele finden und diskutieren. Das Besondere der Gleichverteilung wird dabei viel deutlicher (Anhang).

Noch eine Bemerkung zur angeblichen Lebensferne solcher Aufgaben („Wer addiert je gesiebelte Pizzen mit gefünftelten?“ Führer 1999): Zunächst ist nicht bestreitbar, daß es in der Wirklichkeit kumulative Teilungen der geschilderten Art gibt, nicht nur Pizzen an Personen, sondern irgendwelche prinzipiell teilbaren Dinge gleicher Größe und Qualität (Torten, Brote, Tafeln Schokolade, Äpfel, Kürbisse,..., aber auch Geldbeträge, Gewichte, Zeitspannen usw.) an diskrete Instanzen. Daß es sich um austauschbare gleiche

Dinge handeln und daß ideal gerecht geteilt werden soll, ist Bestandteil des normativen mathematischen Modells, das wie immer einfach und von hoher Symmetrie sein soll. Das mathematische Modell ist dabei zugleich reicher und ärmer als die zu modellierende Situation: Einerseits sind Teilungsprozesse mit beliebig vielen teilbaren Dingen an beliebig viele Empfangende mit exakten Ergebnissen bestimmbar, andererseits werden Umstände der Wirklichkeit ausgeblendet, z.B. die tatsächlich vorhandenen Unterschiede zwischen den Dingen und die reale Variabilität einer Situation (es wird in der Praxis nicht vorkommen, daß sich 27315 Personen 2 Pizzen teilen wollen; andererseits ist das biblische Wunder von der wunderbaren Brotvermehrung außerordentlich beeindruckend). Anders formuliert: Gesiebentelte und gefünftelte Pizzen zusammenzufügen, ist genau so sinnvoll und sinnlos wie die Addition der Sommerferientage und der Herbstferientage. Ohne begründenden Kontext handelt es sich um sinnleere Rechenaufgaben, aber in Kontexten, die ernst genommen werden, kann die Aufgabenstellung belegbaren Sinn erhalten.

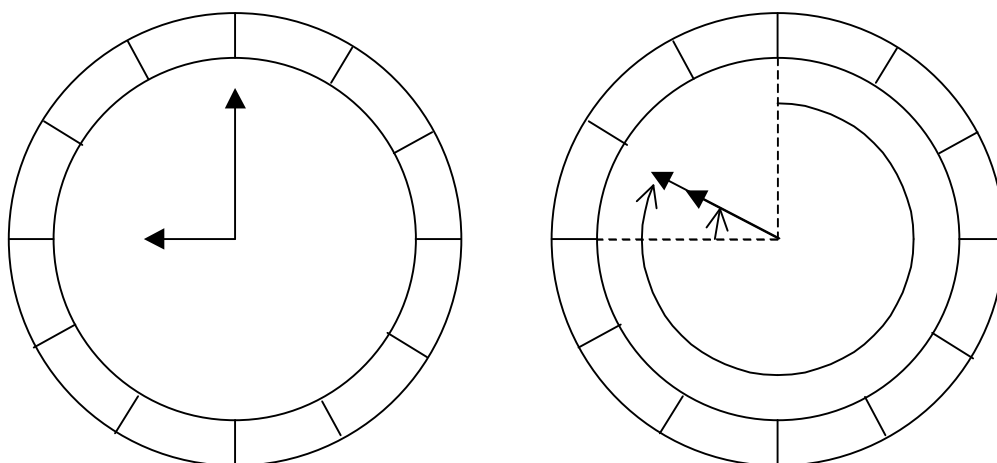
Was Pizzen recht ist, ist anderen teilbaren Größen billig, und man darf nicht die Gelegenheit versäumen, bekannte Größen mit bekannten Unterteilungen nunmehr unter dem Bruchzahlbegriff neu zu deuten.

10.3 Die Uhr

Eine immer wieder reizvolle, wohlbekannte Problemaufgabe ist die *Uhr-Zeiger-Aufgabe*, in der es um *Zeitgrößen* geht:

Es ist jetzt 9 Uhr. Um wieviel Uhr deckt sich der große Zeiger zum ersten Mal mit dem kleinen Zeiger (bzw. zeigen beide Zeiger in dieselbe Richtung bzw. hat der große Zeiger den kleinen eingeholt)?

Die Antwort kann experimentell an einer Zeigeruhr gefunden werden (9.49 Uhr angenähert!), was der Aufgabe überhaupt nicht ihren Reiz zu nehmen braucht, im Gegenteil, es ist die Frage motiviert: kann man das auch ausrechnen (ausdenken), was man sieht (Abbildung 30)? Zunächst kann die fragliche Uhrzeit eingegrenzt werden: Es muß zwischen 9.45 Uhr und 10 Uhr sein, denn... Es muß sogar vor 9.50 Uhr sein, denn um 9.50



Uhr steht der große Zeiger auf 10, der kleine aber noch vor der 10. Es muß ... usw.

Abbildung 30: Das Uhr-Zeiger-Problem

Ist es vielleicht um genau 9.49 Uhr, also in 49 Minuten? Um das zu entscheiden, kann das Augenmerk auf die Wege und Geschwindigkeiten der Zeiger gerichtet werden. In

dieser Zeit von 49 Minuten hätte der schnelle große Zeiger den Vorsprung des kleinen Zeigers, nämlich $\frac{3}{4}$ des Uhrkreises, wettgemacht und noch den Anteil des Uhrkreises, den der kleine langsame Zeiger in 49 Minuten zurücklegt. Der große Zeiger legt in jeder Minute $\frac{1}{60}$ des Uhrkreises (1 Minute = $\frac{1}{60}$ Stunde), der kleine aber nur $\frac{1}{720}$ des Uhrkreises (1 Minute = $\frac{1}{60}$ Stunde = $\frac{1}{720}$ Halbtage) zurück. (Es treten auf fast natürliche

Weise Brüche auf.) Nach 49 Minuten hat der große Zeiger $\frac{49}{60}$ des Uhrkreises, der kleine $\frac{49}{720}$ des Uhrkreises zurückgelegt. Es müßte dann $\frac{49}{720} + \frac{3}{4}$ derselbe Uhrkreisbruchteil sein wie $\frac{49}{60}$. Um das entscheiden zu können, werden die Brüche gleichnamig gemacht und es ergibt sich einerseits $\frac{49}{720} + \frac{3}{4} = \frac{49}{720} + \frac{540}{720} = \frac{589}{720}$, andererseits $\frac{49}{60} = \frac{588}{720}$,

ein kleiner (unsichtbarer?) Unterschied. Zur effektiven Berechnung kann, was anzustreben wäre, algebraisch argumentiert werden. Die Überholung erfolgt in x Minuten, dann muß $\frac{x}{60} = \frac{3}{4} + \frac{x}{720}$ gelten, was auf

$$\frac{12x}{720} - \frac{x}{720} = \frac{540}{720}, \text{ dann auf } 11x = 540, x = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11} \text{ führt.}$$

Freilich geht es auch gänzlich ohne diese Art Algebra, wenn das Augenmerk auf den gleichmäßig schrumpfenden Abstand (gemessen in Bruchteilen des Uhrkreises) gerichtet wird. Anfangs (nämlich um 9 Uhr) beträgt er $\frac{3}{4}$ des Uhrkreises, in jeder Minute

wird er $\frac{1}{60} - \frac{1}{720} = \frac{11}{720}$ des Uhrkreises geringer. Also dauert es so viele Minuten, wie $\frac{11}{720}$ in $\frac{3}{4} = \frac{590}{720}$ enthalten ist, und das ist genau so oft, wie 11 in 540 enthalten ist.

Eine weitere Lösungswegvariante, die besonders gut das Auftreten der 11 erklärt, ergibt sich, wenn man den speziellen Fall verallgemeinert und fragt: Wie viele Überholungen gibt es überhaupt im Laufe von 12 Stunden? Geht man von 0 Uhr aus, so gibt es binnen der nächsten 12 Stunden genau 11 Überholungen, die sich in gleichen Zeitspannen aneinanderreihen. Dadurch wird der Uhrkreis in 11 gleich große Teile geteilt, man erhält Elftel. Die Überholungszeitpunkte nach 0 Uhr sind demnach: $1\frac{1}{11}$ Uhr, $2\frac{2}{11}$ Uhr, $3\frac{3}{11}$ Uhr, $4\frac{4}{11}$ Uhr, $5\frac{5}{11}$ Uhr, $6\frac{6}{11}$ Uhr, $7\frac{7}{11}$ Uhr, $8\frac{8}{11}$ Uhr, $9\frac{9}{11}$ Uhr, $10\frac{10}{11}$ Uhr, 0 Uhr (und $9\frac{9}{11}$ Uhr ist ja $9.49\frac{1}{11}$ Uhr, das Ergebnis unserer Aufgabe).

Natürlich sollen Erfahrungen zu Bruchzahlen im alltäglichen Kontext von Zeigeruhren auch schon auf früherer Stufe kultiviert werden. Die alltäglichen Zeitmaße (Tag, Stunde, Minute, Sekunde) können hier erstens in geometrischer Repräsentation (Kreissektoren, Kreisbögen, Winkel) wahrgenommen werden und systematischer in ihrem Zusammenhang verglichen werden, z.B. $1\text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min} = \frac{1}{3600} \text{ h} = \frac{1}{86400} \text{ d}$.

Der „Umweg“ über kleinere Einheiten (und damit in vertraute Gefilde)

$$\text{(Addieren)} \quad \frac{1}{3}h + \frac{2}{5}h = 20 \text{ min} + 24 \text{ min} = 44 \text{ min} = \frac{44}{60}h = \frac{11}{15}h$$

$$\text{(Subtrahieren)} \quad \frac{5}{6}h - \frac{1}{5}h = 50 \text{ min} - 12 \text{ min} = 38 \text{ min} = \frac{38}{60}h = \frac{19}{30}h$$

$$\text{(Vervielfachen)} \quad \frac{2}{3} \text{ von } \frac{3}{10}h = \frac{2}{3} \text{ von } 18 \text{ min} = 12 \text{ min} = \frac{12}{60}h = \frac{6}{30}h = \frac{1}{5}h$$

$$\text{(Aufteilen, Messen)} \quad \frac{2}{3}h : \frac{1}{4}h = 40 \text{ min} : 15 \text{ min} = 2\frac{2}{3}$$

kann helfen, die Festlegungen der additiven Rechenarten mit Bruchzahlen zu finden und zu begründen.

Nicht übergehen sollte man hier auch das Bewußtmachen der Vorteile der Zahl 60, die nicht weniger als 12 Teiler hat (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60), weshalb sich z.B. viele Bruchteile einer Stunde in vollen Minuten ausdrücken läßt. Das allseitige Rechnen mit Sechzigsteln kann also zu einem verständigen Bruchrechnen (ohne Dominanz von Verfahrensregeln) entwickelt werden. (Ein historischer Exkurs auf das Sexagesimalsystem der Babylonier und sein Nachklang in unseren Zeit- und Winkelmaßen sollte nicht unterbleiben.) Dennoch muß auch deutlich werden: Die üblichen Maßunterteilungen von Zeitspannen beschreiben nur eine winzige Auswahl von allen möglichen Zeitspannen genau und der quasi-kardinal Umgang mit Sekunden, Minuten usw. kann sogar das Verständnis des Bruchrechnens verstellen. Es gibt eben auch $\frac{3}{11}h$, $\frac{9}{17} \text{ min}$ usw., und

damit läßt sich dann ohne Bezug auf Untereinheiten rechnen, das ist eben der theoretische Charakter der Bruchrechnung, der die allzu alltäglichen Erfahrungen übersteigt, jedoch an anderer Stelle wieder von hohem praktischem Wert ist. Die Uhr-Zeiger-Aufgabe gibt auch die Gelegenheit, über Winkel und Drehungen zu reden, eine obligate Thematik.

10.4 Der Hebel

Wieder andere (und vorwärts gewandte) Erfahrungen zur Addition/Subtraktion sind in der *Hebelwelt* möglich, falls grundlegende Einsichten zum Hebelgesetz vorliegen, die mit ganzzahligen Hebelarmlängen und Gewichten bereits in der Grundschule zugänglich sind.

Eine Problem-Aufgabe wird durch Abbildung 31 gestellt: Wo muß auf der linken Seite das Gewicht 1 (z.B. 1 kg) aufgehängt werden, damit Gleichgewicht herrscht?

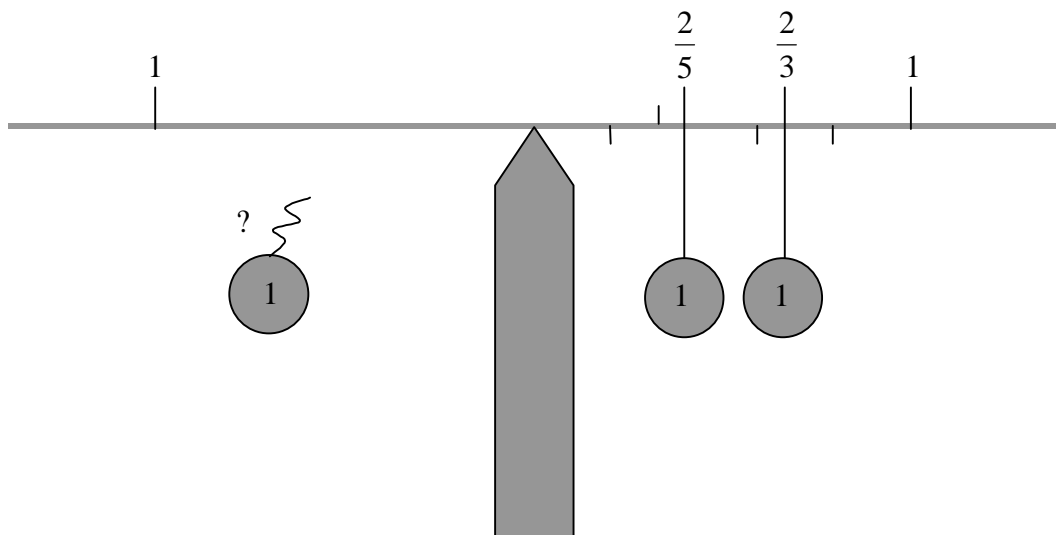


Abbildung 31: Addition von Bruchzahlen als Hebelaufgabe

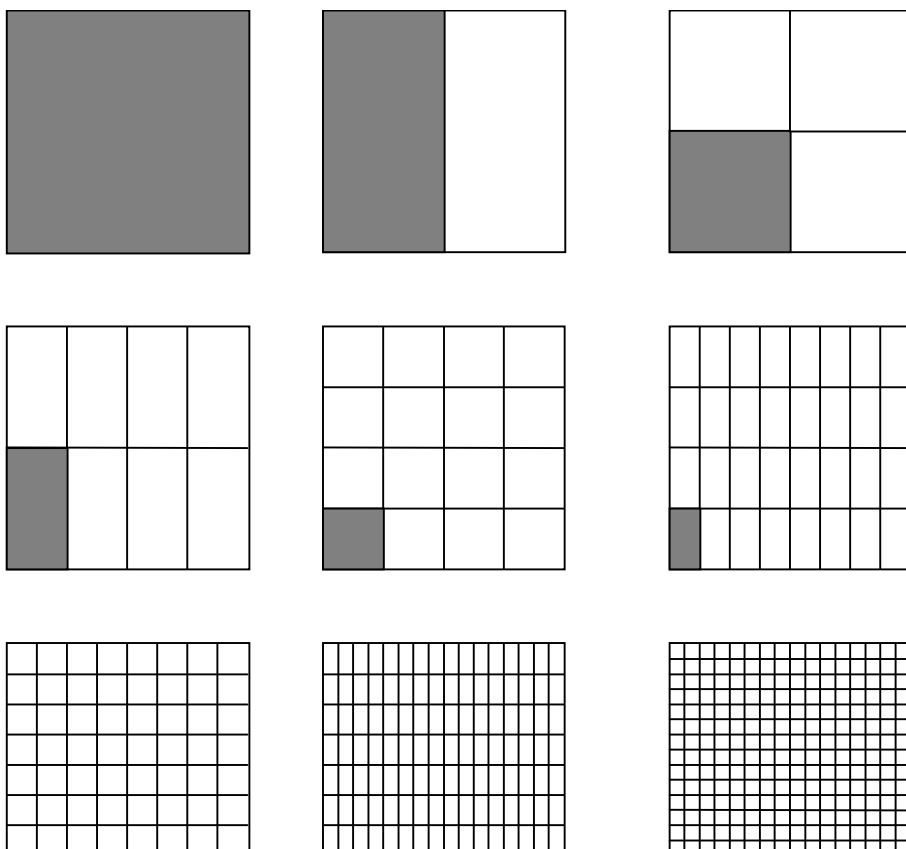
Rechts wirken die Teilkräfte (Momente) $\frac{2}{5} \cdot \text{↘}$ und $\frac{2}{3} \cdot \text{↘}$ zusammen und bewirken eine Drehung. Soll Gleichgewicht herrschen, muß auf der linken Seite dieselbe Kraft ziehen. Da muß bei Gewicht ↘ der linke Arm so lang sein, wie die beiden Hebelarme rechts zusammen. Das kann man geometrisch (durch Abtragen) und – damit zu verbinden – rechnerisch besorgen. Die rechnerische Lösung erfordert wieder eine Zerlegung der Hebelarme in gleich lange – und aus ökonomischen Gründen möglichst große – Teilstücke. Wieder wird deutlich: Erweitern betrifft nur die Form, nicht den Wert (hier die Länge).

Die Hebelwelt ist nicht etwa nur eine weitere und vielleicht austauschbare Veranschaulichung, sondern ein weiteres und noch weit ausbaubares, wichtiges Anwendungsgebiet. Eine hier naheliegende Fragestellung ist die Umkehrung der obigen Aufgabe: Auf der einen Seite hängt bei $\frac{5}{13}$ das Gewicht ↘ , auf der anderen Hebelseite sollen zwei Gewichte ↘ hängen, so daß Gleichgewicht herrscht. Wie kann das gehen? Läßt man noch beliebige gebrochene Gewichte zu, so kommt man zu Aufgaben der Multiplikation und Division von Bruchzahlen. Besonders eindrucksvoll ist es, Hebelaufgaben an wirklichen Hebelwagen (also enaktiv) zu verfolgen. Wir haben dann so etwas wie Bruchrechnung zum „Anfassen“, wenn auch – wie immer – das Wichtigste im Kopf geschehen muß. Die heuristische Bedeutung des Hebelgesetzes für mathematische Fragestellungen ist (seit Archimedes) bekannt (Winter 1978), wird aber leider im MU selten genutzt.

10.5 Quadratunterteilungen

Problemorientiertes Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen kann in besonders attraktiver Form in der *Welt der Quadratunterteilungen* ausgeübt werden.

Geht man vom sukzessiven (Halbierungs)Falten aus, so ergeben sich Halbe, Viertel, Achtel,... als Bruchteile der Einheitsquadratfläche (Abbildung 32), und man kann

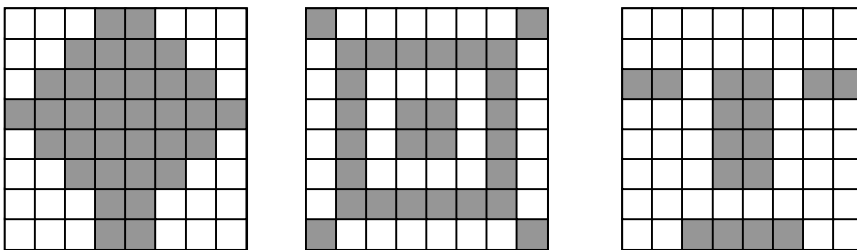


Bruchrechnung (erweitern, kürzen, addieren,...), eingeschränkt auf diese Familien, üben. Wegen des sehr zugänglichen Charakters dieser Erfahrungswelt (Papierquadrate falten!) sollte man darauf keineswegs verzichten.

Abbildung 32: Faltbrüche am Quadrat

Die Schüler werden aufgefordert, sich selbst möglichst originelle, ausgefallene Aufgaben zu stellen und bildlich darzustellen. Beispiele:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = ?$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} = ?$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \frac{8}{256} = ?$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{256} = ?$
- $\frac{1}{2} : \frac{1}{256} = ?$
- $\frac{5}{8} \pm \frac{17}{256} = ?$ usw.



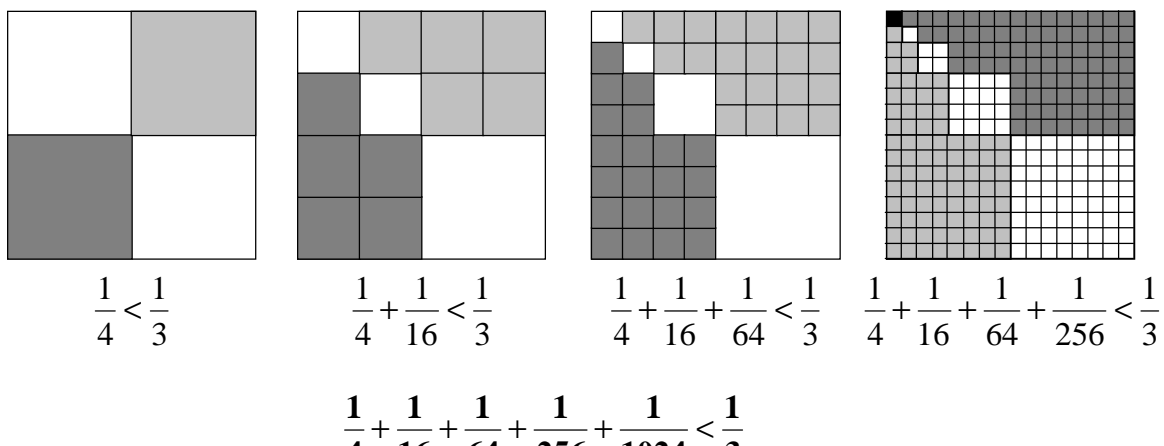
Umgekehrt können Bilder entworfen werden, die arithmetisch auszudeuten sind: Anteil der gefärbten Fläche bestimmen (Abbildung 33).

Abbildung 33: Baum, Tischdecke, Monster im Quadrat

Ein echtes *Problem* ist die Frage: Wie kann man in dieser Welt der „Faltbrüche“ am Quadrat auf Drittel, Fünftel, Sechstel, Siebtel,... kommen?

Zunächst sollte als *negative Erkenntnis* klar werden: Es geht exakt gar nicht. Um das einzusehen, bedarf es wiederum einer zahlentheoretischen Überlegung: Durch fortgesetztes Halbieren bekommen wir nur Brüche mit den Nennern 2, 4, 8, 16,... (*nur* Zweierpotenzen). Offenbar ist keine dieser unendlich vielen Zahlen durch 3, 5, 6,... teilbar. Aber woher wissen wir das eigentlich? Könnte nicht z.B. 2048 durch 7 teilbar sein? Wir sind an einer Stelle, an der die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zum Problem wird oder werden kann. Gott sei Dank gibt es Möglichkeiten, sich von der Richtigkeit zu überzeugen und zwar Möglichkeiten zwischen reiner Empirie und allgemeinem Beweis (Winter 1999a, S. 89). Jedenfalls ist an der negativen Bescheidung unseres Problems nicht zu rütteln.

Aber es gibt auch eine positive Erkenntnis, wenn wir unseren Anspruch reduzieren, also z.B. die Frage stellen: Wie läßt sich $\frac{1}{3}$ möglichst gut *angenähert* durch Brüche mit den



Nennern 2, 4, 8,... darstellen?

Abbildung 34: Annäherung an $\frac{1}{3}$ durch Summen von „Halbierungsbrüchen“

Abbildung 34 repräsentiert einen Lösungsgang, der fast auf natürliche Weise das sinnbestimmte Addieren und Subtrahieren und den Gebrauch von Ungleichungen übt.

Vorwärts drängend ist dann die Entdeckung, daß sich die (Teil)Summen

	Unterschied
$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{192}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{85}{256} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{768}$

systematisch der Bruchzahl $\frac{1}{3}$ so weit nähern, daß der Unterschied beliebig nahe und kalkulierbar an 0 heranrückt. Diese Konvergenzüberlegung wird in Abbildung 34 auf geradezu ästhetische Weise verdeutlicht. Sie mag zu dem schönen und kühnen Ergebnis führen, daß $\frac{1}{3}$ gleich der unendlichen Summe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + K$ ist. Vielleicht kann man auch auf die „Kommadarstellung“ kommen, hier zur Basis 2. Wir erhalten den unendlichen periodischen Dualbruch $\frac{1}{3} = 0,010101\dots_2 = 0,\overline{01}_2$.

Das wäre ein vollständiges Analogon zum unendlich periodischen Dezimalbruch $\frac{1}{3} = 0,333\dots_{10} = 0,\overline{3}_{10}$, der sich ähnlich attraktiv in Quadratform darstellen läßt.

Natürlich läßt sich unsere Aufgabe analog übertragen: Wie kann man $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, K$ als unendliche Summe darstellen?

Eine naheliegende Variation, Einheitsquadrate zu unterteilen besteht darin, auch andere Teilungslinien (Faltlinien) zuzulassen (Flachsmeyer 1999). Läßt man z.B. zu, daß nicht nur parallel zu den Seiten, sondern auch zu den Diagonalen und zu den Eck-Mittelpunkts-Linien gefaltet (gezeichnet) werden darf, so gibt es eine überraschende Vielfalt an Quadratzerlegungen und ein weites Spektrum im Anspruch, den Flächeninhalt einer selbst hergestellten Figur (als Anteil von 1) zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgaben – leichtere Beispiele zeigt Abbildung 35 – erfordert geometrische in Verbindung mit arithmetischen Aktivitäten, ein besonders beredtes Beispiel des Zusammenspiels von Gestalt und Zahl (Winter 1999 b).

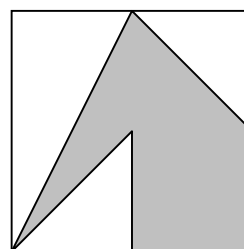
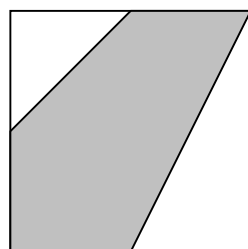
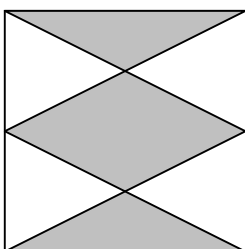


Abbildung 35: Quadratzerlegungen: Wie groß ist der Anteil der gefärbten Fläche an der Fläche des Einheitsquadrates?

In Abbildung 35 rechts wäre z.B. herauszufinden, daß die gefärbte Fläche aus einem Quadrat ($\frac{1}{4}$) und 2 verschieden geformten, aber flächengleichen Dreiecken (je $\frac{1}{8}$) besteht, so daß sich $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$ ergibt. Oder es werden die ungefärbten Flächen ins Auge gefaßt, dann ergibt sich $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Anspruchsvoller sind die Beispiele in Abbildung 36.

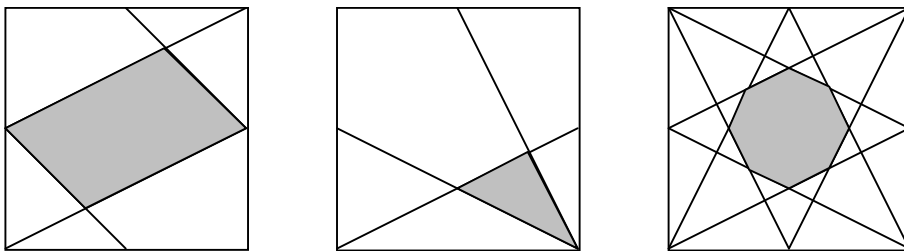


Abbildung 36: Quadratzerlegungen: Wie groß ist der Anteil der gefärbten Fläche an der Fläche des Einheitsquadrates? (Lösungen: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{1}{6}$)

Im übrigen läßt sich in diesem Themenkreis auch sehr gut das Geobrett benutzen (Besuden 1998)

10.6 Politische Wahlen

Ein unverzichtbares Erfahrungs- und Anwendungsfeld zur Bruchrechnung, also auch zum Addieren und Subtrahieren stellt das Bürgerliche Rechnen dar, dabei besonders die Bereiche, die man als *Politische Arithmetik* bezeichnen könnte. Da geht es um Fragestellungen, die das Leben der Menschen in der Gemeinschaft betreffen, für die es ein öffentliches Interesse gibt. Stichworte sind: Bevölkerung und ihre Gliederung nach relevanten Gesichtspunkten, Handel und Wirtschaft, Abgaben, Arbeit, Renten, Sport, Freizeit, Verkehr, Recht, Bildung u.v.m. Hier spielen überall Verhältnisse, Anteile, Sätze, Quoten, Quotienten, Proportionen eine zentrale Rolle (Sexualproportion, Altenlastquotient, Arbeitslosenquote, Zinssatz, Steuersatz, Erbteil, Punktverhältnis, Stimmenanteil usw.).

Eine Aufgabe aus der Thematik „Politische Wahlen“ soll illustrieren, wie die Bruchrechnung zur Lösung von politischen Fragestellungen gebraucht wird.

Die heutige *Gemeinderatswahl* in unserem Städtchen brachte für 5 konkurrierende Parteien folgendes Ergebnis:

Partei	C	S	F	G	P	zusammen
Stimmen	3415	3304	312	876	53	

Die Frage ist, wie sich der Gemeinderat zusammensetzen soll, wenn dieser aus mindestens 12, höchstens jedoch aus 15 Mitgliedern bestehen soll und wenn die 5%-Klausel gelten soll (wonach die Parteien, die weniger als 5% der gültigen Stimmen erhalten, nicht berücksichtigt werden).

Zur Lösung sollte zunächst die grundlegende Näherungsgleichung des Verhältniswahlrechts

$$\begin{aligned} & \text{Anteil der Mitglieder einer Partei im Gemeinderat} \\ & \approx \text{Anteil der Stimmen dieser Partei bei der Wahl} \end{aligned}$$

diskutiert werden.

Rein rechnerisch (und ohne Beachten der 5%-Klausel) sind die Anteile durch die Brü-

che $\frac{\text{Stimmen einer Partei}}{\text{Stimmen insgesamt}}$ gegeben, also

An- bruch	Partei	C	S	F	G	P
		$\frac{3415}{7960}$	$\frac{3304}{7960}$	$\frac{312}{7960}$	$\frac{876}{7960}$	$\frac{53}{7960}$
Dezimalbruch		0,4290	0,4151	0,0392	0,1101	0,0067
Prozentsatz		42,9%	41,5%	3,9%	11%	0,7%

} Nähe-
rungsbrü-

Die Bruchzahlen sind genau, aber spröde, dezimale Näherungsbrüche (hier gerundet auf 4 Dezimalstellen) und Prozentsätze machen die Anteile wesentlich faßbarer. Die Kontrolle (Summe aller Anteile muß 1 ergeben) darf nicht fehlen, einschließlich der Diskussion möglicher Rundungsfehler.

Noch klarer werden die Verhältnisse (!) durch Graphiken, z.B. Säulenbild (auf mm-Papier) und Kreisbild (Abbildung 37), die natürlich farbig ausgestaltet werden.

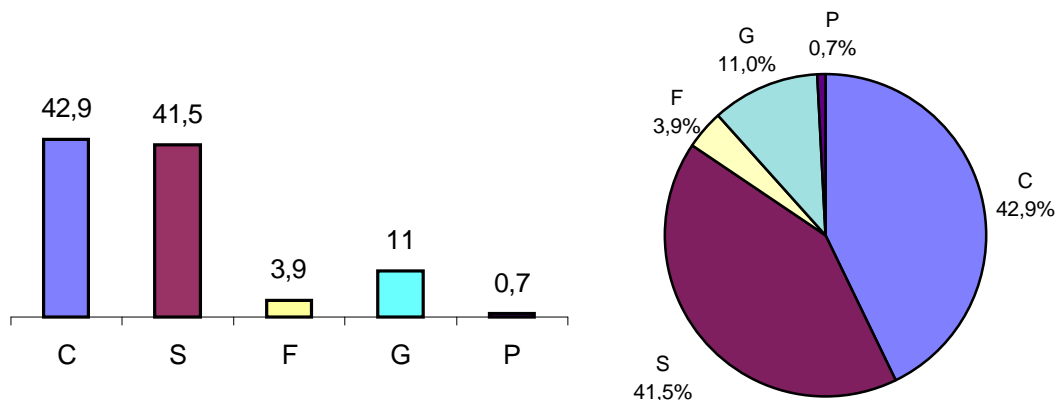


Abbildung 37: Ausgang der Gemeinderatswahl

Das Kreisbild stiftet eine Verbindung zur Winkelmessung. Nun aber das eigentliche Problem: die Zusammensetzung des Gemeinderats.

Zunächst werden wegen der 5%-Klausel die Splitterparteien F und P ausgeschieden. Das bedeutet, es werden für die Zusammensetzung des Parlamentes nicht mehr alle Stimmen, sondern nur noch die der 3 Parteien C, S, G berücksichtigt. Die insgesamt rd. 95,4% Stimmanteil der Parteien C, S, G werden zu 100% bei der Parlamentsbildung.

Das ergibt neue Verhältnisse, da sich das „Ganze“ von 7960 auf 7595 verkleinert hat. (Und es gibt sachliche Motive, Bruchzahlen zu addieren!)

	C	S	G
Bruch	$\frac{3415}{7595}$	$\frac{3304}{7595}$	$\frac{876}{7595}$
Dezimalbruch	0,4496	0,4350	0,1153
Prozentsatz	45,0%	43,5%	11,5%

Was fällt auf? Erstens besitzen nun alle verbleibenden Parteien einen höheren Anteil im Parlament, als bei der Wahl. Das ist klar, wenn gesehen wird, daß die Zähler der ursprünglichen Anteilsbrüche bleiben, der Nenner aber kleiner wird. Zweitens profitiert eine Partei um so mehr von der 5%-Klausel, je höher ihr Stimmanteil in der Wahl ist (Bevorzugung der großen Parteien). Das wird eingesehen, wenn erkannt wird, daß jeder Prozentpunkt im Stimmenanteil nach Ausscheiden der Splitterparteien um denselben Prozentpunktbetrag ansteigt, in unserem Fall wird aus 1% Stimmanteil ($\frac{7960}{7595} = 1,0485\dots$) 1,048% Parlamentsanteil.

Das muß an einfachen, erdachten Beispielen, auch extremer Art, genauer erfahren werden. Ein ganz extremer Fall wäre es, wenn keine einzige von über 20 Parteien 5% der Stimmen erzielte, es könnte dann gar kein Parlament gebildet werden. Erreichten die Splitterparteien zusammen 50% der Stimmen, so würden die Nichtsplitterparteien ihre Anteile für die Parlamentsbildung verdoppeln; gäbe es dabei nur eine Nichtsplitterpartei, so würde sie das ganze Parlament stellen, was die Prinzipien einer parlamentarischen Demokratie ad absurdum führen würde.

Der Effekt der 5%-Klausel (oder irgendeiner anderen Hürde dieser Art) kann auf verschiedene Arten geometrisch ausgedrückt werden (Abbildung 38), insbesondere die anteilmäßige Streckung der Stimmanteile auf Parlamentsanteile dürfte so deutlicher in Erscheinung treten.

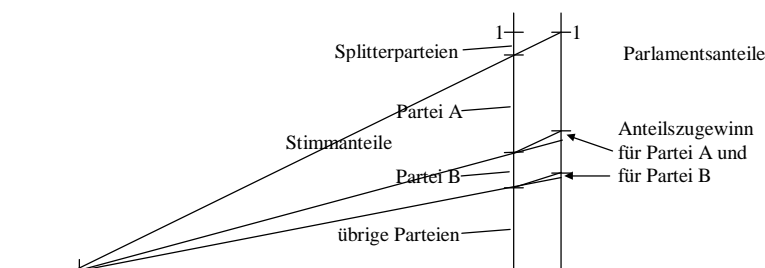
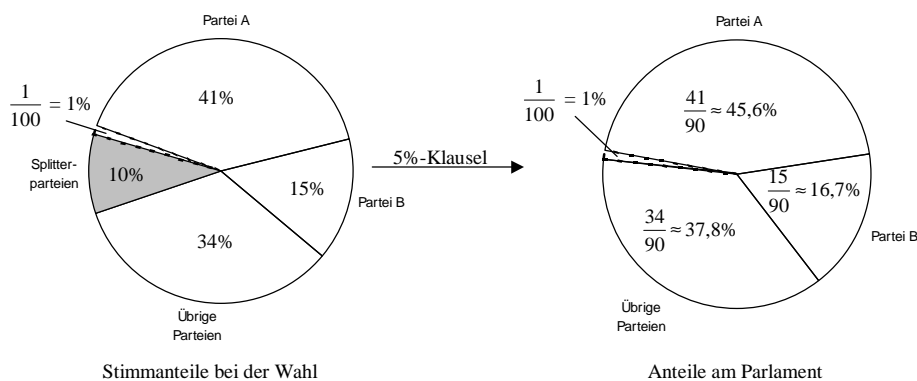


Abbildung 38: Effekt einer Sperrklausel für die Parlamentszusammensetzung

Zahlreiche Einzelprobleme mit realen und mit fiktiven Daten rund um die 5%-Klausel können erörtert werden, vor allem bei „engen“ Verhältnissen im Zusammenhang mit Koalitionen. Z.B.: Wie ist es möglich, daß eine Partei durch die 5%-Klausel im Parlament die absolute Mehrheit erhält?

Spätestens hier wird deutlich, welchen Beitrag die Bruchrechnung zur politischen Bildung leisten kann.

Es ist ein Problem, das das Grundverständnis von Bruchzahlen berührt und mitten in der Lebenspraxis steht (vgl. auch das reale Beispiel in Anhang!).

Zurück zum o. g. Hauptproblem, das ja völlig unabhängig von einer Sperrklausel ist und darin besteht, daß es einerseits keine gebrochenen Gemeinderatsmitglieder geben kann (45% von 12 ist 5,4), aber sich andererseits das Wahlergebnis im Gemeinderat möglichst gut widerspiegeln soll. Der Gemeinderat kann nur ein vergrößertes, sollte aber ein möglichst gutes Spiegelbild der Stimmverhältnisse abgeben. Es bietet sich Experimentieren an, eine willkommene problemorientierte Übungsphase der Bruchrechnung, etwa u.a.: Wie sollte der Gemeinderat aus Vertretern der 3 Parteien C, S, P zusammengesetzt werden, wenn er aus mindestens 12 und höchstens 15 Mitgliedern bestehen soll?

	C (45,0%)		S (43,5%)		G (11,5%)	
12 Mitglieder	6	$\frac{6}{12} = 0,5 = 50\%$	5	$\frac{5}{12} = 0,41\bar{6}$ $\approx 41,7\%$	1	$\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$ $\approx 8,3\%$
13 Mitglieder	6	$\frac{6}{13} \approx 0,4615$ $\approx 46,2\%$	6	$\frac{6}{13} \approx 0,4615$ $\approx 46,2\%$	1	$\frac{1}{13} \approx 0,0769$ $\approx 7,7\%$
14 Mitglieder	7	$\frac{7}{14} = 0,5 = 50\%$	6	$\frac{6}{14} \approx 0,4286$ $\approx 42,9\%$	1	$\frac{1}{14} \approx 0,0714$
15 Mitglieder	7	$\frac{7}{15} = 0,4\bar{6} \approx 46,7\%$	7	$\frac{7}{15} = 0,4\bar{6} \approx 46,7\%$	1	$\frac{1}{15} = 0,0\bar{6} \approx 6,7\%$
	7	$\frac{7}{15} = 0,4\bar{6} \approx 46,7\%$	6	$\frac{6}{15} = 0,4 = 40\%$	2	$\frac{2}{15} = 0,1\bar{3} \approx 13,3\%$

Da offenbar keine Lösung so recht zufrieden stellen kann (immer kann sich mindestens eine Partei benachteiligt fühlen), wird die Frage motiviert: Gibt es ein Verfahren, das in der Regel (in den überwiegenden Fällen) gerecht ist und also zur allgemein anerkannten Methode erhoben werden kann? Auf jeden Fall muß man sich auf eine allgemeine, gesetzlich festgelegte Methode beziehen, denn es kann wohl nicht sein, daß es nach den Wahlen zu nicht enden wollenden Streitigkeiten kommt und Gemeinden eines Landes zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen, auch wenn gleiche Stimmenverhältnisse vorliegen.

Die Frage sprengt den Rahmen der Bruchrechnung, wenn sie allgemein diskutiert werden soll, man braucht ja Optimalitätsbedingungen. Immerhin könnte man an dem Beispiel das Hare-Niemeyer-Verfahren vorstellen und plausibel machen, z.B. für 12 Sitze

1. Schritt: die ganzzahligen Anteile vergeben

$$C \quad \frac{3415}{7595} \text{ von } 12 = 5,3956\dots, \text{ also } \underline{5}$$

$$S \quad \frac{3304}{7595} \text{ von } 12 = 5,2202\dots, \text{ also } \underline{5}$$

$$G \quad \frac{876}{7595} \text{ von } 12 = 1,38406\dots, \text{ also } \underline{1}$$

2. Schritt: Verteilung des restlichen Sitzes an die Partei mit dem größten Nachkommanteil, also an C. Damit ergibt sich die Verteilung 6, 5, 1 für C, S, G.

Für 15 Sitze errechnen wir die Verteilung 7, 6, 2.

1. Schritt:

$$C \quad \frac{3415}{7595} \text{ von } 15 = 6,7445\dots, \text{ also } \underline{6}$$

$$S \quad \frac{3304}{7595} \text{ von } 15 = 6,5253\dots, \text{ also } \underline{6}$$

$$G \quad \frac{876}{7595} \text{ von } 12 = 1,7300\dots, \text{ also } \underline{1}$$

13

2. Schritt

$$1 \quad | \quad 7$$

$$0 \quad | \quad 6$$

$$\underline{1} \quad | \quad 2$$

2

Das Thema „Politische Wahlen“ kann wegen seiner allgemeinen sachlichen Bedeutsamkeit und seines damit in Verbindung stehenden Aspektreichtums (Bruchbegriff als Teil-Ganzes-Relation, Bruch als Verhältnis, Prozentanteile als lebensweltliche Brüche, Näherungsbrüche und exakte Brüche, Rundungsfragen, Wechsel der Ganzheit, Diagramme, die auch im Fernsehen vorkommen, Addition/Subtraktion bei Koalitionsbildungen,...) ein zentrales Thema einer künftigen Bruchrechnung sein.

Viele Anregungen zum Thema Wahlen findet man im ML-Heft 88 (1988), herausgegeben von Th. Jahnke.

11 Rechnen mit Bruchzahlen – Multiplikation und Division

11.1 Regelwerk

Während sich die Sinnggebung der Strichrechenarten (+, −) mit Bruchzahlen stark auf die bisherigen Erfahrungen stützen kann – es bleibt bei der Vorstellung Größen zusammenfügen oder trennen – erfordert die Sinnggebung der Punktrechenarten (·, :) die Einlassung auf neue Vorstellungen des Rechnens, die – wie schon ausgeführt – als fremdartig oder

gar monsterhaft erscheinen können. Tatsächlich ist der Multiplikator $\frac{2}{3}$ in $\frac{2}{3} \cdot x$ zu-

nächst ohne Sinn, denn bisher hat der Multiplikator immer angegeben, wie oft der Multiplikand zu sich selbst zu addieren ist. Er war „von Natur“ aus ganzzahlig. Entsprechend war das Dividieren im Sinne des Verteilens nur vernünftig und einsichtig für ganzzahlige Divisoren.

Das bedeutet aber gerade nicht, die Punktrechenarten so einzuführen, daß die Erweiterung der Operationsbegriffe möglichst glatt und problemlos aussieht und man ziemlich bald an die Rechenregeln kommt, die dann einzuüben sind.

In gewisser Weise verdecken die beliebten sogenannten *Permanenzfolgen* das Problem der Sinngebung mehr als erhellend zu wirken.

$$\begin{array}{l}
 \text{Die Folge} \quad 9 \cdot 4 = 36 \\
 \quad \quad \quad \downarrow :3 \quad \downarrow :3 \\
 \quad \quad \quad 3 \cdot 4 = 12 \\
 \quad \quad \quad \downarrow :3 \quad \downarrow :3 \\
 \quad \quad \quad 1 \cdot 4 = 4 \\
 \quad \quad \quad \downarrow :3 \quad \downarrow :3 \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3} \\
 \quad \quad \quad \downarrow :3 \quad \downarrow :3 \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{9} \cdot 4 = \frac{4}{9}
 \end{array}$$

belegt eigentlich nur, daß die Multiplikation mit natürlichen Multiplikatoren als Sonderfall in der Multiplikation mit Bruchzahlen „aufgeht“. Das ist zweifellos wichtig und nützlich, denn was für Bruchzahlen gilt, muß speziell für die natürlichen Zahlen (als besondere Bruchzahlen) gelten. Solche Permanenzfolgen sind danach brauchbar, sogar unverzichtbar, wenn die Reichweite einer vorgegeben Sinngebung der Multiplikation untersucht wird. Insbesondere können durch sie unbrauchbare Vorschläge als solche entlarvt werden (z.B. $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$, denn dann müßte $2 \cdot 4 = \frac{2}{1} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = 4$ sein).

Aber zur Sinngebung können sie nur schwache Hinweise geben, sie sind zu formal.

Der Umweg über Dezimalbrüche hilft hier zunächst auch nicht weiter, denn $0,7 \cdot 4$ ist genau so sinnfrei wie $\frac{7}{10} \cdot 4$.

Der Weg über die vorauselend postulierte Kommutativität, also $0,7 \cdot 4 = 4 \cdot 0,7 = 0,7 + 0,7 + 0,7 + 0,7 = 2,8$ zu rechnen, ist eben wegen der schlaun Unterstellung ein Schleichweg, auch ganz abgesehen davon, daß damit der Typ Bruch \times Bruch nach wie vor offen bleiben würde.

Kurzum: Man muß sich dem Problem einer neuen Sinngebung der Multiplikation offen und ehrlich stellen.

Der entscheidende Punkt ist dabei, daß dieses Problem mit der Bildung des Bruchbegriffs überhaupt zusammenhängt. Innermathematisch gesehen ist ja das Hauptmotiv der Erweiterung von \mathbf{N} nach \mathbf{B} (= Menge der Bruchzahlen), in \mathbf{B} einen Rechenbereich zu haben, in dem die Multiplikation nicht nur unbeschränkt ausführbar, sondern auch umkehrbar ist. Oder strukturell ausgedrückt: Die Erweiterung von (\mathbf{N}, \cdot) auf (\mathbf{B}, \cdot) ist der Übergang von einer (regulären) Halbgruppe zu einer Gruppe, d.h. einer Menge von Zahlen, in der jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ genau eine Lösung hat (während wir beim Übergang von $(\mathbf{N}, +)$ nach $(\mathbf{B}, +)$ algebraisch-strukturell nichts Neues gewinnen!). Für den lernenden Schüler können diese strukturellen Aspekte freilich keine verständigen Gesichtspunkte sein, so daß es darauf ankommt, Lernumgebungen anzubieten, die die Bestimmung einer Multiplikation (und Division) von Bruchzahlen motivieren und einsichtig erscheinen lassen.

Dazu gehören u.a. die Flächeninhaltsbestimmung von Rechtecken, die Ähnlichkeit von Figuren und die Anteilsberechnung von Größen (speziell relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten).

11.2 Flächeninhalt von Rechtecken

Bekannt ist den Schülern aus der Grundschule die Darstellung von „Malaufgaben“ in Rechtecken auf dem Quadratgitter des Rechenpapiers (Abbildung 39).

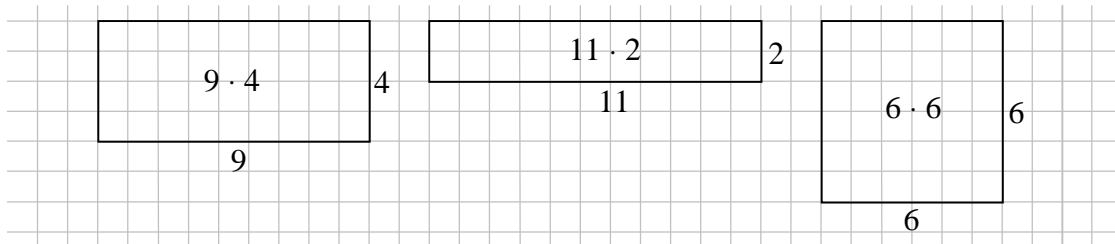


Abbildung 39: Darstellung der Multiplikation in der Grundschule

Der Zweck ist dabei natürlich nicht (in erster Linie), Ergebnisse von Malaufgaben durch empirisches Auszählen zu gewinnen, sondern durch Umstrukturierungen an den Figuren Erkenntnisse über das Multiplizieren zu gewinnen, z.B. die Kommutativität durch Vierteldrehung des Rechtecks und die so wichtige Distributivität über der Addition durch Zerlegen eines Rechtecks oder Zusammenfügen zweier passender Rechtecke ($5 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 8 \cdot 7$). Der Begriff der Multiplikation natürlicher Zahlen erfährt seine „natürliche“ Deutung ($a \cdot b$ als „a Streifen mit je b Kästchen“), und die Dividierbarkeit einer Zahl erwächst aus der allgemeineren Fragestellung nach der Darstellbarkeit der Zahl in einem Rechteck. Welche Zahlen lassen sich als Rechtecke darstellen? Natürlich alle, „schlimmstenfalls“ als einfacher Streifen. Andere, wie 60, lassen sich auf mehrere ganz verschiedene Arten als Rechtecke darstellen, manche sogar als Quadrat (gleichseitiges Rechteck). Man kann zu elementaren Begriffen der Teilbarkeit vorstoßen.

Für die Bruchrechnung ist nun wichtig, daß man jetzt „sehr viel mehr Rechtecke“ betrachten kann, die Seiten des Rechtecks können beliebige Bruchzahlen sein. Da kann das Rechteck i.A. nicht aus einer Anzahl von Einheitsquadraten bestehen, genau hierin liegt der Sprung von **N** nach **B**.

Die Initialaufgabe mag lauten:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, das die Länge $1\frac{2}{3}$ und die Breite $\frac{4}{7}$ (jeweils Längeneinheit, z.B. m, cm,...) hat?

Zunächst wird das Rechteck gezeichnet, und zwar möglichst mit der gelernten Zirkel- und Lineal-Konstruktion (Abbildung 40).

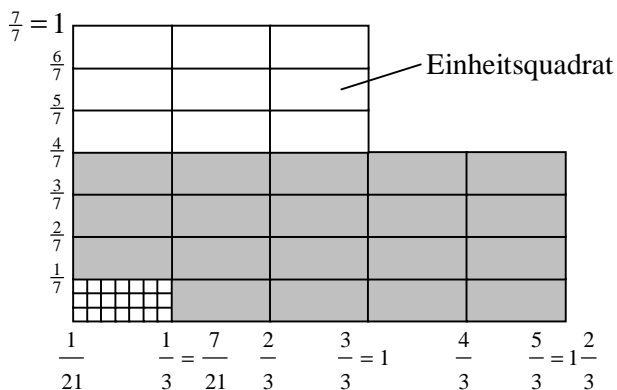


Abbildung 40: Multiplikation als Flächeninhaltsbestimmung

Auf der einen Zahlengeraden konstruieren wir die Drittelteilung, auf der anderen die Siebenteilung. Zu entdecken ist dann die Möglichkeit der *Pflasterung* des $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$ -Rechtecks durch (gleich große) Rechtecke. Damit ist das Meßproblem (Flächeninhaltsbestimmung) insoweit gelöst, als die Figur in eine Anzahl gleich großer Teilfiguren zerlegt ist. Der Flächeninhalt eines kleinen Teilrechtecks ist jetzt die Maßeinheit. Was noch fehlt, ist die Bestimmung der Anzahl der Teilrechtecke und die Größe der Teilrechtecke *bezogen auf die Einheitsquadratfläche*. Beides ist der Figur zu entnehmen: Es gibt $5 \cdot 4 = 20$ Teilrechtecke (Pflastersteine) und $3 \cdot 7 = 21$ solcher Teilrechtecke passen in das Einheitsquadrat (Quadrat mit den Seiten 1), so daß jedes $\frac{1}{21}$ des Einheitsquadrates groß ist. Damit ergibt sich: Flächeninhalt des Rechteckes der Länge $\frac{5}{3}$ und der

Breite $\frac{4}{7}$ ist $\frac{20}{21}$ der Einheitsquadratfläche.

Setzen wir jetzt noch den (hoffentlich vertrauten) Gedanken fort, daß der Flächeninhalt (als Zahl) gleich dem Produkt der Seiten ist (das ist der Rekurs auf das Gewohnte!), dann können wir jetzt begründeterweise schreiben $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7}$. Wohlgemerkt:

Diese Bemühung soll keine anschauliche Herleitung der Regel „Zähler x Zähler durch Nenner x Nenner“ sein, sondern die möglichst selbständige Erarbeitung der Lösung einer Flächeninhaltsfindungsaufgabe.

Man sollte nicht die Gelegenheit zur weiteren Ausbeutung der Figur in Abbildung 40 versäumen, z.B. weiter zur Pflasterung passende Rechtecke messen: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$, K, auch den Sonderfall $\frac{3}{3} \cdot \frac{7}{7} = \frac{21}{21} = 1$.

Was nicht übersehen werden darf – und ein nicht geringes Verständnisproblem darstellt –, ist der Umstand, daß hier Bruchzahlen aus zwei Welten zusammengebracht werden: Bruchzahlen als Längen von Strecken (auf den Zahlengeraden) und Bruchzahlen als Flächeninhalte (von Rechtecken). Das sind in der Tat unvergleichliche Dinge, der Flächeninhalt einer rechteckigen Wiese gibt (bei homogener Bewachsung) an, wieviel Gras den Kühen zur Verfügung steht, während Länge und Breite der Wiese wichtig sind für die Frage nach der Zaunlänge.

Der Zusammenhang (von Flächeninhalt und Seitenlänge) mit früheren Erfahrungen dazu (ganzzahlige Seitenlängen) wird deutlicher, wenn man die Teilrechtecke quadratisch rastert, was immer möglich ist. In unserem Beispiel besteht jedes Teilrechteck aus $3 \cdot 7 = 21$ kleinen Quadraten, von denen also $21 \cdot 21 = 441$ das Einheitsquadrat ausfüllen. Nehmen wir ein solches Mini-quadrat als Flächeneinheit, dann haben wir ganzzahlige Verhältnisse, unser Rechteck besteht aus $35 \cdot 12 = 420$ Mini-quadraten, und das ist gerade wieder $\frac{420}{441} = \frac{20}{21}$ unseres großen Einheitsquadrates.

Das Produkt (Seiten)Länge x (Seiten)Länge = Flächeninhalt (bezogen auf Rechtecke mit vorher festgelegtem Einheitsquadrat) ist nur *ein* wichtiger Fall von zahlreichen, weiteren, die unmittelbare Beziehung zur Wirklichkeit in Geometrie, Natur und Gesellschaft haben:

Grundfläche x Höhe = Volumen (von prismatischen Körpern)

Dichte x Volumen = Gewicht

Gewicht x Höhe = Hubarbeit

Kraft x Weg = Arbeit (bei konstanter Kraft)

Gewicht x Länge = Drehmoment (am Hebel)

Stundenlohn x Arbeitszeit = Arbeitslohn

Kilopreis x Gewicht = Kosten (z.B. bei Lebensmitteln)

Durchschnittsverbrauch x Weglänge = Verbrauch an Kraftstoff

Zu erkennen, daß alle diese Beispiele u.v.a. mehr dieselbe Struktur wie die Flächeninhaltsbestimmung von Rechtecken haben, ist eine fundamentale Analogieleistung, die durch die Bruchrechnung ermöglicht werden kann.

Zu sehen ist auch das kreative Moment: Das Produkt von Größen kann gewissermaßen eine neue Größe erschaffen, bestimmen, definieren. So mißt „Drehmoment“ als Produkt von Gewicht (eigentlich Gewichtskraft!) eines Gegenstandes und horizontaler Entfernung des Gegenstandes vom Drehpunkt die *Drehwirkung*, die dieser Gegenstand auf den Hebelarm ausübt, quantifiziert also die jedermann zugängliche qualitative (oder halb quantitative) Erfahrung, daß die Wirkung umso größer ist, je schwerer der Gegenstand und (unabhängig davon) je weiter er vom Drehpunkt entfernt ist. Die Quantifizierung führt dann zu produktgleichen Paaren (Gewicht/Länge) als Ausdruck gleicher Drehwirkung, z.B. (Gewicht in kg, Länge in m)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = 1 \cdot \frac{3}{20} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{80} = 0,3 \cdot 0,5 = K$$

und diese Produkte lassen sich am zweiseitigen Hebel als Gleichgewichtskonstellation handgreiflich erfahren (Abbildung 31).

Die *Division* von Bruchzahlen erhält im Flächeninhaltsmodell (und allen o.a. weiteren Produktgrößen) ihre Motivation durch die zugehörigen *Umkehrprobleme*: Flächeninhalt und eine Seite eines Rechtecks (oder Arbeitszeit und Arbeitslohn oder...) sind gegeben, gesucht ist die andere Seite (oder der Stundenlohn oder...). Die selbständige Lösung von solchen Umkehrproblemen bedeutet dann die selbständige Konstruktion von Wissen über das Dividieren von Bruchzahlen.

Die Aufgabe:

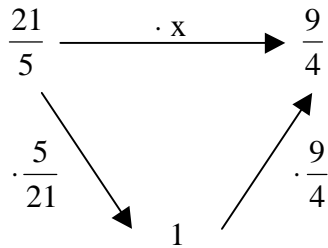
Wie breit ist das Rechteck, das $2\frac{1}{4}\text{m}^2$ Flächeninhalt hat und 4,2 m lang ist? kann zur

Gleichung $4,2 \cdot x = 2\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{21}{5} \cdot x = \frac{9}{4}$ bzw. $x = \frac{9}{4} : \frac{21}{5}$ führen. Die Aufgabe $\frac{9}{4} : \frac{21}{5}$ ist

nicht als Enthaltenseins bzw. Meßaufgabe verständlich, wie sollte auch eine Länge in einem Flächeninhalt enthalten sein? Es liegt hier vielmehr eine Erweiterung des Divisionsbegriffs im Sinne des Verteilens vor: Der Flächeninhalt wird gleichmäßig auf der Länge aufgetragen und es wird gefragt, wieviel Flächeninhalt auf die Länge 1 entfällt. Das läßt sich nicht nur vorstellen und auch zeichnen, wir haben vielmehr ja nichts anderes als *Durchschnittsbildung*!

Das rechnerische Finden von x in der Gleichung $\frac{21}{5}x = \frac{9}{4}$ kann durch (mehr oder minder geschicktes) Probieren und Korrigieren erfolgen – eine höchst wichtige und vernünftige Strategie – oder durch das Gehen von *Umwegen* oder – falls entsprechende Erfahrungen vorliegen – durch direkte *algebraische Umformung*.

Die (hoffentlich bewußte) Erfahrung, daß es unendlich viele Rechtecke vom Flächeninhalt 1 gibt ($1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{7} \cdot 7 = \frac{3}{13} \cdot \frac{13}{3} = \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{21} = K$), kann auf den Umweg



verweisen und dann so zu $x = \frac{9}{4} : \frac{21}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{21}$ führen. Allerdings setzt dies verständigen Umgang mit der Denk- und Schreibweise von Operatoren-Verkettungen voraus. Ist das nicht gegeben, kann (äquivalent) auf andere Art inhaltlich geschlossen werden: Hätte das Rechteck den Flächeninhalt 1, dann wäre die Länge $\frac{21}{5}$ die Breite $\frac{5}{21}$. Da der Flächeninhalt aber das $\frac{9}{4}$ -fache von 1 beträgt, muß bei gleicher Länge $\frac{21}{5}$ die Breite das $\frac{9}{4}$ -fache von $\frac{5}{21}$ betragen, damit Breite $x = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{21}$.

Algebraisches Umformen, das hier durchaus inhaltlich gesteuert ist (und sich nicht auf syntaktische Regeln zu stützen braucht), führt in zwei Schritten zum Ziel:

$$\begin{aligned} \frac{21}{5} x &= \frac{9}{4} \\ 21 \cdot x &= \frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{45}{4} = \frac{9 \cdot 5}{4} \\ x &= \left(\frac{45}{4} : 21 = \left(\frac{1}{21} \text{ von } \frac{45}{4} \right) = \frac{45}{84} = \frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 21} \right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{21} \end{aligned}$$

11.3 Ähnlichkeit und Maßstab

Maßstäbliche Abbildungen sind aus dem Alltag wohl bekannt: Landkarten sind verkleinerte (und idealisierte) Bilder von Ausschnitten der Erde, das Dia-Bild an der Wand ist ein vergrößertes Abbild des Dias im Gerät, das Spielauto ist ein verkleinertes Abbild eines realen Autos, die Kopiergeräte können das Original verkleinern und vergrößern wiedergeben usw.

Von Natur aus ist der Maßstab ein Bruch bzw. ein Verhältnis, denn es ist ja immer

$$\frac{\text{Länge einer Linie im Bild}}{\text{Länge der zugehörigen Linie im Original}} = \text{Maßstab.}$$

Sind Zähler und Nenner ganzzahlig, so ist der Maßstab eine Bruchzahl im uns hier interessierenden Sinn.

Eine Initialaufgabe ist es, von einer gegebenen ebenen (Original)Figur ein maßstäbliches Abbild, eine Bildfigur, bei gegebenem Maßstab herzustellen. In eingeschränkter Form kann dies schon in der Grundschule auf Rechenpapier gelernt werden.

Als Zeichengerät könnte der Storchschnabel dienen, robuster und für jeden einfacher zu beschaffen ist das schon genannte, gleichmäßig unterteilte *Gummiband*. Abbildung 41 zeigt, wie es funktioniert. Hier empfiehlt sich Partnerarbeit.

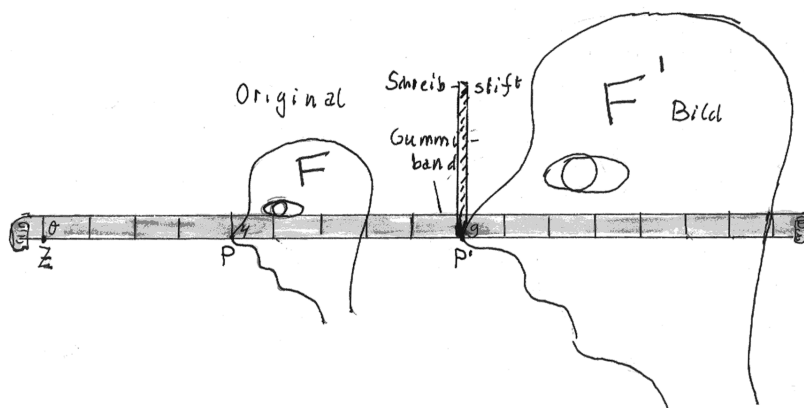


Abbildung 41: Maßstäbliches Vergrößern, Maßstab $\frac{9}{4}$, (= zentrische Streckung aus Z mit Streckfaktor $k = \frac{9}{4}$)

In geometrischer Hinsicht sind die Invarianten der maßstäblichen Abbildung (der „Ähnlichkeitsabbildung“) zu entdecken: das Bild einer Strecke ist eine Strecke, das eines Kreises ist ein Kreis, das eines Quadrates ist ein Quadrat, das eines Rechtecks ist ein Rechteck, und dabei ist stets $\frac{\text{Länge einer Linie im Bild}}{\text{Länge der zugehörigen Linie im Original}} = \text{Maßstab}$.

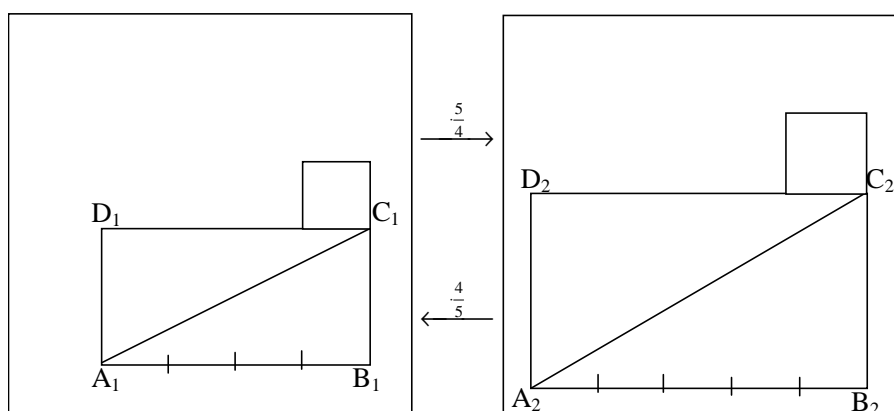


Abbildung 42: Figuren, die durch maßstäbliche Abbildung auseinander hervorgehen

Nach der Ausführung einer solchen Abbildung kann man Original- und Bildfigur in beliebige Lagen zueinander bringen, sich so vom Herstellungsprozeß befreien (Abbildung 42) und die Aufmerksamkeit auf die jeweiligen Verhältnisse innerhalb von Originalfigur und Bildfigur richten. Im Beispiel ist etwa $\overline{A_2B_2} = \frac{5}{4} \overline{A_1B_1}$ und

$\overline{B_2C_2} = \frac{5}{4}\overline{B_1C_1}$ und $\overline{A_2C_2} = \frac{5}{4}\overline{A_1C_1}$ usw. Als Folge ergibt sich auch $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}$,

d.h. Original- und Bildrechteck haben dasselbe Seitenverhältnis. Vor allem kann man auch die Rolle von Original und Bild vertauschen, nämlich das Original als Abbild des Bildes vom Original ansehen. In der einen Richtung haben wir den Maßstab $\frac{m}{n}$ (hier

$\frac{5}{4}$), in der entgegengesetzten den Maßstab $\frac{n}{m}$ (hier $\frac{4}{5}$). Das ist (spätestens) *die* Gelegenheit, vom *Kehrwert* von Bruchzahlen zu reden und wiederholt von der Sonderrolle der Zahl 1.

Die Multiplikation (und Division) kommt dann ins Spiel, wenn zwei (oder mehrere) maßstäbliche Abbildungen hintereinander ausgeführt (verkettet) werden. Man hat ja dann die Kette Original \rightarrow Erstbild \rightarrow Zweitbild, wobei das Erstbild das Original des Zweitbildes ist. Die Frage ist dann, wie Original und Zweitbild zueinander stehen (Abbildung 43).

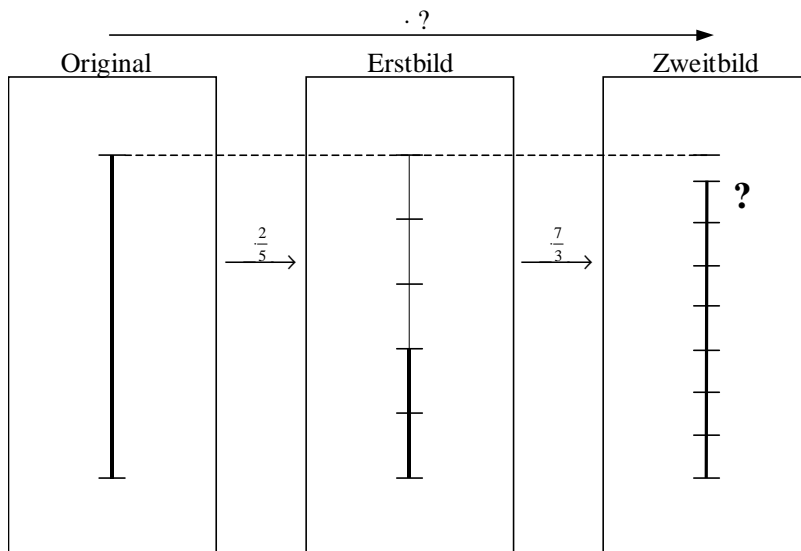


Abbildung 43: Verkettung zweier maßstäblicher Abbildungen als Initialproblem

Der 1. Schritt betrifft den Bruchbegriff selbst, die Herstellung von $\frac{2}{5}$ (von 1) als Doppelhandlung ($: 5, \cdot 2$ oder $\cdot 2, : 5$). Der 2. Schritt ist aber auch nichts anderes als eine solche Doppelhandlung ($: 3, \cdot 7$ oder $\cdot 7, : 3$), nur jetzt nicht auf 1, sondern auf $\frac{2}{5}$ bezo-

gen. Mit Hilfe des skalierten Gummibandes oder mittels Streifenmuster sind diese beiden Abbildungen ökonomisch zu realisieren. Das Problem ist, wie das Zweitbild mit einem Schlage durch eine maßstäbliche Abbildung aus dem Original gewonnen werden kann. Dazu müssen Fünftel und Drittel miteinander vergleichbar gemacht werden. Daß

$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ und $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ ist (erweitern), führt dann dazu, die Teilung von $\frac{2}{5}$ durch 3 aus-

sprechen zu können, $\frac{2}{5} : 3 = \frac{6}{15} : 3 = \frac{2}{15}$. Die Vervielfachung mit 7 ist dann kein Problem

mehr, $7 \cdot \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$. Damit ist der Maßstab vom Original zum Zweitbild $\frac{14}{15}$. Daß $\frac{14}{15} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}$ ist, stellt die Verbindung zu den gegebenen Maßstäben $\frac{2}{5}$ und $\frac{7}{3}$ her. Wenn jetzt noch bedacht wird, daß im Falle von ganzzahligen Maßstäben, z.B. 2 und 7, der Verkettungsmaßstab das Produkt ist ($2 \cdot 7$), dann erscheint es plausibel, auch $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}$ als Produkt $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$ anzusehen und zu interpretieren und dieses auch zu schreiben, etwa:

„7mal der dritte Teil von $\frac{2}{5}$ “ $\frac{2}{5} : 3 = \frac{6}{15} : 3 = \frac{2}{15}, \frac{2}{15} \cdot 7 = \frac{14}{15}$

„der dritte Teil vom 7-fachen von $\frac{2}{5}$ “ $\frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}, \frac{14}{5} : 3 = \frac{42}{15} : 3 = \frac{14}{15}$

Ein Bruch liegt (meistens) darin, daß in dieser Verkettungssicht der Multiplikator (entgegen der üblichen Gewohnheit) rechts steht. Daher ist es sinnvoll, die Vertauschbarkeit beim Verketteten erfahren zu lassen, hier also $\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$.

„2mal der 5. Teil von $\frac{7}{3}$ “ $\frac{7}{3} : 5 = \frac{35}{15} : 5 = \frac{7}{15}, \frac{7}{15} \cdot 2 = \frac{14}{15}$

„Der 5. Teil vom 2-fachen von $\frac{7}{3}$ “ $\frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{14}{3}, \frac{14}{3} : 5 = \frac{70}{15} : 5 = \frac{14}{15}$

Das ist keineswegs trivial, i.A. sind nämlich Handlungsketten *nicht* vertauschbar (erst Schuhe anziehen, dann schnüren \neq erst schnüren, dann anziehen!; erst addieren dann multiplizieren? $(3 + 4) \cdot 5 \neq 3 \cdot 4 + 5$), so daß die hier geltende Vertauschbarkeit wirklich thematisiert werden sollte.

Der gerade skizzierte problemorientierte Zugang zur Multiplikation von Bruchzahlen, der ja in der Tat aufwendig ist, lohnt nur, wenn er auch übend ausgelotet wird. So wird ja in unserem Initialproblem (von 1 ausgehend) zunächst gefünftelt, dann gedrittelt, und Teilungen sind ja das Herzstück in der Bruchrechnung. Daher liegt es nahe, dieses – die Zähler variierend – zu verfolgen, und in Korrespondenz mit Abbildung 43 eine Multiplikationstabelle zu entwickeln, die Veranlassung gibt, *über das Multiplizieren* zu sprechen.

•	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$...
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$...
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{10}{15}$...
$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{15}{15}$...
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{20}{15}$...
N	N	N	N	N	N	...

Z.B. sollte bewußt werden, daß der „Knackpunkt“ in der „kleinst möglichen“ Aufgabe $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$ liegt, die als der „3. Teil von $\frac{1}{5}$ (von 1)“; $\frac{1}{3} : 5$ oder als „der 5. Teil von $\frac{1}{3}$ (von 1)“; $\frac{1}{3} : 5$ gedeutet wird und als Grundaufgabe der Bruchrechnung (wiederholt) in unterschiedlicher Weise konkretisiert wird, wie es auf geometrische Art Abbildung 44 andeutet. Weitere Verständnisstützen liefern Bezüge zu den bekannten Größen, z.B. $\frac{1}{5} \text{ h} : 3 = 12 \text{ min} : 3 = 4 \text{ min} = \frac{4}{60} \text{ h} = \frac{1}{15} \text{ h}$.

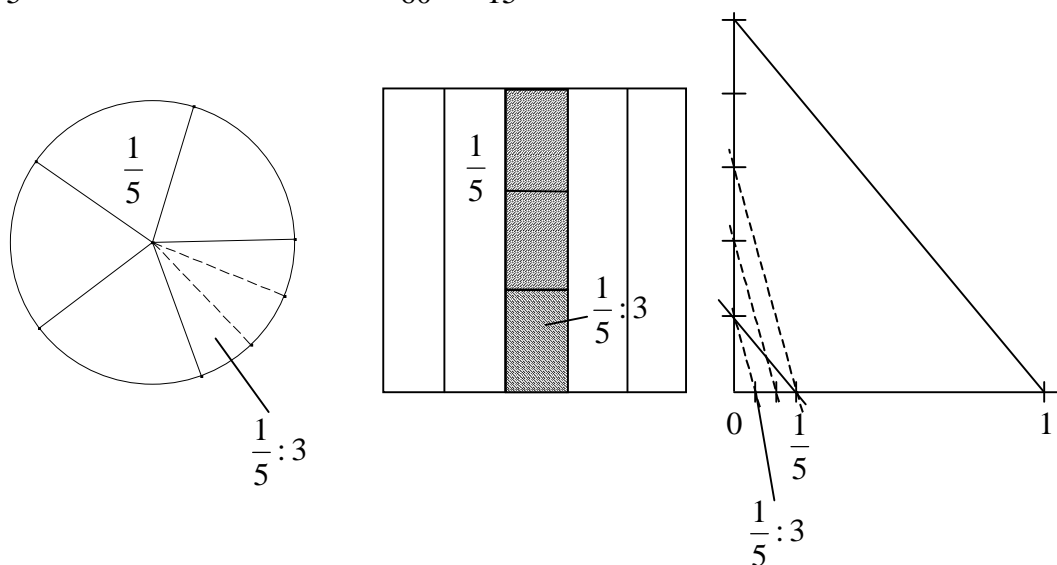


Abbildung 44: Geometrische Darstellungen von $\frac{1}{5} : 3$

Vor allem ist auch hier wieder der Rückbezug zu Erfahrungen mit natürlichen Zahlen zu aktualisieren. Da haben wir ja schon die Form $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$, jedenfalls in Beispielen $(72 : 2) : 3 = 72 : 6$, $3000 : 60 = (3000 : 6) : 10$ usw.

Nur durch aspektreiches inhaltliches Arbeiten kann die „Regel“ („Man teilt einen Bruch durch eine natürliche Zahl, indem man den Zähler beläßt und den Nenner mit der Zahl

multipliziert.“) ihren monströsen Charakter, den sie bei Reduktion auf die Syntax haben muß, allmählich verlieren.

Ferner wird in der Tabelle deutlich, daß das Produkt kleiner ist als beide Faktoren, wenn diese kleiner als 1 sind, eine ganz neue Erfahrung zur Multiplikation. Vor allem kann die Beziehung zum Kürzen und Erweitern aufgedeckt werden, nämlich als Multiplikation mit 1 (oder Division durch 1), z.B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, oder $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{5}$.

Zur *Division* einer Bruchzahl durch eine Bruchzahl wie z.B. $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ kann man in diesem Verkettungsmodell durch Beachten von *Umkehrabbildungen* gelangen. So läßt sich in Abbildung 43 der Operator $\cdot \frac{7}{3}$ auch als $: \frac{3}{7}$ umdeuten, wenn die Vorstellung entwickelt wird, daß $\cdot \frac{7}{3}$ die Umkehrung von $: \frac{3}{7}$ ist (und unterstellt wird, daß jeder solche

Operator genau einen Gegenoperator hat). Das Gleichsetzen von $: \frac{3}{7}$ mit $\cdot \frac{7}{3}$ bzw. von $: \frac{7}{3}$ mit $\cdot \frac{3}{7}$ kann auch wieder durch Bezug auf Erfahrungen mit der Division in \mathbb{N} gestützt werden. Die Aufgabe $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ wird somit auf konsequente Art in die gleichwertige

Aufgabe $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$ umgedeutet, und das kann auch als *erweitertes Enthaltensein* gedeutet

werden: $\frac{3}{7}$ ist $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}\right) = \frac{14}{15}$ -mal in $\frac{2}{5}$ enthalten (Abbildung 45). Und das heißt eben-

falls: $14 \cdot \frac{3}{7}$ muß gleich $15 \cdot \frac{2}{5}$ sein (Probe!).

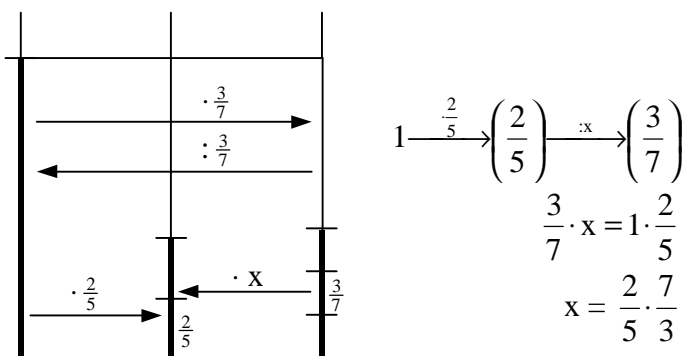


Abbildung 45: $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$ als Problem des Enthaltenseins

Die Deutung von $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ als Aufgabe des Enthaltenseins kann auch dazu animieren, die Divisionsaufgabe als Doppelbruch zu schreiben und dann Wissen über Bruchzahlen und

über Divisionserfahrung in \mathbb{N} einzubringen, was zu dieser fast zu eleganten Ableitung

$$\text{führt: } \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

11.4 Anteile als relative Häufigkeiten in 4-Felder-Tafeln

Handelt es sich um unteilbare Dinge (eben um Individuen) wie z.B. eine Menge von Personen, Häusern, Tieren, Fahrzeugen usw., so liegt in der Bruchzahl

$$\frac{\text{Anzahl der Individuen mit Eigenschaft E}}{\text{Anzahl der betrachteten Individuen insgesamt}}$$

ein Quantifizierungsmuster der Teil-Ganzes-Beziehung vor, die wie kaum eine andere „Anwendung“ die Bruchrechnung überhaupt motiviert, wie ja schon das Beispiel politische Wahlen für additive Zusammenhänge gezeigt hat.

Die Frage nach Anteilen ist in der *Beschreibenden Statistik* fundamental. Da möchte man aus bestimmten Gründen wissen, wie stark in einer Menge von Individuen eine Eigenschaft E vertreten ist. Ergibt dann eine Datenerhebung (Stichprobe) unter n Individuen, daß auf m Individuen die Eigenschaft E zutrifft, so heißt m die (*absolute*) *Häufigkeit* $H(E)$ von E, und $\frac{m}{n}$ heißt die *relative Häufigkeit* $h(E)$ von E. In der Bruchzahl

$h(E)$, die stets im Bereich von 0 bis 1 liegt, wird – aus Vergleichszwecken – von der Anzahl n der untersuchten Individuen *abstrahiert*. Es interessiert da weniger die Anzahl der E-Individuen $H(E)$, sondern ihr Anteil $h(E)$ an der Gesamtheit. So quantifiziert $h(E)$ gewissermaßen die E-Haltigkeit einer Gesamtheit von Individuen.

Sind z.B. $\frac{4}{5}$ der Schüler einer Schulklasse Mädchen, so wird das als auffallendes Übergewicht der weiblichen Schüler betrachtet, weil man eher einen Anteil von rd. $\frac{1}{2}$ für

„normal“ hält. Die relative Häufigkeit $\frac{4}{5}$ wird auf weitere unterschiedliche Arten ausgedrückt:

- Mädchenanteil $\frac{4}{5}$
- auf je 5 Kinder entfallen 4 Mädchen
- 4 von 5 Kindern sind Mädchen
- nur jedes 5. Kind ist ein Junge
- die Sexualproportion $\frac{\text{Anzahl weibl. Individuen}}{\text{Anzahl männl. Individuen}}$ ist $\frac{4}{1}$ bzw. 4 : 1
- das Geschlechterverhältnis („weiblich zu männlich“) ist 4 : 1

Es ist ein Beitrag zur heuristischen Schulung (Ausdrucksreichtum nutzen!), wenn diese Ausdrucksweisen im Unterricht verwendet und besprochen werden. Frühzeitige Standardisierung der Sprachen unterdrückt mögliche Zugänge zu Problemlösungen.

So ist z.B. die Zeitungsmeldung „Weiterhin 12% Arbeitslose in Aachen“ Veranlassung, diese Information zu erklären und zu erläutern und auf verschiedene Arten darzustellen.

Und dies ist eine Problemaufgabe, nicht nur weil geklärt werden muß, was hierbei die Gesamtheit (100%) ist. Mögliche Darstellungen sind

- Auf je 100 Erwerbspersonen entfallen 12 Erwerbsarbeit Suchende
- Auf je 25 Erwerbspersonen entfallen 3 Arbeitslose
- Fast jeder 8. ist arbeitslos
- Die Arbeitslosenquote beträgt 12%
- Der Anteil der Arbeitslosen an der Gesamtheit der Erwerbspersonen ist $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$
- Die relative Häufigkeit der Arbeitslosen bei allen Erwerbspersonen ist $\frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$
- Die Zahl der Arbeitslosen verhält sich zur Zahl aller Erwerbspersonen wie 12 : 100 bzw. 3 : 25
- Auf 22 Erwerbstätige (Nicht-Arbeitslose) entfallen 3 Arbeitslose

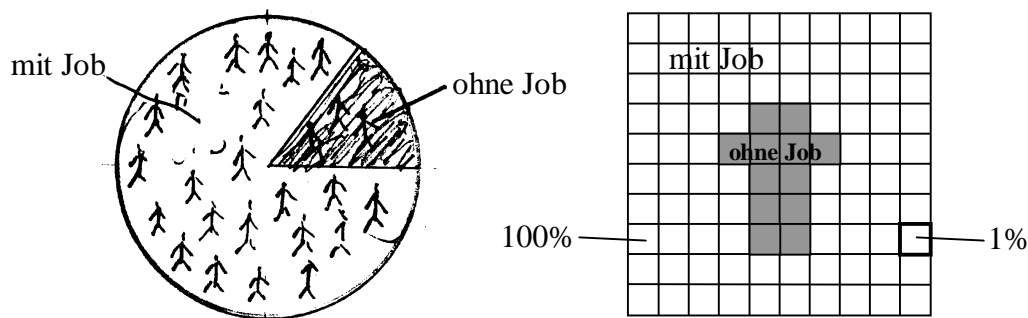


Abbildung 46: Arbeitslosenquote 12%

Der spezielle Bezug zur Bruchrechnung liegt darin, daß in der Bruchzahl 12% eine unendliche Klasse von Arbeitsmarktsituationen zu sehen ist:

$$\frac{3}{25} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} = \frac{120}{1000} = \frac{1200}{10000} = \frac{5061}{42175} = K$$

Die Beschäftigung mit Anteilen als relativen Häufigkeiten erhält aber erst dann wirklich Sinn, wenn Anteilsfragen nicht isoliert sondern in Zusammenhängen auftreten.

Ein fundamentaler Zusammenhang wird durch die Frage angesprochen: Haben die Merkmale X und Y etwas miteinander zu tun? Dabei sind Merkmale durch ihre Ausprägungen bestimmt. Das qualitative Merkmal Geschlecht hat nur die beiden Ausprägungen männlich/weiblich, das quantitative Merkmal Gewicht die Ausprägungen 1kg, 2kg, 17,5kg,...., (d.h. jede nicht negative reelle Zahl kommt prinzipiell in Frage).

Ein Initialproblem kann sein: Hat das Geschlecht etwas mit dem Hobby (in einer Menge etwa gleichaltriger Kinder) zu tun? Zugespitzt auf spezielle Ausprägungen: Ist bei Mädchen Lesen (wirklich) beliebter als bei Jungen? Diese Zuspitzung ist von einer Vorannahme (einer Hypothese) motiviert.

Eine Datenerhebung (Befragung) in unserer Klasse – vielleicht das interessanteste Untersuchungsgebiet überhaupt – mag so aussehen:

Geschlecht: 11 Mädchen, 15 Jungen

Hobby Lesen: 6 Mädchen, 4 Jungen

Daraus sollte die 4-Felder-Tafel als angemessene Darstellung erarbeitet werden (Abbildung 47)

$\begin{array}{c} \text{G} \\ \text{H} \end{array}$	♀	♂	
L	6	4	10
ℒ	5	11	16
	11	15	26

$\begin{array}{c} \text{G} \\ \text{H} \end{array}$	♀	♂	
L	$\frac{6}{26}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{10}{26}$
ℒ	$\frac{5}{26}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{16}{26}$
	$\frac{11}{26}$	$\frac{15}{26}$	1

G = Geschlecht
H = Hobby

Abbildung 47: 4-Felder-Tafel mit absoluten und relativen Häufigkeiten

Das Ergebnis (mehr Mädchen als Jungen unter den Lesefreudigen und dabei weniger Mädchen als Jungen in der Klasse) wird diskutiert und sollte zu der Frage führen: Was wäre denn für die Aufteilung der 10 lesefreudigen Kinder *zu erwarten*, wenn das Geschlecht nichts mit der Lesefreudigkeit zu tun hätte? Dann wären doch die 10 Lesefreudigen *anteilmäßig* auf Mädchen und Jungen verteilt worden. Zu erwarten wäre dann

$$\frac{11}{26} \text{ von } \frac{10}{26} = \text{Anteil Mädchen an der Klasse vom Anteil der Lesefreudigen in der}$$

Klasse

und

$$\frac{15}{26} \text{ von } \frac{10}{26} = \text{Anteil Jungen an der Klasse vom Anteil der Lesefreudigen in der Klasse}$$

(wobei eigentlich nur das erste zu bestimmen ist).

Was ist aber der Anteil (Bruchteil) von einem Anteil (Bruchteil), also $\frac{11}{26}$ von $\frac{10}{26}$?

Eine inhaltliche und am Alltagssprachverständnis orientierte Überlegung kann von diesem Grundverständnis ausgehen: $\frac{11}{26}$ von etwas (x) heißt: Teile das etwas (x) zuerst

durch 26 (bzw. nimm $\frac{1}{26}$ von x), dann vervielfache das Zwischenergebnis mit 11 (oder

$$\text{umgekehrt), also } \frac{11}{26} \text{ von } x = x \xrightarrow{\cdot \frac{1}{26}} \left(\frac{x}{26} \right) \xrightarrow{\cdot 11} \left(x \cdot \frac{11}{26} \right)$$

Damit bedeutet $\frac{11}{26}$ von $\frac{10}{26}$ dasselbe wie $\frac{10}{26} \cdot \frac{11}{26} = \frac{110}{676}$. Das wäre die relative Häufigkeit der lesefreudigen Mädchen an der Klasse, wenn das Geschlecht nichts mit der

Lesefreudigkeit zu tun hätte. Bei 26 Kindern wären das $\frac{110}{676}$ von 26 = $\frac{110}{26} \approx 4$ Mädchen.

Die 4-Felder-Tafel sähe dann bei 26 Kindern, davon 11 Mädchen, und 10 Lesefreudigen aus wie Abbildung 48 links zeigt.

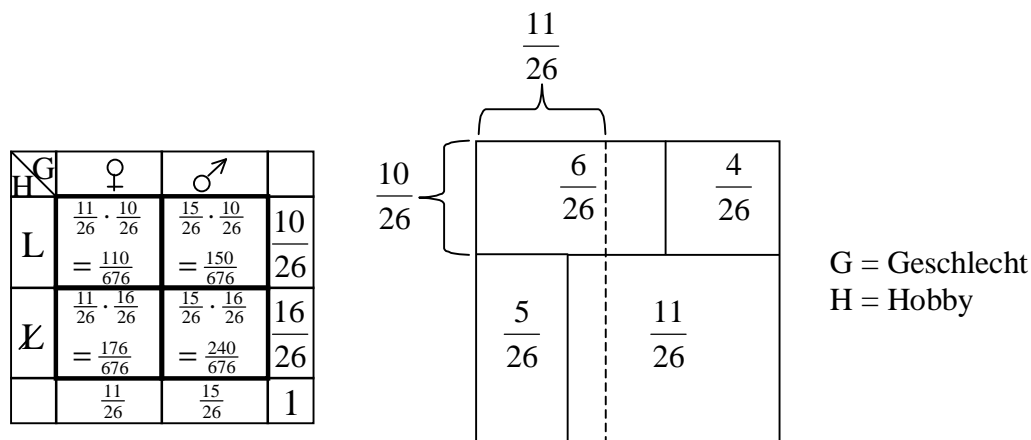


Abbildung 48: 4-Felder-Tafel mit erwarteten relativen Häufigkeiten und Darstellung von relativen Häufigkeiten im Einheitsquadrat

Es empfiehlt sich dringend, die relativen Häufigkeiten der 4-Felder-Tafel als Flächeninhalte von Rechtecken im Einheitsquadrat darzustellen (Abbildung 48 rechts). Man erhält so eine Verbindung zur Flächeninhaltsbestimmung und zur Unterteilung eines Quadrates, Bekanntes wird wieder aufgegriffen, ein Beispiel für kumulatives Lernen. Insbesondere wird in Abbildung 48 rechts der Vergleich zwischen empirischen Anteilen der 4 Gruppen (lesefreudige Mädchen, lesefreudige Jungen, nichtlesefreudige Mädchen, nichtlesefreudige Jungen) und ihren „theoretischen“ Anteilen bei Annahme der Unabhängigkeit sichtbar, was durch Färbung noch deutlicher gemacht werden sollte.

Dieses eine Beispiel (Geschlecht, Hobby), das für beliebig viele aus verschiedenen Bereichen des Lebens steht (Geschlecht/Einkommen, Wahlverhalten/Religion, Bildungsstand/Einkommen), belegt noch einmal, wie Bruchrechnen (additives und multiplikatives) mit einer grundlegenden Fragestellung (hier der Abhängigkeit/Nichtabhängigkeit zweier Erscheinungen) verbunden ist.

11.5 Anteile als Wahrscheinlichkeiten

In der frühen SI (und der Primarstufe) kommt es wesentlich darauf an, Zufallsprozesse selbstständig zu untersuchen und dabei die Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit von zufälligen Ereignissen auf einer qualitativen Skala von „unmöglich“, „fast unmöglich“, ... bis „fast sicher“, „ganz sicher“ zu lernen.

Dazu eignen sich u.a. Urnen-Experimente, das zufällige blinde Ziehen von Kugeln aus einer Urne (Lösen aus einer Lostrommel). Das Auffüllen einer Wahrscheinlichkeitskala am Beispiel des Ziehens einer Kugel aus unterschiedlich bestückten Urnen, wobei das Ziehen einer weißen Kugel ein Treffer sein soll, zeigt Abbildung 49. Die Beobachtung, daß man um so mehr Glück haben wird (um so mehr Chancen für einen Treffer man hat), je größer der Anteil der weißen Kugeln an allen Kugeln ist, führt auf Bruchzahlen. Da ist es dann plausibel, die beiden Extreme (unmöglich, keine Chance und sicher, 100%ig sicher) mit 0 und 1 festzulegen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist dann als Bruchteil der Sicherheit 1 zu sehen.

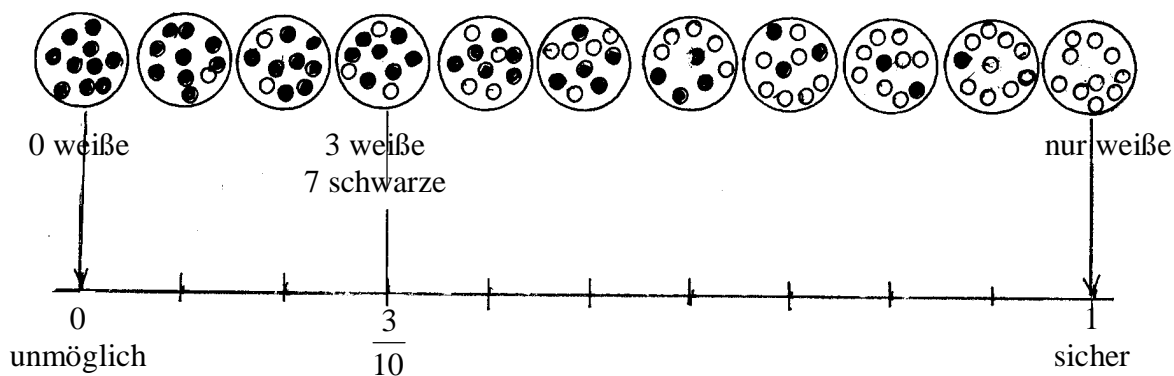


Abbildung 49: Bruchzahlen als Wahrscheinlichkeiten (beim einmaligen Ziehen, eine weiße Kugel zu ziehen)

Die Beurteilung der Chance, aus einer gegebenen Urne mit weißen und schwarzen Kugeln eine weiße zu ziehen (Treffer), ist dann gleichzeitig eine neue Sicht der Formänderung und des Größenvergleichs von Brüchen. Die Aufgabe in Abbildung 50 sollte allerdings nicht nur theoretisch erörtert, sondern auch durch praktische Zufallsversuche erlebt werden. Den Schülern muß voll bewußt werden, daß größere Chancen haben keineswegs bedeutet, daß man in einem realen Versuch auch wirklich gewinnt.

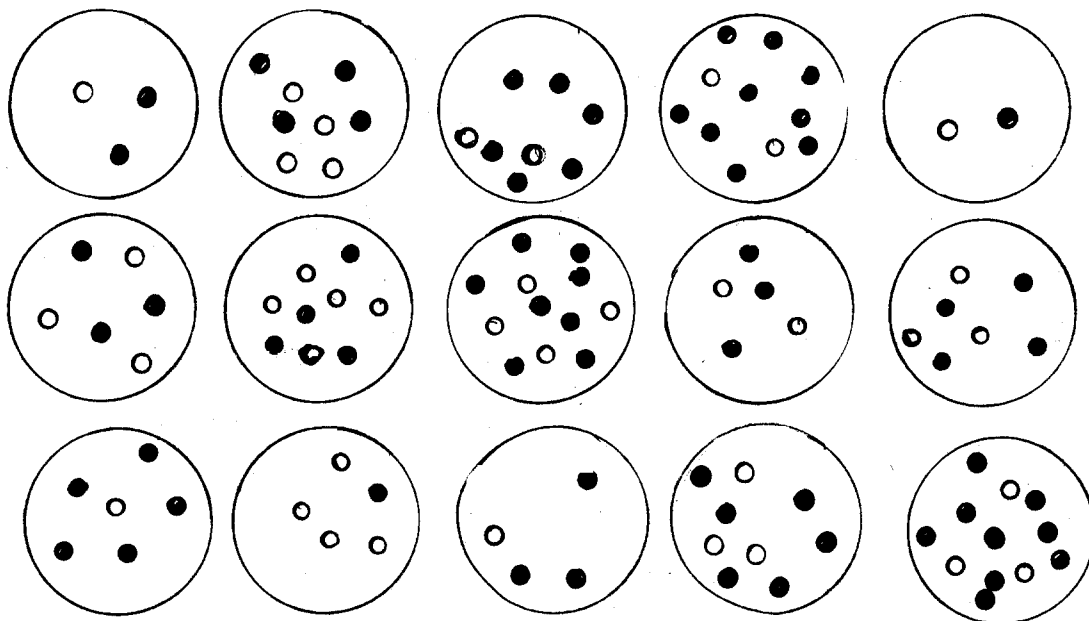


Abbildung 50: Eine Kugel wird gezogen; ist sie weiß, ist es ein Treffer. Welche der 15 Urnen bietet die meisten, die wenigsten Chancen? Ordne/klassifiziere die Urnen nach Trefferwahrscheinlichkeit.

Zur Addition/Subtraktion von Wahrscheinlichkeiten kann man kommen, wenn eine Urne nicht nur weiße/schwarze Kugeln enthält, sondern z.B. numerierte Kugeln (Abbildung 51). Die Aufgabe Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen auf gut Glück eine ungerade Zahl oder eine Primzahl zu ziehen? führt auf die Rechenaufgabe

$$\frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$$

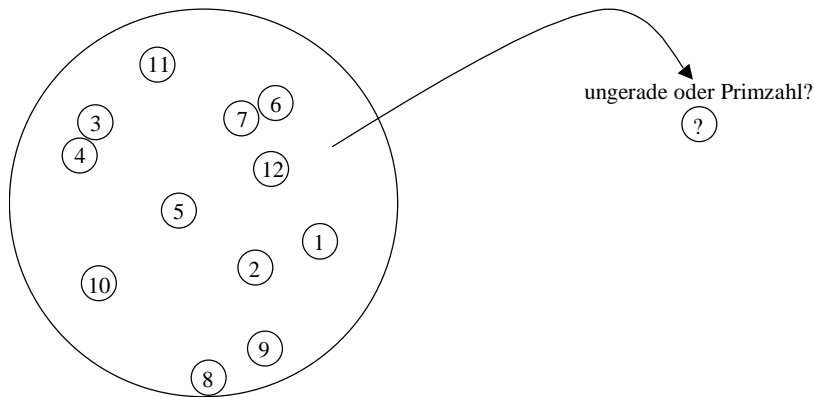


Abbildung 51: Urne mit nummerierten Kugeln; Wie groß ist beim Ziehen einer Zahlkugel die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl ungerade oder prim ist?

Die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten rückt gut ins Blickfeld, wenn der Zufallsprozeß zwei- oder mehrstufig ist, wenn also z.B. aus 2 Urnen nacheinander je 1 Kugel gezogen wird (vgl. auch das Würfelbeispiel im Anhang).

Als Initialaufgabe kann gelten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 weiße Kugeln zu ziehen, wenn nacheinander je eine Kugel aus den beiden Urnen (Abbildung 52) gezogen wird?

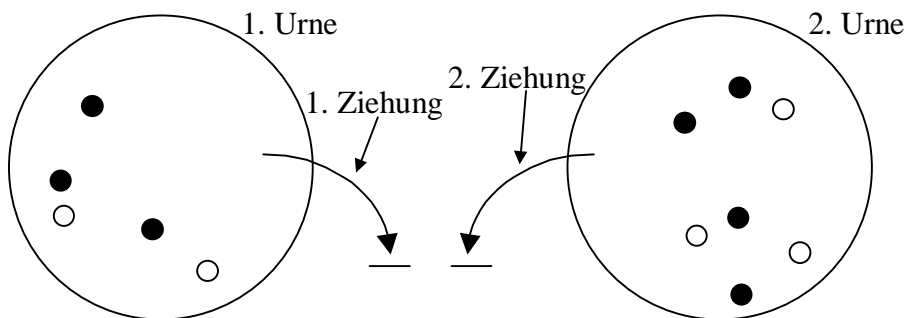


Abbildung 52: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zweimal weiß (WW), wenn aus jeder der beiden Urnen je 1 Kugel blind gezogen wird?

Die Lösung dieses schönen und keineswegs trivialen Problems kann an einer Baumdarstellung erarbeitet werden (Abbildung 53).

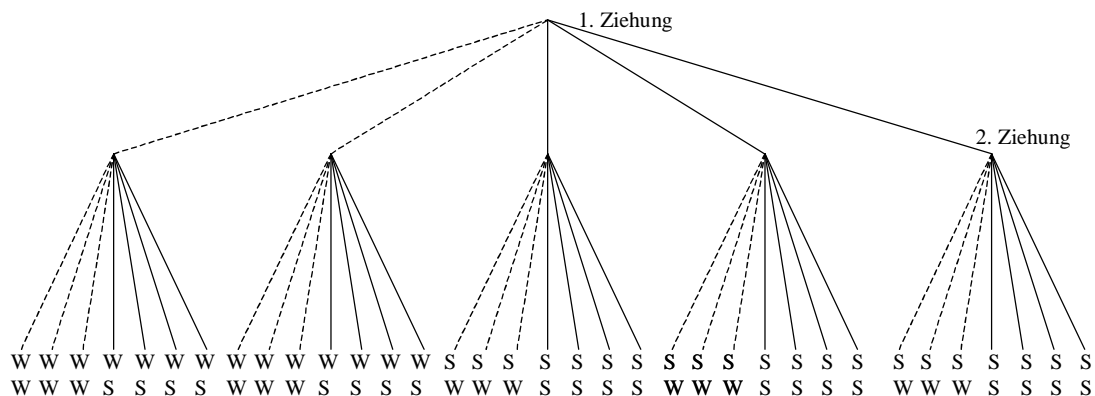


Abbildung 53: Zur Lösung der Aufgabe in Abbildung 52

Da ist zunächst zu begründen, daß es – wenn man die Kugeln je numeriert, $5 \cdot 7 = 35$ Ausgänge des Zufallsversuchs gibt. Unter diesen gibt es $2 \cdot 3 = 6$ Ausgänge mit 2 weißen Kugeln. Es ist so, als ob man aus einer Urne mit 35 Kugeln zieht, von denen $2 \cdot 3 = 6$ ganz weiß, 17 schwarz-weiß und $3 \cdot 4 = 12$ ganz schwarz gefärbt sind. Also ist die Wahrscheinlichkeit für WW $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$. Es erscheint plausibel, dies deshalb als Produkt von $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ anzusehen, weil die Wahrscheinlichkeit für WW als $\frac{3}{7}$ von $\frac{2}{5}$ verstanden werden kann. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für WS oder SW $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{17}{35}$ und für SS $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$. Es handelt sich jeweils um den Anteil von einem Anteil an der Sicherheit 1.

Das ist ein Beispiel zum sogen. Produktsatz für voneinander unabhängige Ereignisse E, F eines Zufallsversuchs: Ist E unabhängig von F, genau dann gilt

$$P(E \text{ und } F) = P(E) \cdot P(F)$$

Wobei „P“ Wahrscheinlichkeit bedeutet und „E und F“ das Ereignis ist, das eintritt, wenn sowohl E als auch F eintreten.

Zur Schulung der Intuition für das Erfassen von Zufallsphänomenen ist es sehr wichtig, immer wieder zu erfahren, daß das gleichzeitige Eintreten mehrerer (voneinander unabhängiger) Ereignisse weniger wahrscheinlich ist, als das Eintreten eines der Ereignisse. Das ist wiederum eine inhaltliche Füllung der Tatsache, daß das Produkt zweier Bruchzahlen kleiner als jeder der beiden Faktoren ist, wenn diese beide kleiner als 1 sind.

Beim 10-maligen Münzwurf ist es extrem weniger wahrscheinlich, jeweils Zahl zu werfen, als einmal unter den 10 Würfeln Zahl zu werfen. Es ist wahrscheinlicher „einen Schüler zu treffen, der in einem Fach die Note 1 hat als einen Schüler, der in 2, 3,... allen Fächern die Note 1 hat. Daß zwei zufällig aufeinander treffende Personen beide im selben Monat geboren sind, beträgt $\frac{1}{12}$ (bei vereinfachten Annahmen), daß sie beide im

Juli geboren sind, aber nur $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$, und daß sie beide „Christkinder“ sind (Geburtstag am 25.12.), hat nur eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit

$\frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365} \approx 0,0000075$ usw.

Der Hebel

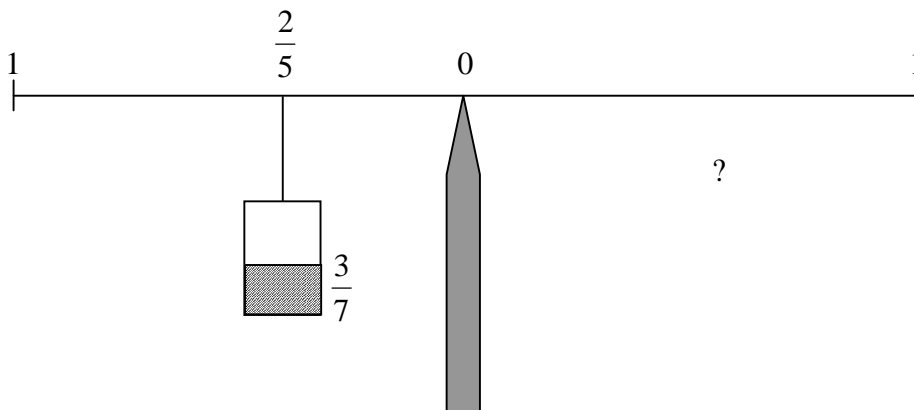


Abbildung 54: Wie ist Gleichgewicht herzustellen?

Ein Initialproblem ist: Auf der linken Seite eines zweiarmigen Hebels (Abbildung 54) zieht bei $\frac{2}{5}$ (einer Längeneinheit) Armlänge eine Kraft, die $\frac{3}{7}$ (einer Gewichtseinheit)

beträgt. Was kann man auf der rechten Seite tun, damit Gleichgewicht herrscht? Das einfachste ist natürlich die spiegelbildliche Ergänzung: Man hängt rechts bei Hebelarm $\frac{2}{5}$ ein Gewicht $\frac{3}{7}$ an. Aber – und das ist eben ein Ausdruck des Hebelgesetzes – es gibt

unendlich viele weitere Möglichkeiten, es muß nur Armlänge \times Gewichtskraft rechts einen festen Wert haben, der dem auf der linken Seite gleich ist. Wählt man z.B. rechts die Armlänge 2, also das 5-fache der linken Armlänge, so muß das Gewicht rechts gleich dem 5-ten Teil des linken sein, also $\frac{3}{7} : 5 = \frac{1}{5}$ von $\frac{3}{7} = \frac{3}{35}$. Damit ist $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} =$

$2 \cdot \frac{3}{35}$. Wählt man rechts die Armlänge 1 (die $\frac{5}{2}$ -fache von links), so muß das Gewicht

rechts $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{7}$ betragen, damit ist $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = 1 \cdot \left(\frac{2}{5} \text{ von } \frac{3}{7} \right) = \frac{2}{5} \text{ von } \frac{3}{7}$, wiederum die

„von-Deutung“ von „mal“!

Dieses Spiel fortgesetzt ergibt eine prinzipiell unendliche Kette von Gleichungen

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot \frac{3}{5 \cdot 7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{5 \cdot 7} \cdot 3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 3}{7} = 3 \cdot \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = K$, die Ausdruck des Hebelge-

setzes ist und jeder Ausdruck darin (Kraftarm \times Kraft) kann auch als Weg gedeutet wer-

den, die Aufgabe $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ verständig zu lernen.

Eine Umdeutung (Analogiebildung!) kann ins Bürgerliche Rechnen führen, etwa

Hebelarm $\hat{=}$ Einzelpreis (Preis pro Wareneinheit, z.B. Preis pro kg)

Kraft $\hat{=}$ Warenmenge (etwa Gewicht in kg)

Dann ist Warenmenge \times Einzelpreis = Kosten $\hat{=}$ Drehmoment. Konstante Kosten, z.B. 20 DM, können auf unendlich viele Arten entstehen, zu doppelter Warenmenge gehört der halbe Einzelpreis und umgekehrt; wir haben *Antiproportionalität*.

Die Verbindung zum additiven Bruchrechnen wird durch Erweiterung auf mehrere Gewichtskräfte an verschiedenen Hebelarmen erzielt. Eine Problemaufgabe ohne Worte ergibt Abbildung 55.

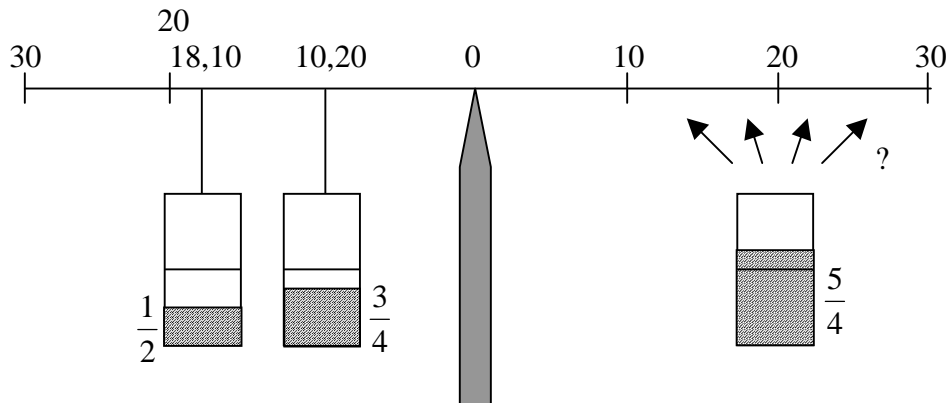


Abbildung 55: Wie lang ist der rechte Hebelarm, wenn Gleichgewicht herrschen soll?

Sie führt nach dem Hebelgesetz auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
 18,10 \cdot \frac{1}{2} + 10,20 \cdot \frac{3}{4} &= x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = x \cdot \frac{5}{4} \\
 9,05 + 7,65 &= x \cdot 1,25 \\
 16,70 &= x \cdot 1,25 \\
 x &= \frac{16,70}{1,25} = \frac{1670}{125} = 13,2
 \end{aligned}$$

und läßt eine fast lebensnahe Deutung als Mischungsproblem zu, etwa die vielzitierte

Kaffeemischung: $\frac{1}{2}$ kg Kaffee mit kg-Preis 18,10 DM wird mit $\frac{3}{4}$ kg Kaffee mit kg-

Preis 10,20 DM gemischt. Wie hoch ist der kg-Preis der Mischung? ($13,20 \frac{\text{DM}}{\text{kg}}$). Die

Schüler können aufgefordert werden, nach andersartigen passenden Situationen zu suchen. Die allgemeine Form ist, einen gewichteten Durchschnittswert zu bilden.

Hebeldeutungen sind in heuristischer Hinsicht auch deshalb so wertvoll, weil sie den Gleichungsgedanken begreifbarer machen können.

11.6 Radfahren und Getriebe

(Jahnke, Th. 1992, Jannack 1995)

Schon das Hochrad aus der Frühgeschichte des Fahrrades bringt ein wenig Bruchrechnung ins Spiel (Abbildung 56).

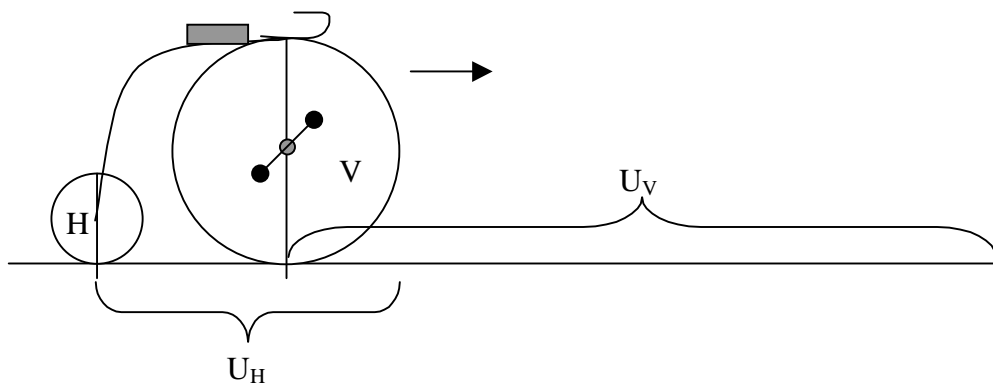


Abbildung 56: Hochrad

Das Verhältnis der Radien der beiden Räder V (Vorderrad) und H (Hinterrad), also $r_V : r_H$ bzw. $r_H : r_V$ schlägt sich in den Umfängen, Umdrehungszahlen und Drehwinkeln nieder. Ist das Verhältnis $r_V : r_H = 7 : 3$ (Abbildung 56), dann heißt das ja $r_H = \frac{3}{7}$ von $r_V = \frac{3}{7} r_V$ und $r_V = \frac{7}{3} r_H$. Dreht sich V einmal voll, so wird sein Umfang U_V auf der Straße als Strecke abgerollt. Das Rad H legt dabei (in derselben Zeit) dieselbe Strecke zurück, es muß sich, da es kleiner ist, schneller drehen, es muß sich $\frac{7}{3}$ mal so schnell drehen wie V. Die Drehgeschwindigkeit der beiden Räder H und V verhalten sich zueinander wie $3 : 7$, ihre Umfänge wie $7 : 3$. Dreht sich das Rad V 2-mal, $1\frac{3}{4}$ -mal,..., so dreht sich das Rad H $\frac{7}{3} \cdot 2$ -mal, $\frac{7}{3} \cdot 1\frac{3}{4}$ -mal,... Wir sind beim Multiplizieren von Bruchzahlen. Interessanter als das Hochrad ist ein modernes Fahrrad mit Kettenblatt und Ritzel (Abbildung 57) als den entscheidenden (Zahn-)Rädern, die über die Kette in Verbindung stehen.

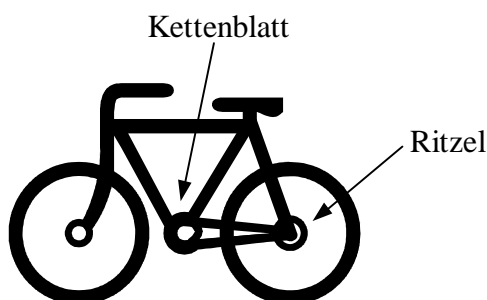


Abbildung 57: Modernes Fahrrad mit Ritzel und Kettenblatt

Der Umfang dieser beiden Räder wird in Zähnen gemessen, und $\frac{\text{Anzahl der Zähne auf Kettenblatt}}{\text{Anzahl der Zähne auf Ritzel}} = \frac{K}{R}$ heißt das Übersetzungsverhältnis oder kurz die Übersetzung. Als Bruchzahl gibt $\frac{K}{R}$ an, wieviel mal so schnell sich das Ritzel wie das

Kettenblatt dreht: Anzahl Drehungen des Ritzels = $\frac{K}{R}$ -mal Anzahl Drehungen des

Kettenblattes. Das muß durchgespielt werden. Die Übersetzung wird größer, wenn K größer oder R kleiner wird oder beides zugleich geschieht. Sie wird kleiner, wenn K kleiner oder R größer wird oder beides passiert. Ist $K = R$, dann ist die Übersetzung 1 : 1, das Ritzel bewegt sich so schnell wie das Kettenblatt usw.

Eine Initialaufgabe kann lauten:

Untersuche das Radfahren mit einem Fahrrad, an dem $K = 38$, $R = 24$ ist und dessen beide Laufräder einen Umfang von 2,05m haben, was einem Durchmesser von 26 Zoll (1 Zoll = 2,54 cm) entspricht. Interessant ist da u.A. die Frage nach der sog. Entfaltung: Welche (gerade, ebene) Strecke legt das Fahrrad bei einer vollen Drehung des Kettenblattes (einer vollen Pedalumdrehung) zurück? Es ergibt sich hier

$$\text{Entfaltung} = \text{Übersetzung} \cdot \text{Umfang} = \frac{38}{24} \cdot 2,05\text{m} = 3,25\text{m}$$

Die Thematik kann ausgeweitet z.B. auf die Besprechung von Gangschaltungen eines Mountain-Bikes (Jannack 1995) und verallgemeinert werden auf Übertragungen von Rad zu Rad überhaupt. Es gibt ein reiches Erfahrungsfeld für multiplikatives Rechnen mit Bruchzahlen, wie allein die Übertragungskette von Abbildung 58 zeigt, die sich beliebig variieren und verlängern läßt vgl. auch das Beispiel im Anhang).

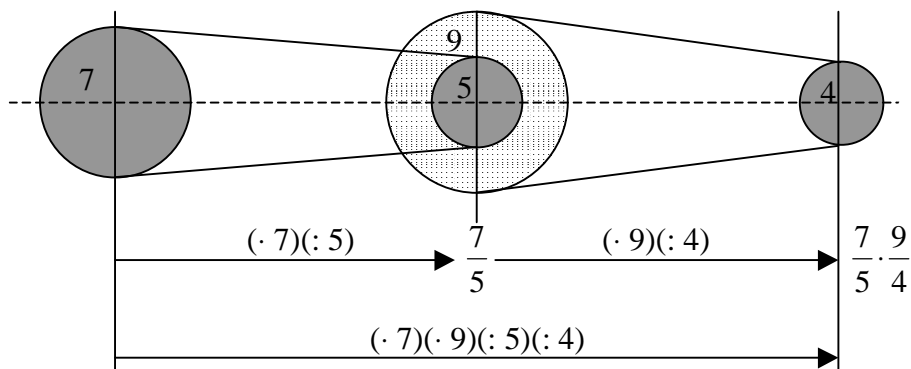


Abbildung 58: Multiplikation von Bruchzahlen in Triebwerken

Dabei beobachtet man zweckmäßigerweise die Drehzahlen: Dreht sich das 7er-Rad 1-mal, 2-mal,..., m-mal, dann das 5er-Rad (und mit ihm das 9er-Rad) $\frac{7}{5}$ -mal, 14-mal,...,

$\frac{7}{3}$ · m-mal. Das 5er- und das 9er-Rad sind fest miteinander verbunden.

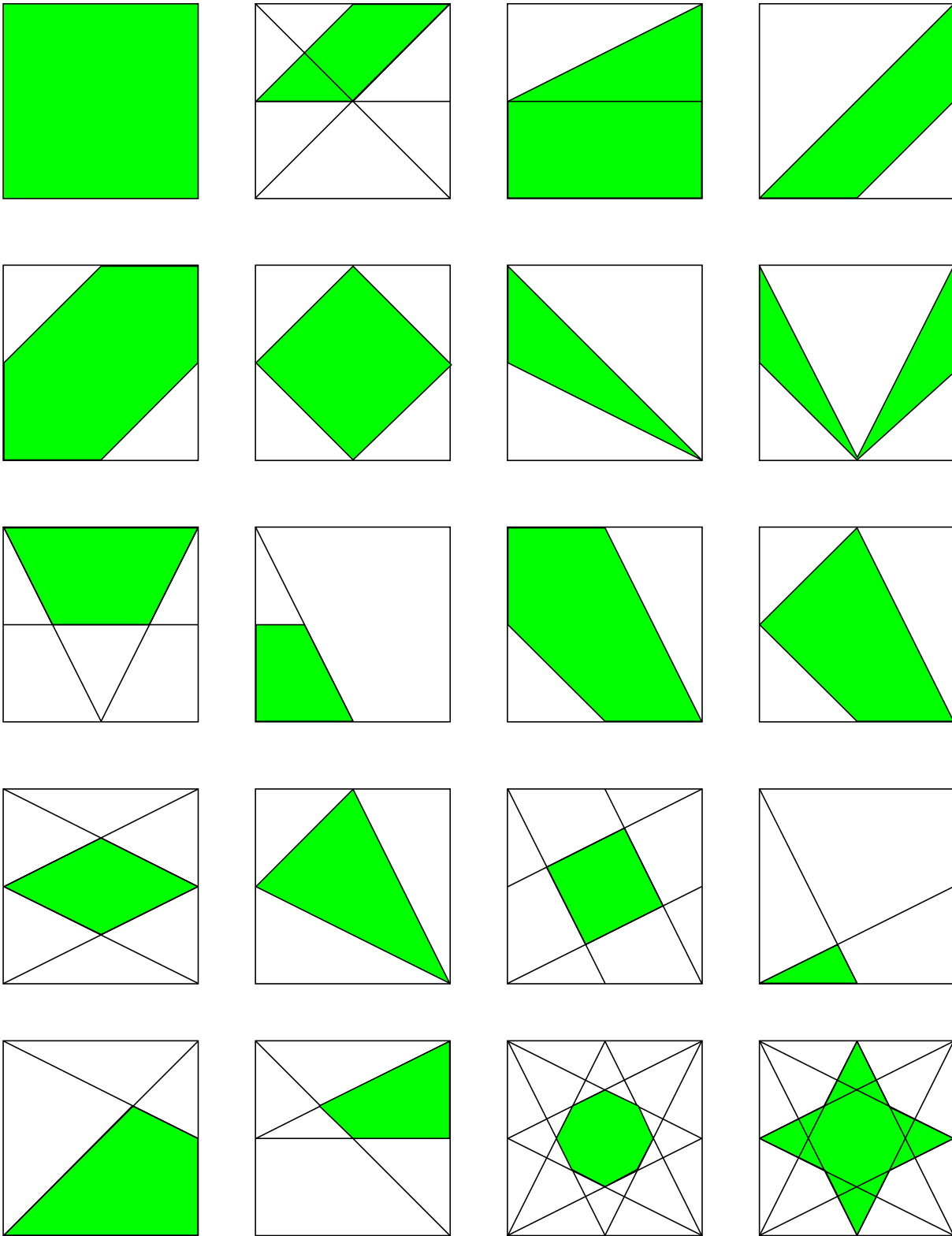
12 Literaturverzeichnis

- BAIREUTHER, P.: Bruchrechnen mit Streifen, in: Henning, H. (Hrsg.): Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung – Festschrift zum 75. Geburtstag von H. Besuden, Bültmann & Gerriets 1999, S. 13-21
- BESUDEN, H.: Verwendung von Arbeitsmitteln für die anschauliche Bruchrechnung, Arbeitsmappe
- FLACHSMEYER, J.: Bruchrechnung in einem geometrischen Kontext ebener Gitterpunktfiguren in Henning, H. (Hrsg.): Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung, Festschrift zum 75. Geburtstag von H. Besuden, Bültmann & Gerriets 1999, S. 23-46
- FREUDENTHAL, H. (Hrsg. u. Autor): Brüche, ML Heft 16 (1986), darin die Beiträge von Freudenthal: Warum noch Bruchrechnen? (S. 1), Bruchrechnen lernen – wie und warum? (S. 4-7)
- FRICKE, A.: Operative und anwendungsorientierte Behandlung der Bruchrechnung, Vortrag auf der GDM-Tagung 1999 in Bern, erscheint in Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker 1999
- FÜHRER, L.: Logos und Proportion – Gestaltliche Aspekte von Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung, Ms. 1998 Uni Frankfurt
- FÜHRER, L.: Brüche – Lebensnähe – Bruchrechnung, erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker 1999
- HASEMANN, K./ MANGEL, H.-P.: Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr, in: JMD 20 (1999), Heft 2/3, S. 138-165
- HEFENDEHL-HEBEKER, L.: Brüche in Reih´ und Glied, Arbeitsheft für das 5. und 6. Schuljahr, in: ML 1986, 16, S. 21-32
- HEFENDEHL-HEBEKER, L.: Nummern für die Brüche – was gedankliches Ordnen vermag, in: ML 1998, Heft 86, S. 20-22
- JAHNKE, H.N.: Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweise als didaktisches Problem, Materialien und Studien Band 10, IDM 1978
- JAHNKE, TH. (Hrsg. u. Autor): Bruchrechnung verstehen, ML Heft 73 (1995), darin: Jahnke, Th.: Bruchrechnung – ein Dauerthema?, S. 4-5
- JAHNKE, TH. (Hrsg. u. Autor): Wahlen, ML-Heft 88, 1998
- JANNACK, W.: Wie viele Gänge hat ein Mountain-Bike? In: ML Heft 69, 1995, S. 50-51
- KURTH, I.: Einstieg(e) in die Bruchrechnung, in ML 1995, Heft 73, („Bruchrechnung verstehen“), S. 20-49
- LIETZMANN, W.: Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, Teubner 1912, Nachdruck mit einer Einführung von W. Hestermeyer, Schöningh 1955
- MALLE, G.: Variable – Basisartikel mit Überlegungen zur elementaren Algebra, ML Heft 15 Buchstabenrechnen, 1986, S. 2-8
- MENNINGER, K.: Zur Geschichte der Bruchrechnung, in MU 1 (1955), Heft 2, S. 5-17
- MORRISON, PH. U. PH.: ZEHN^{Hoch}, Spektrum Verlag 1988
- PADBERG, F.: Didaktik Bruchrechnung, Bibl. Institut, Wissenschaftsverlag 1989
- PADBERG, F.: Die Bruchrechnung – ein überflüssiges Relikt aus längst vergangenen Zeiten? in: Henning, H. (Hrsg.): Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung, Festschrift zum 75. Geburtstag von H. Besuden, Bültmann & Gerriets 1999, S. 75-82
- PROFKE, L.: Bruchrechnung im Mathematikunterricht, in: Postel, H. /Kirsch, A. /Blum, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Schroedel 1991, S. 143-155
- SCHÖNWALD, K.: Psychologische Betrachtungen zur Bruchrechnung in der Schule, in: MU 1 (1955), S. 37-50
- SEIDEL, K.: Wie viele Brüche lassen sich kürzen? In: Devendran, Th. (Hrsg.): Das Beste aus dem mathematischen Kabinett, Deutsche Verlagsanstalt 1990, S. 21-23
- STREFLAND, L.: Pizzas – Anregungen, ja schon für die Grundschule, in ML 1986, Heft 16 (Brüche), S. 8-11

- STREFLAND, L.: Über die N-Verführer in der Bruchrechnung und Maßnahmen zu ihrer Bekämpfung, in: MU 32 (1986), Heft 3, S. 45-52
- TREFFERS, A.: Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. Und 4., Schuljahr, in: ML 1983 Heft 1, S. 15-20
- VOLLRATH, H.-J.: Ähnlichkeit von Rechtecken, in: Beiträge zur Mathematikdidaktik – Festschrift für Wilhelm Oehl, Schroedel 1976, S. 111-129
- WALTHER, G.: Design einer Lernumgebung zur Bruchrechnung für Schüler und Lehrerstudenten: Ägyptische Dreiecke, in: Selter, C./Walther, G.: Mathematik als design science, Festschrift für E.C. Wittmann, Klett 1999, S. 234-244
- WINTER, H.: Zahl und Zeichen – die semiotische Dimensionen im mathematischen Lernprozeß, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, Schroedel 1970, Bd. 1, S. 157-171
- WINTER, H.: Strukturorientierte Bruchrechnung, in: Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Schroedel 1976, S. 131-165
- WINTER, H.: Geometrie vom Hebelgesetz aus – ein Beispiel zur Integration von Physik und Mathematikunterricht, in: MU 24 (1978), H.5, S. 88-125
- WINTER, H.: Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe, in: math. Did. 5 (1982), Heft 4, S. 185-211
- WINTER, H. (Hrsg. u. Autor): Üben, ML-Heft 2, 1984, darin
Basisartikel: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, S. 4-16,
Bruchrechnen am Streifenmuster, S. 24-28, Übungen mit Stammbrüchen, S. 49
- WINTER, H.: Mann kann doch nicht Kilometer durch Stunden teilen, ... in: ML Heft 16, 1986, S. 42-43
- WINTER, H.: Teilbarkeitslehre im Quadratgitter, in: Henning, H. (Hrsg.): Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung, Festschrift zum 75. Geburtstag von H. Besuden, Bültmann & Gerriets 1999a, S. 83-92
- WINTER, H.: Gestalt und Zahl – zur Anschauung im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der pythagoreischen Zahlentripel, in: Selter, C./Walther, G.: Mathematik als design science, Festschrift für E.C. Wittmann, Klett 1999b, S. 254-269

13 Ergänzendes Material (Anhang)

13.1 Aufgaben zur Bruchrechnung mit Quadraten (Flächeninhalte)



13.2 Bruchrechnen zum Anfassen (Spiele mit Kreissektoren, Pizzastücken)

Material: Kreise gleicher Größe (ca. 15 cm Durchm.) aus steifer Pappe (besser noch Sperrholz o. Ä.) ausschneiden, in Halbe, Viertel,... zerlegen. Sektoren derselben Größe auf einer Seite einfärben (z. B: Halbe rot, Drittel gelb...)

Aktivitäten (u. A.)

- Sektoren durch übereinanderlegen vergleichen, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{2} < \frac{4}{7}$, $\frac{1}{2} > \frac{2}{5}$, K
- Bruchteile per Augenschein bestimmen: Ein Sektor wird mit der neutralen Seite gezeigt. Ist es $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$?
- Bruchteile ertasten: Ein Schüler soll mit verbundenen Augen aus einem Haufen von Sektoren einen $\frac{1}{7}$ -Sektor finden. Oder: Ein Schüler soll mit verbundenen Augen einen ihm in die Hand gelegten Sektor bestimmen
- Partnerspiel zum additiven Rechnen: Ein Vollkreis (1) soll ausgelegt werden, indem abwechselnd jeder Schüler seinen Sektor einfügt. Jede Größe darf höchstens einmal vorkommen. Sieger ist, wer den letzten Sektor legt, der den Kreis genau schließt oder den Gegner zum „Überlauf“ (Summe > 1) zwingen würde.

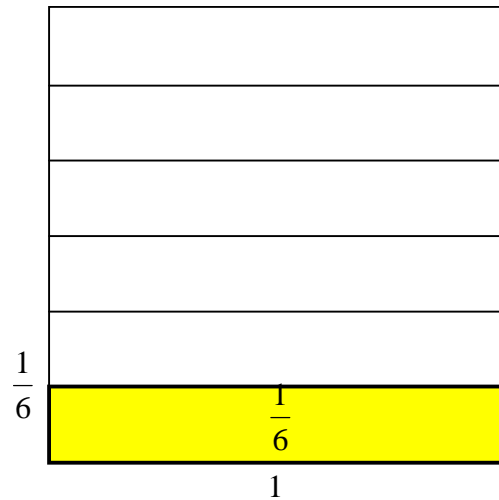
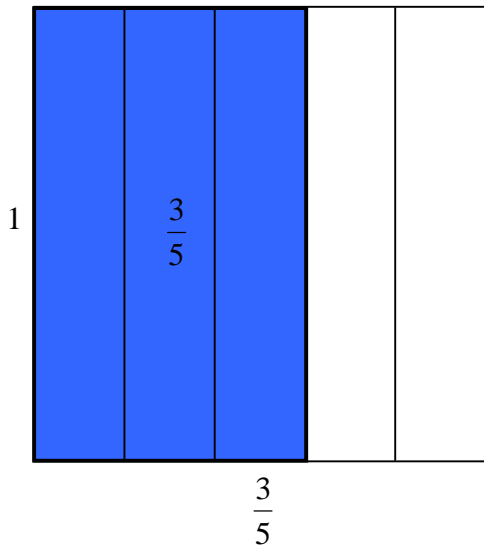
Mögliche Spielverläufe (bei Halben bis Zehnteln)

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{A} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} (1) \text{ oder } \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{A} & \text{B} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{array} \left(\frac{39}{40}\right) \text{ oder } \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{A} & \text{B} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array} \left(\frac{389}{420}\right)$$

Variationen: Anderes Ziel (anstatt 1 z. B. $\frac{6}{7}$); weitere Sorten; mehrmaliges Auftreten einer Sorte usw.

13.3 Geometrische Bruchrechnung am Rechteck (Flächeninhalte)

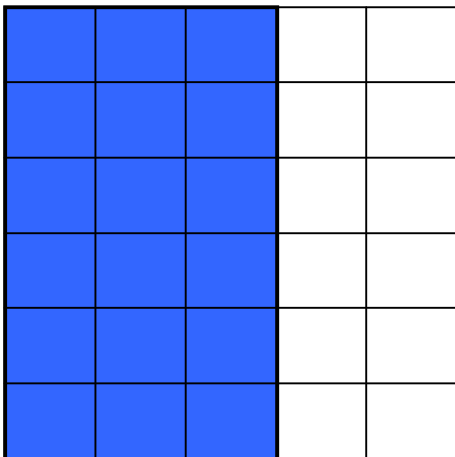
Konstruktion



$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}$$

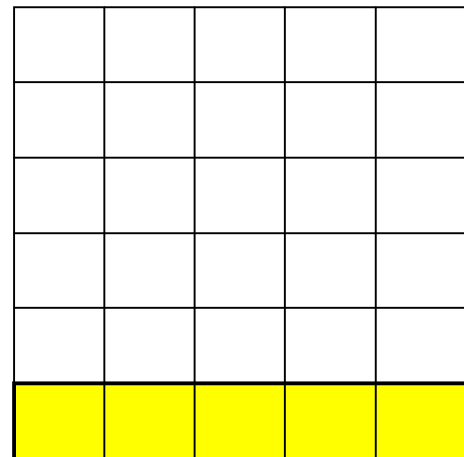
Formänderung (Vergleichbarkeit)

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30}$$



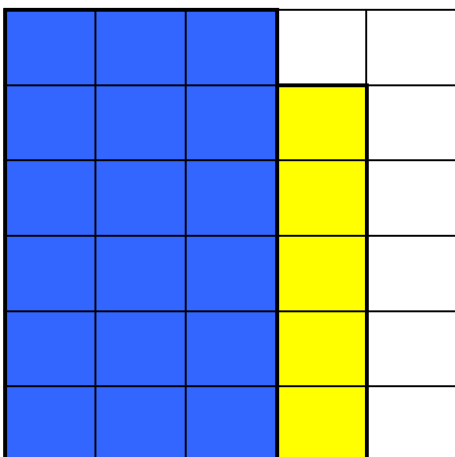
$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6} < \frac{3}{5}$$



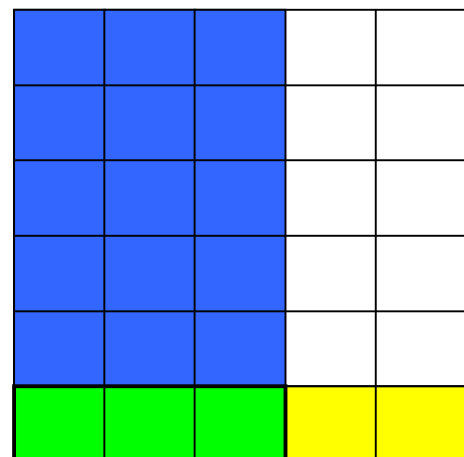
Addition

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{18}{30} + \frac{5}{30} = \frac{23}{30}$$



Multiplikation

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

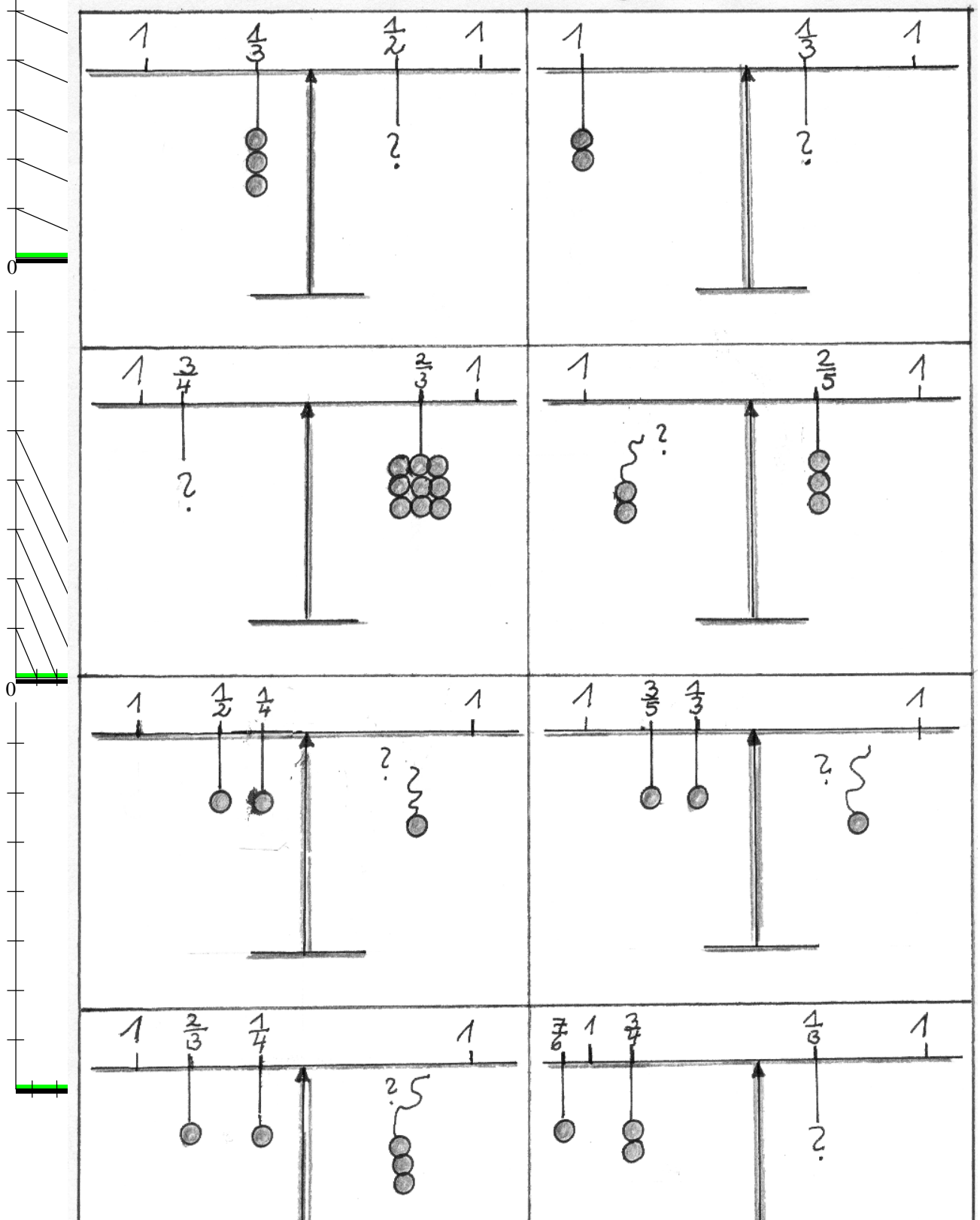


13.4 Geometrische Bruchrechnung an der Zahlengeraden

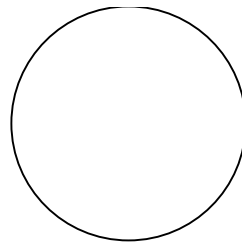
Konstruktion

13.5 Aufgaben zur Bruchrechnung am Hebel

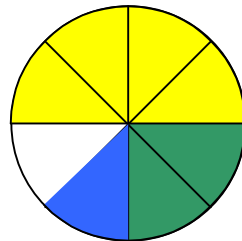
Sorge für Gleichgewicht.



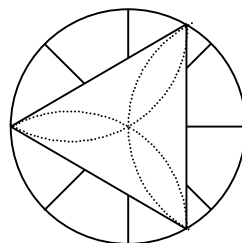
13.6 Bruchrechnen am Tageskreis - Herstellen des Tageskreises (24 Stunden)



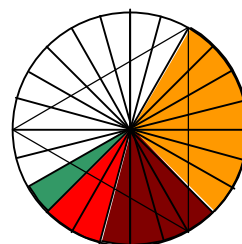
Kreis auf Papier zeichnen
(z. B. mit Hilfe einer Dose)
Kreis ausschneiden



Kreis falten, so daß Halbe,
Viertel und Achtel entstehen



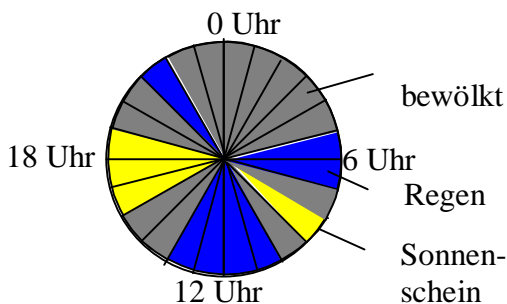
3 Kreisabschnitte einfalten,
so daß ein gleichseitiges
Dreieck entsteht



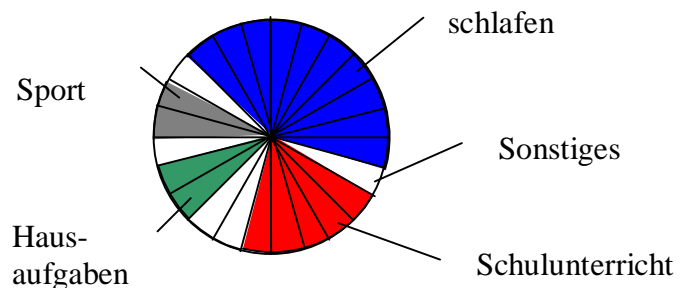
Kreis weiter falten, so daß
Drittel, Sechstel, Zwölftel
und Vierundzwanzigstel
entstehen

Beispiele für Tageskreise

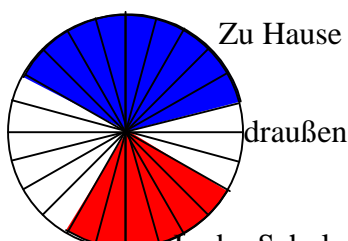
Das Wetter heute



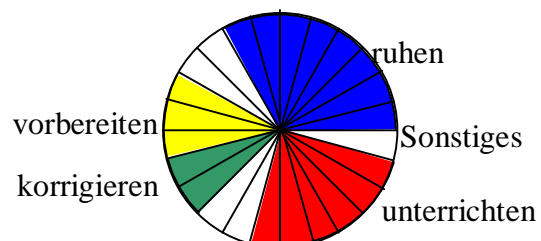
Mein Tagesablauf heute



Wo ich heute war

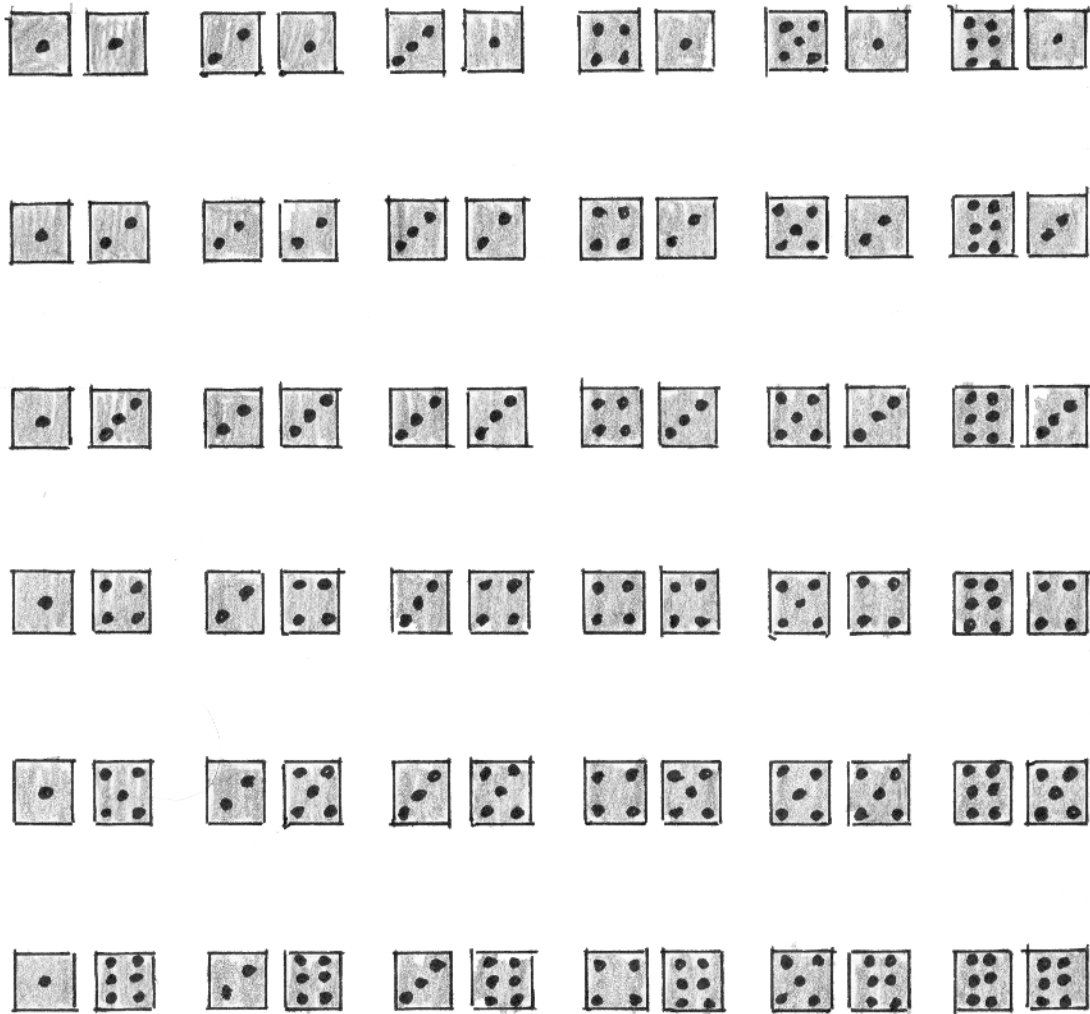


Der Tagesablauf meiner Lehre-



13.7 Aufgaben zu Bruchzahlen als Wahrscheinlichkeiten

Wurf mit zwei verschiedenfarbenen Spielwürfeln

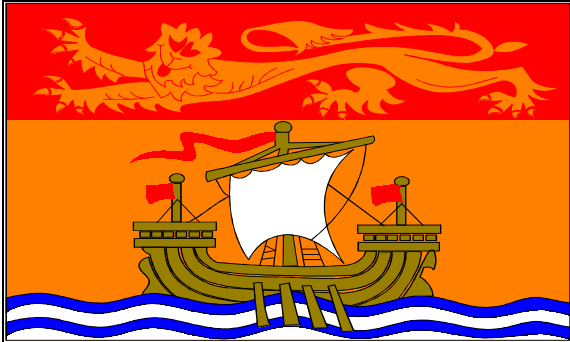


Wie wahrscheinlich ist es, daß folgende Ereignisse passieren?

- Keine Sechs
- Genau eine Sechs
- Zwei Sechsen
- Mindestens eine Sechs
- Eine blaue Sechs
- Pasch (rote Zahl = blaue Zahl)
- Kein Pasch
- Sequenz (benachbarte Zahl)
- Rote Zahl = blaue Zahl + 1
- Augensumme 7
- Augensumme 10
- Augensumme 2 oder 11
- Augensumme 7 oder 8
- Augensumme < 7
- Augensumme mindestens 6
- Blaue Primzahl
- Beide Zahlen Primzahlen
- Keine Primzahl
- Mindestens eine Quadratzahl
- Zwei gerade Zahlen
- Gerade rote Zahl
- Rote Zahl gerade, blaue Zahl ungerade
- Augenprodukt 6
- Augenprodukt > 36

13.8 Mass-Stabs-Aufgaben

- Überprüfe, ob alle Rechtecke dasselbe Seitenverhältnis haben.
- Bestimme den Massstab zwischen allen Paaren von Rechtecken. Fülle dazu die Tabelle aus.
- Wie verhalten sich entsprechende Flächeninhalte zueinander?



	O	A	B	C	D	E
2 C	1:1	2:1				4:5
A	1:2	1:1				
B						
C						
D				4:5		
E						

