Modulfunktionen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 22.07.2009

Martin Euskirchen

In diesem Vortrag werden spezielle Modulformen - die sogenannten *Modulfunktionen* - behandelt. Diese sind unter den bereits bekannten *Modulsubstitutionen*

$$\tau \mapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{mit} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := SL(2;\mathbb{Z})$$

invariant. Das Hauptergebnis des Vortrags wird sein, dass man mit der auf ganz $\mathbb{H}$ holomorphen *absoluten Invariante* $j = j(\tau)$ jede Modulfunktion beschreiben kann. Zum Schluss erhält man aus den Abbildungseigenschaften von j den *Kleinen Satz von* Picard.

(0.1) Bemerkung
In der gesamten Ausarbeitung steht

- $z \in \mathbb{C}$ für komplexe Zahlen der Form $z = x + iy$.
- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\ ; \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C}$ für die obere Halbebene.
- $\Gamma := \mathrm{SL}(2;\ \mathbb{Z})$ für die Modulgruppe.
- M für Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.
- $\mathbb{F} := \{\tau \in \mathbb{H};\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \tau \leq \frac{1}{2}\ ,\ |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \tau < 0\} \subset \mathbb{H}$ für den exakten Fundamentalbereich, bzw. $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \cup \{\infty\}$
- $\rho := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ $\diamond$

Verwendet wird außerdem die

(0.2) Definition
Für $w \in \mathbb{F}^*$ gilt:

$$\operatorname{ord} w := \begin{cases} 2 & \text{für } w = i \\ 3 & \text{für } w = \rho \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\diamond$

Alle weiteren Bezeichnungen werden ebenfalls aus den vorherigen Vorträgen übernommen.

§1 Modulfunktionen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Modulfunktion ein. Wie anfangs erwähnt, sind Modulfunktionen spezielle Modulformen und uns somit schon etwas bekannt. Die Menge der Modulfunktionen wird in Übereinstimmung zum Vortrag über Modulformen [5] mit $\mathbb{V}_0$ bezeichnet und ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Wir beginnen direkt mit der

(1.1) Definition (Modulfunktion)
Eine Modulform f vom Gewicht 0 heisst *Modulfunktion*, d.h. es gelten folgende Eigenschaften:

(MF.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph

(MF.2) $f(M\tau) = f(\tau)$ für alle $M \in \Gamma$ und $\tau \in \mathbb{H}$

(MF.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol. ◇

Nach einem vorherigen Vortrag (siehe [5] Lemma (2.12)) gilt die

(1.2) Bemerkung
Zu (MF.3) ist äquivalent: f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \qquad \text{mit } \mathrm{ord}_\infty f := m_0,\ \alpha_f(m_0) \neq 0$$

und $\alpha_f(m) = 0\ \forall m < m_0$, die bei geeignetem $\gamma > 0$ für $\mathrm{Im}\ \tau \geq \gamma$ absolut und kompakt-gleichmäßig konvergiert. ◇

Wir geben uns im Moment mit einer ersten Strukturaussage über $\mathbb{V}_0$ zufrieden und werden diese in §3 präzisieren. Es gilt nämlich der

(1.3) Satz (Körper der Modulfunktionen)
Die Menge der Modulfunktionen $\mathbb{K} := \mathbb{V}_0$ ist ein Körper. ◇

Beweis
Wir wissen, dass $\mathbb{K}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Betrachten wir also die Multiplikation für $f, g \in \mathbb{K}$

(MF.1) $\mathbb{H}$ ist ein Gebiet, somit ist die Menge der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$ ein Körper. (vergleiche [2] Kap. V (3.4))

(MF.2) $(fg)(M\tau) = f(M\tau) \cdot g(M\tau) = f(\tau) \cdot g(\tau) = (fg)(\tau) \quad \forall M \in \Gamma$ und $\forall \tau \in \mathbb{H}$

(MF.3) f und g besitzen nach (1.2) eine Fourierentwicklung. Es gilt also:

$$\begin{aligned}(fg)(\tau) &= \left(\sum_{m \geq m_{0_f}} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right) \cdot \left(\sum_{m \geq m_{0_g}} \alpha_g(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right) \\ &\overset{\text{Cauchyprod.}}{=} \sum_{m \geq m_{0_f} + m_{0_g}} \left(\sum_{k+l=m} \alpha_f(k) \cdot \alpha_g(l)\right) \cdot e^{2\pi i m\tau}\end{aligned}$$

Ebenfalls bekannt ist: $0 \neq f \in \mathbb{V}_k \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k}$. Somit gilt für $\mathbb{K}$ ($k = 0$), dass für $0 \neq f \in \mathbb{K}$ das Inverse in $\mathbb{K}$ existiert. $\square$

(1.4) Lemma
$\mathbb{K}$ enthält alle Quotienten von Modulformen des gleichen Gewichts $k \in \mathbb{N}, k$ gerade. $\diamond$

Beweis
Seien $f, g \in \mathbb{V}_k$ Modulformen vom Gewicht k, $g \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{g} \in \mathbb{V}_{-k}$ eine Modulform vom Gewicht $-k$ und es gilt

$$\frac{f}{g}(M\tau) = \frac{(c\tau + d)^k}{(c\tau + d)^k} \cdot \frac{f(\tau)}{g(\tau)} = \frac{f}{g}(\tau)$$

Als Produkt zweier meromorpher Funktionen auf $\mathbb{H}$ ist $\frac{f}{g}$ meromorph auf $\mathbb{H}$ und besitzt nach dem Beweis von (1.3) eine Fourierentwicklung. Somit gilt $\frac{f}{g} \in \mathbb{K}$. $\square$

Aus der Gewichtsformel [7] für Modulformen folgt für Modulfunktionen $0 \neq f \in \mathbb{K}$ direkt

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\text{ord } w} \cdot \text{ ord}_w f = 0 \tag{1}$$

Aus der Gewichtsformel ergibt sich das

(1.5) Lemma
Ist $f \in \mathbb{K}$ auf $\mathbb{F}^*$ holomorph, dann ist f konstant. $\diamond$

Beweis
Sei $0 \neq f \in \mathbb{K}$. Da f holomorph auf $\mathbb{F}^*$ ist, folgt für alle $w \in \mathbb{F}^*$: $\mathrm{ord}_w f \geq 0$. Mit (1) folgt $\mathrm{ord}_w f = 0$, da $\mathrm{ord}\, w > 0$. Das bedeutet $f(w) \neq 0$ für alle $w \in \mathbb{F}^*$. Mit f gehört aber auch $g := f - f(i)$ zu $\mathbb{K}$, da $\mathbb{C} \subset \mathbb{K}$. Sei $g \neq 0$, dann gilt mit (1)

$$0 = \sum_{w \in \mathbb{F}^* \setminus \{i\}} \frac{1}{\mathrm{ord}\, w} \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_w\, g}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_i\, g}_{\geq 1} > 0,$$

was ein Widerspruch ist. Also ist $g \equiv 0$ und somit f konstant. □

Es folgt der

(1.6) Satz

a) Ist $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant, dann hat f Pole in $\mathbb{F}^*$.

b) Ist $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant und in i und ρ holomorph, so ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq f(\rho)$ und $z \neq f(i)$ die Anzahl der *z-Stellen* in $\mathbb{F}^*$ gleich der Anzahl der Pole in $\mathbb{F}^*$ (jeweils mit Vielfachheiten gezählt). ◇

Beweis

a) Sei $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant, dann wissen wir nach obigem Lemma, dass f nicht holomorph auf $\mathbb{F}^*$ ist. Die Behauptung folgt aus der Meromorphie-Eigenschaft von Modulfunktionen.

b) Aus $z \neq f(i)$ folgt $\mathrm{ord}_i(f - z) = 0$ (analog für ρ). Durch Anwendung von (1) auf $f - z \in \mathbb{K}$ erhält man

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^* \setminus \{i, \rho\}} \mathrm{ord}_w (f - z) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

§2 Die absolute Invariante *j*

In diesem Abschnitt führen wir die *absolute Invariante j* ein, erarbeiten wesentliche Eigenschaften und betrachten das Abbildungsverhalten. Die Ergebnisse werden dann größtenteils im nächsten Abschnitt für den Beweis der Hauptaussage verwendet.

— *Die Diskriminante* Δ —

Zunächst benötigen wir einige Inhalte vorheriger Vorträge. *Ganze Modulformen* sind Modulformen, die auf $\mathbb{H}$ holomorph sind und bei ∞ *keinen* Pol haben. Per Definition sind sie somit bei ∞ holomorph. EISENSTEIN-Reihen sind Beispiele für ganze Modulformen. Sie sind wie folgt definiert:

$$G_k(\tau) := {\sum_{m,n}}' (m\tau + n)^{-k} \qquad \text{für } k \geq 3$$

Der Strich am Summenzeichen bedeutet, dass über alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0, 0)$ summiert wird. G_k ist nach [4] Satz (2.17) eine ganze Modulform vom Gewicht k. *Notation:* $G_k \in \mathbb{M}_k$

Über die EISENSTEIN-Reihen gelangen wir zu der

(2.1) Definition (Die Diskriminante Δ)
$\Delta := (60G_4)^3 - 27 \cdot (140G_6)^2$ ◇

(2.2) Bemerkung
Δ ist eine ganze Modulform vom Gewicht 12, da $G_4^3 \in \mathbb{M}_{12}$ und $G_6^2 \in \mathbb{M}_{12}$. Es gilt sogar $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$. (vgl. [4] Satz (3.8)) ◇

Eine weitere wichtige Eigenschaft halten wir fest in dem

(2.3) Lemma
Die Diskriminante Δ besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{H}$. ◇

Beweis
Aus $\Delta \in \mathbb{M}_{12}$ folgt $\text{ord}_\tau \Delta \geq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wegen der Holomorphie. Nach [4] (3.7) besitzt Δ eine Fourier-Enwicklung der Form:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \text{ , } \tau \in \mathbb{H} \text{ und } \tau(m) \in \mathbb{Z}$$

Per Definition also $\text{ord}_\infty \Delta = 1$. Mit der Gewichtsformel für Modulformen ergibt sich:

$$\sum_{w \in \mathbb{F}} \underbrace{\frac{1}{\text{ord } w} \cdot \text{ord}_w \Delta}_{\geq 0} + 1 = 1$$

und somit $\text{ord}_w \Delta = 0$ für alle $w \in \mathbb{F}$. Außerdem wissen wir:

i) Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ ex. $M \in \Gamma$ mit $M\tau \in \mathbb{F}$. (siehe [8], Satz (2.2)a))

ii) $\mathrm{ord}_\tau \Delta = \mathrm{ord}_{M\tau}\Delta$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma$. (siehe [7], Lemma (1.2))

Insgesamt folgt $\mathrm{ord}_\tau \Delta = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. □

Δ^{-1} ist somit ebenfalls eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion. Da $\Delta^{-1} \in \mathbb{V}_{-12}$ gilt, wissen wir, dass Δ^{-1} eine Fourierentwicklung besitzt. Wir halten für später etwas über die *normierte* Diskriminante $\Delta^* = (2\pi)^{-12}\Delta$ fest:

(2.4) Korollar
${\Delta^*}^{-1}$ besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$ {\Delta^*}^{-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} \beta(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \qquad \text{mit } \beta(m) \in \mathbb{Z} $$

◇

Beweis
Es gilt $\mathrm{ord}_\infty {\Delta^*}^{-1} \overset{[6]}{=} -\mathrm{ord}_\infty \Delta^* = -1$. Also $\beta(m) = 0$ für alle $m < -1$. Andererseits gilt für alle $\tau \in \mathbb{H}$:

$$ 1 = \left(\Delta^* \cdot {\Delta^*}^{-1}\right)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k+l=m} \beta(k)\cdot\tau(l)\right)}_{=:c(m)} e^{2\pi i m\tau} $$

Wir zeigen per Induktion, dass $\beta(m) \in \mathbb{Z}\ \forall m \geq -1$:
$m = -1$

$$ 1 = c(0) = \beta(-1)\cdot\tau(1) = \beta(-1) $$

$m \mapsto m+1$

$$ \begin{aligned} 0 = c(m+2) &= \sum_{n=-1}^{m+1} \beta(n)\cdot\tau(m+2-n) \\ &= \underbrace{\sum_{n=-1}^{m} \beta(n)\cdot\tau(m+2-n)}_{\in\mathbb{Z}\text{ nach IV}} + \beta(m+1)\cdot\underbrace{\tau(1)}_{=1} \end{aligned} $$

$$ \Rightarrow \beta(m+1) \in \mathbb{Z} $$

□

— Definition der absoluten Invarianten —

Wie sich zeigen wird, ist die absolute Invariante eine besondere Modulfunktion. Wesentlich für die weiteren Betrachtungen ist die

(2.5) Definition (Die absolute Invariante j)
j ist definiert als Quotient zweier ganzer Modulformen vom Gewicht 12:

$$j := \frac{(720\ G_4)^3}{\Delta} = \frac{G_4^{*3}}{\Delta^*} \qquad \diamond$$

Die obige Definition ist äquivalent, da

$$\frac{(720\ G_4)^3}{\Delta} \underset{\text{Def. } \Delta^*}{\overset{\text{Def. } G_4^*}{=}} \frac{(720 \cdot 2\zeta(4))^3}{(2\pi)^{12}} \cdot \frac{G_4^{*3}}{\Delta^*} \overset{\text{Euler}}{=} \frac{(720 \cdot B_4 \cdot \frac{-(2\pi i)^4}{4!})^3}{(2\pi)^{12}} \cdot \frac{G_4^{*3}}{\Delta^*}$$
$$\underset{B_4 = -\frac{1}{30}}{=} \frac{G_4^{*3}}{\Delta^*}$$

Es gilt der folgende

(2.6) Satz
j ist eine Modulfunktion, d.h., es gilt

$$j \in \mathbb{K} \qquad \diamond$$

Beweis
Die Aussage folgt unmittelbar aus Lemma (1.4). $\square$

G_4 und Δ sind als ganze Modulformen holomorph auf $\mathbb{H}$. Aus der Nullstellenfreiheit von Δ folgt die Holomorphie von j auf $\mathbb{H}$. Angesichts (1.5) hoffen wir, dass j bei ∞ einen Pol besitzt, da es sich ansonsten um eine konstante Funktion handeln würde. Das Verhalten von j bei ∞ halten wir fest in der

(2.7) Proposition
j hat bei ∞ einen Pol 1. Ordnung. $\diamond$

Beweis
Δ hat nach dem Beweis von (2.3) bei ∞ eine Nullstelle 1. Ordnung. G_4 hat als ganze Modulform keinen Pol bei ∞ und die Gewichtsformel liefert:

$$\sum_{w\in\mathbb{F}^*\setminus\{\rho\}} \frac{1}{\text{ord } w} \cdot \underbrace{\text{ord}_w G_4}_{\geq 0,\text{ holom.}} + \frac{1}{3} \underbrace{\text{ord}_\rho G_4}_{\geq 1,\ [4]\ (2.19)} = \frac{1}{3}$$

Somit hat G_4 bei ∞ keine Nullstelle. Es folgt also

$$\text{ord}_\infty j = \text{ord}_\infty \frac{G_4^*}{\Delta^*} = \text{ord}_\infty G_4^* - \text{ord}_\infty \Delta^* = 0 - 1 = -1$$

□

Aus der Definition von Modulfunktionen folgt die Existenz einer Fourier-Entwicklung von j. Genauer gilt das

(2.8) Korollar
j besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m=0}^{\infty} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau}\ ,\ \tau \in \mathbb{H} \text{ und } j_m \in \mathbb{Z}$$

◇

Beweis
Mit Proposition (2.7) folgt für die Fourier-Entwicklung von j:

$$j(\tau) = \sum_{m=-1}^{\infty} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau}$$

Es ist hilfreich die *normierte* Eisenstein-Reihe $G_4^* = (2\zeta(4))^{-1} \cdot G_4$ und ${\Delta^*}^{-1}$ zu betrachten, mit (2.4) und [4] (2.16) gelten folgende Fourier-Entwicklungen:

$$\begin{aligned} {\Delta^*}^{-1} &= \sum_{m=-1}^{\infty} \beta(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \qquad \text{mit } \beta(m) \in \mathbb{Z} \text{ und } \beta(-1) = 1 \\ G_4^*(\tau) &= 1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \qquad \text{mit} \qquad \sigma_3(m) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Dann ist

$$G_4^{*3}(\tau) = \underbrace{1}_{=\alpha(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \qquad \text{mit} \qquad \alpha(m) \in \mathbb{N}$$

Aus der Definition von j erhält man somit:

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \left(G_4^{*3} \cdot \Delta^{*^{-1}}\right)(\tau) \\ &= \Delta^{*^{-1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k+l=m} \alpha(k) \cdot \beta(l) \right)}_{=:c(m) \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m \tau} \\ &= e^{-2\pi i \tau} + \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{(\beta(m) + c(m))}_{\in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m \tau} \end{aligned}$$

□

Ohne Beweis sei angemerkt, dass die Fourier-Koeffizienten j_m sogar positive ganze Zahlen sind. (siehe [1] Kap. I, §6.6) Hier eine Übersicht für $m = 0 \dots 10$:

m						j_m
0						744
1					196	884
2				21	493	760
3				864	299	970
4			20	245	856	256
5			333	202	640	600
6		4	252	023	300	096
7		44	656	994	071	935
8		401	490	886	656	000
9	3	176	440	229	784	420
10	22	567	393	309	593	600

Das rasche Wachstum der Koeffizienten wird durch die asymptotische Formel

$$j_m \cong \frac{e^{4\pi\sqrt{m}}}{\sqrt{2} \cdot m^{\frac{3}{4}}}$$

begründet, die unabhängig von H. Petersson (1932) und H. Rademacher (1939) bewiesen wurde. Außerdem genügen die Koeffizienten j_m einer Reihe von interessanten Kongruenzen, die wir ebenfalls ohne Beweis feshalten in der

(2.9) Bemerkung

a) Satz von Lehner: Für $m \equiv 0 \pmod{2^a 3^b 5^c 7^d}$ gilt

$$j_m \equiv 0 \pmod{2^{3a+8} 3^{2b+3} 5^{c+1} 7^d}$$

Beweis : siehe [3], Chap. 4.

b) Weiterhin gilt die von LEHMER bewiesene Kongruenz

$$(m+1)\cdot j_m \equiv 0 \pmod{24} \quad \text{für } m \geq 1 \qquad \diamond$$

— *Abbildungsverhalten von* j —

Das *Nullstellen-Lemma* [4] (2.19) liefert $G_4(\rho) = 0$ und $G_6(i) = 0$. Daraus folgt direkt für j:

$$j(\rho) = 0 \qquad \text{und} \qquad j(i) = \frac{(720 \cdot G_4(i))^3}{(60 \cdot G_4(i))^3} = 12^3 = 1728 \tag{2}$$

Wendet man für $z \in \mathbb{C}$ die Gewichtsformel (1) auf $f := j - z \in \mathbb{K}$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord} w} \cdot \operatorname{ord}_w(j-z) &= 0 \\ \underset{\operatorname{ord}_\infty f = -1}{\Leftrightarrow} \sum_{w \in \mathbb{F}} \frac{1}{\operatorname{ord} w} \cdot \operatorname{ord}_w(j-z) &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Es gilt der folgende

(2.10) Satz

Die Funktion $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und nimmt in $\mathbb{F}$ jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an. Genauer gilt:

a) Jede von 0 und $12^3 = 1728$ verschiedene komplexe Zahl wird in $\mathbb{F}\backslash\{i,\rho\}$ genau einmal und von erster Ordnung angenommen.

b) j - 1728 hat an der Stelle $\tau = i$ eine Nullstelle der Ordnung 2 und es gilt $j(\tau) \neq 1728$ für alle $\tau \in \mathbb{F}\backslash\{i\}$

c) j hat an der Stelle $\tau = \rho$ eine Nullstelle der Ordnung 3 und es gilt $j(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{F}\backslash\{\rho\}$ $\diamond$

Beweis

Die Holomorphie von j wurde schon nach Satz (2.6) begründet. Der Rest der Einleitung folgt aus Teil a).

a) Sei in (3) z ungleich 0 und 1728, dann bringen $w = \rho$ und $w = i$ nach (2) keinen Anteil und es gilt

$$\sum_{w \in \mathbb{F}\backslash\{i,\rho\}} \underbrace{\operatorname{ord}_w(j-z)}_{\geq 0,\ j \text{ holom.}} = 1$$

Es existiert also genau ein $w \in \mathbb{F}\backslash\{i,\rho\}$ mit $\operatorname{ord}_w(j-z) = 1$.

b) Man wählt $z = 1728$ in (3). Nach (2) ist $j(i) = 1728$, also $\text{ord}_i(j - 1728) \geq 1$. Damit ist die linke Seite in

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ord}_i(j - 1728) + \sum_{w \in \mathbb{F} \setminus \{i\}} \frac{1}{\text{ord } w} \cdot \text{ord}_w(j - 1728) = 1 \tag{4}$$

größer oder gleich $\frac{1}{2}$. Ebenfalls mit (2) ist $j(\rho)$=0, also $\text{ord}_\rho(j - 1728) = 0$. Würde ein $i \neq \tau \in \mathbb{F}$ mit $j(\tau) = 1728$ existieren, wäre die linke Seite in (4) größer oder gleich $1 + \frac{1}{2}$. Also gilt $\text{ord}_i(j - 1728) = 2$.

c) Analog zu b) mit $z = 0$. □

Eine Folgerung aus Teil a) des obigen Satzes ist das

(2.11) Korollar
Die Abbildung $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ ist eine Bijektion. ◇

Wir nutzen das Korollar aus und studieren die Abbildung j auf dem Rand von $\mathbb{F}$:

(2.12) Proposition
Die Modulfunktion j ist auf dem Rand von $\mathbb{F}$ und auf der imaginären Achse, aber in keinem weiteren Punkt von $\mathbb{F}$ reell. Genauer wird abgebildet:

a) das Geradenstück von ∞ nach ρ auf das Intervall $]-\infty,\ 0]$

b) der Kreisbogen von ρ nach i auf das Intervall $[0,\ 1728]$

c) das Geradenstück von i nach ∞ auf das Intervall $[1728,\ \infty[$ ◇

Beweis
Da die Fourier-Koeffizienten von j reell sind, folgt zunächst

$$j(-\overline{\tau}) = \overline{j(\tau)} \qquad \text{für } \tau \in \mathbb{H}$$

i) Für $\tau := iy,\ y > 0$ gilt

$$\overline{j(\tau)} = j(-\overline{\tau}) = j(iy) = j(\tau)$$

Also ist j auf der imaginären Achse reell.

ii) Für $\tau := -\frac{1}{2} + iy$, $y > 0$, gilt

$$\overline{j(\tau)} = j(-\overline{\tau}) = j(\frac{1}{2} + iy) \overset{(*)}{=} j(-\frac{1}{2} + iy) = j(\tau).$$

Betrachte die Translation $\tau \mapsto \tau + \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$, beschrieben durch $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Mit $|\alpha| = 1$ folgt $(*)$ aus $j(M\tau) = j(\tau)$. Damit ist j auch auf den beiden Geradenstücken des Randes von $\mathbb{F}$ reell.

iii) Für $|\tau| = 1$ gilt $-\frac{1}{\tau} = -\frac{\overline{\tau}}{\tau\overline{\tau}} = -\overline{\tau}$, also

$$\overline{j(\tau)} = j(-\overline{\tau}) = j(-\frac{1}{\tau}) \overset{(*)}{=} j(\tau)$$

Betrachte die Inversion $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$, beschrieben durch $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$. $(*)$ folgt dann aus $j(M\tau) = j(\tau)$. Damit ist j auf dem Einheitskreis reell.

Nach ii) und iii) ist j auf dem Rand von $\mathbb{F}$ reell. Betrachten wir zunächst allgemein eine Abschätzung, die wir öfters benutzen werden. Wir definieren hierzu

$$R(\tau) := \sum_{m=0}^{\infty} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

als den Teil der Fourierentwicklung von j mit positiven Indizes. R ist dann per Definition eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ und modulo 1 periodisch. Wie in [5] Lemma (2.2) gesehen, existiert ein $\hat{R} : \dot{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\hat{R}(e^{2\pi i\tau}) = R(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Die Laurent-Entwicklung von $\hat{R}$ um 0 lautet dann:

$$\hat{R}(\tau) := \sum_{m=0}^{\infty} j_m \cdot \tau^m$$

Es gilt $\hat{R}(\tau) \longrightarrow j_0$ für $\tau \to 0$. R ist also per Definition holomorph in ∞, da $\hat{R}$ holomorph in 0 (vgl. [5] (2.8)) und wegen der Gleichheit der Limiten gilt:

$$R(\tau) \longrightarrow j_0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Im}(\tau) \to \infty. \tag{5}$$

a) Sei $\tau = \frac{1}{2} + iv$, $v \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} j(\tau) &= e^{-2\pi i(\frac{1}{2}+iv)} + R\left(\frac{1}{2} + iv\right) \\ &= \underbrace{e^{-\pi i}}_{=-1} \cdot e^{2\pi v} + \underbrace{R\left(\frac{1}{2} + iv\right)}_{\longrightarrow j_0 \text{ für } v \to \infty \text{ nach (5)}} \\ &\longrightarrow -\infty \quad \text{für} \quad v \to \infty. \end{aligned}$$

Das Geradenstück liegt in $\mathbb{F}$. Aus der Injektivität von j auf $\mathbb{F}$, der Stetigkeit, ii) und $j(\rho) = 0$ folgt die Behauptung.

b) Mit (2) wissen wir $j(\rho) = 0$ und $j(i) = 12^3$. Der Kreisbogen von ρ nach i liegt in $\mathbb{F}$. Aus der Injektivität von j auf $\mathbb{F}$, der Stetigkeit und iii) folgt die Behauptung.

c) Sei $\tau = iv,\ v \geq 1$. Dann gilt analog zu a) mit (5)

$$j(\tau) \quad = \quad e^{2\pi v} + R\,(iv) \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \qquad v \to \infty.$$

Das Geradenstück liegt in $\mathbb{F}$. Aus der Injektivität von j auf $\mathbb{F}$, der Stetigkeit, i) und $j(i) = 12^3$ folgt die Behauptung.

Mit Korollar (2.11) folgt, dass j in keinem weiteren Punkt von $\mathbb{F}$ reell ist. □

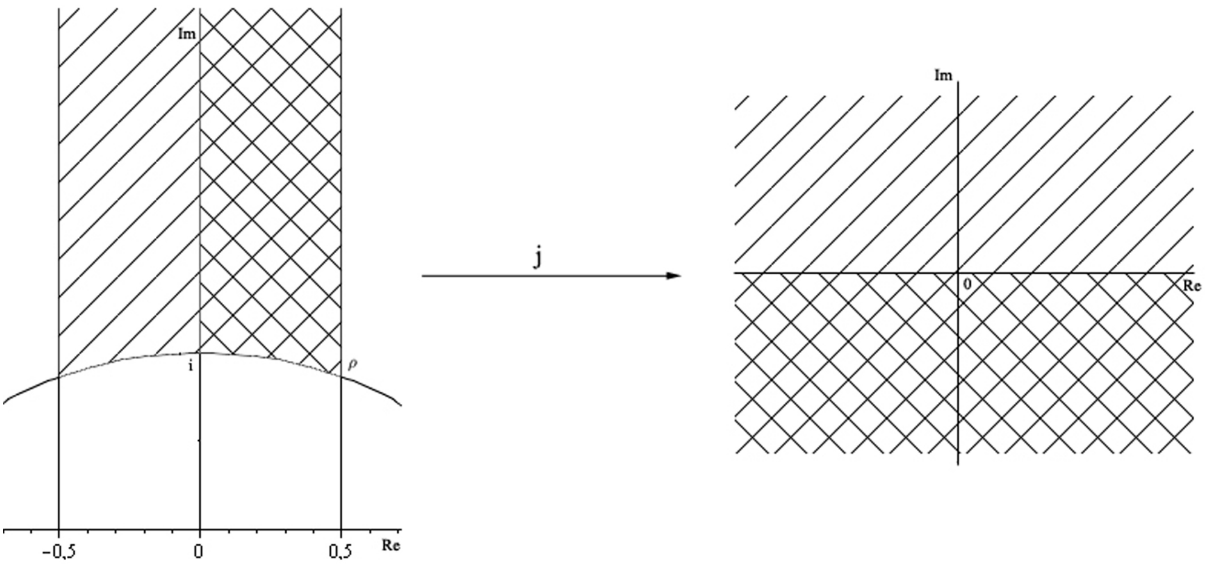
Wir definieren die "linke Hälfte" von $\overline{\mathbb{F}}$ als

$$\mathbb{L} := \{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ -\frac{1}{2} \leq \ \operatorname{Re} \tau \leq 0\ ,|\ \tau\ | \geq 1\}$$

Für $\tau_0 = -\frac{1}{4} + iv \in \mathbb{L}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(j(\tau_0)) &= \operatorname{Im}(\underbrace{e^{\frac{i\pi}{2}}}_{=i} \cdot e^{2\pi v} + R(\tau_0)) \\ &= e^{2\pi v} + \operatorname{Im}\left(R\left(-\frac{1}{4} + iv\right)\right) \\ &> 0 \quad \text{, für ein geeignetes } v \text{ nach (5)} \end{aligned}$$

Mit dem Satz über die Gebietstreue [2] und (2.11) folgt damit bereits $j(\mathbb{L}) = \overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$ und, dass die analog definierte "rechte Hälfte" von $\overline{\mathbb{F}}$ auf $\mathbb{H}^c$ abgebildet wird.



§3 $\mathbb{K}$ - Körper der Modulfunktionen

Wir kommen nun zur mehrfach angedeuteten Hauptaussage des Vortrags: über den Zusammenhang zwischen der absoluten Invarianten j und dem Körper der Modulfunktionen $\mathbb{K}$. Jede rationale Funktion in j ist nach den vorangegangenen Ergebnissen eine Modulfunktion. Hiervon gilt auch die Umkehrung und wir erhalten somit eine erste Verschärfung von Satz (1.3):

(3.1) Satz
Es gilt $\mathbb{K} = \mathbb{C}(j)$. $\diamond$

Beweis
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}(j)$. Für konstantes $f \in \mathbb{K}$ ist die Aussage klar. Sei also $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant. Für komplexe Zahlen $u \neq v$ betrachte man die Funktion

$$g(\tau) := \frac{f(\tau) - u}{f(\tau) - v} \in \mathbb{K}$$

Hierbei heben sich die Pole von f heraus. Seien p_ν die Nullstellen von $f - u$ in $\mathbb{F}$ und q_μ die Nullstellen von $f - v$ in $\mathbb{F}$ (jeweils mit Vielfachheiten gezählt). Nach Vortrag [5] wissen wir, dass es hiervon nur endlich viele gibt. Dann hat g in $\mathbb{F}$ Nullstellen in p_ν und Polstellen in q_μ. Wir schränken die Wahl von u und v zusätzlich zu $u \neq v$ weiter ein und fordern $u, v \notin \{f(i), f(\rho), f(\infty)\}$. Somit ist g an den Stellen i, ρ und ∞ holomorph und ungleich Null. Somit sind $q_\mu,\ p_\nu$ alle Null- und Polstellen von g in $\mathbb{F}^*$. Nach Satz (1.6) b) stimmen die Anzahlen der Null- und Polstellen in $\mathbb{F}^*$ überein. Definiere

$$h(\tau) := \prod_\nu \frac{j(\tau) - j(p_\nu)}{j(\tau) - j(q_\nu)} \in \mathbb{C}(j) \subset \mathbb{K}.$$

Nach Satz (2.10) haben g und h gleiche Nullstellen und Pole in $\mathbb{F}^*$, somit ist $\frac{g}{h} \in \mathbb{K}$ holomorph auf $\mathbb{F}^*$ und nach Lemma (1.5) konstant. Es folgt $\underbrace{\frac{g}{h}}_{\in \mathbb{C}} \cdot h = g \in \mathbb{C}(j)$ und

damit

$$\begin{aligned} g &= \frac{f-u}{f-v} \\ \Leftrightarrow fg - f &= vg - u \\ \Leftrightarrow f &= \frac{vg-u}{g-1} \in \mathbb{C}(j) \end{aligned}$$

$\square$

Man erhält zusätzlich eine Aussage über die Holomorphie von Modulfunktionen:

(3.2) Korollar
Ein $f \in \mathbb{K}$ ist genau dann auf $\mathbb{H}$ holomorph, wenn f ein Polynom in j ist. $\diamond$

Beweis
„$\Leftarrow$“ Klar, jede Linearkombination holomorpher Funktionen ist holomorph.
„$\Rightarrow$“ Schreibe $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$ mit teilerfremden Polynomen P und Q. P und Q lassen sich über $\mathbb{C}$ faktorisieren:

$$f = \frac{\prod\limits_{k} j - c_k}{\prod\limits_{l=1}^{l'} j - d_l} \quad \text{mit } c_k, d_l \in \mathbb{C} \text{ paarweise verschieden.}$$

Annahme: $l' \geq 1$
Dann existiert genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $j(\tau) = d_1$, also $Q(\tau) = 0$. Da $d_1 \neq c_k$ für alle k gilt $P(\tau) \neq 0$. Somit hat f einen Pol bei τ, was ein Widerspruch zur Holomorphie von f ist. Also gilt $l' = 0$ und Q ist konstant. Es folgt die Behauptung. $\square$

Die Gestalt von Modulfunktionen lässt sich unter Berücksichtigung von $\mathbb{M}_2 = \{0\}$ noch genauer beschreiben. Ist $k \geq 4$ gerade und sind $g,\ h \in \mathbb{M}_k$ mit $h \neq 0$ gegeben, dann gilt $\frac{g}{h} \in \mathbb{K}$ mit Lemma (1.4). Umgekehrt hat man den

(3.3) Satz
Jede Modulfunktion ist Quotient zweier ganzer Modulformen gleichen Gewichts. $\diamond$

Beweis
1. Fall: f konstant
Für $f \equiv c$, mit $c \in \mathbb{C}$, schreibe $f = \frac{c}{1}$. Aus $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ (vgl. [6] Satz (1.3)) folgt die Behauptung.

2. Fall: f nicht konstant
f lässt sich nach Satz (3.1) schreiben als $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$, mit Polynomen P und Q. Definiere $r := \max\{\text{grad } P,\ \text{grad } Q\} \geq 1$, dann gilt

$$f = \frac{P(j) \cdot \Delta^r}{Q(j) \cdot \Delta^r}$$

Behauptung: $P(j) \cdot \Delta^r$ und $Q(j) \cdot \Delta^r$ sind ganze Modulformen vom Gewicht $12r$.
Wir benutzen die Eigenschaft der Inklusion [5]

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{M}_{k+l} \qquad \text{für} \qquad k, l \in \mathbb{Z}$$

Einsetzen der Definition von j und Anwenden der Inklusionsbeziehung liefert:

$$P(j)\cdot\Delta^r = \sum_{k=0}^{r}\alpha_k j^k\Delta^r = \sum_{k=0}^{r}\underbrace{\alpha_k 720^{3k}}_{\in\mathbb{C}}\cdot\underbrace{\underbrace{G_4^{3k}}_{\in\mathbb{M}_{12k}}\cdot\underbrace{\Delta^{r-k}}_{\in\mathbb{M}_{12r-12k}}}_{\in\mathbb{M}_{12r}}\in\mathbb{M}_{12r}$$

Analog für $Q(j)\cdot\Delta^r$. □

§4 Der Kleine Satz von PICARD

Im letzten Abschnitt wird der *Kleine Satz von* PICARD bewiesen, der in der Vorlesung zur Funktionentheorie I ohne Beweis angegeben war. Interessant ist nämlich, dass der Satz größtenteils direkt aus den Abbildungseigenschaften von j gefolgert werden kann.

(4.1) Satz (Der Kleine Satz von PICARD)
Ist f eine nicht-konstante ganze Funktion, so nimmt f jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an. ◇

Beweis
Vorbemerkung: Sei $\tau_0\in\mathbb{H}$ und es existiere kein $M\in\Gamma$ mit $M\tau_0\in\{i,\rho\}$ Dann hat $j-j(\tau_0)$ nach Satz (2.10) eine Nullstelle 1. Ordnung in $\tau=\tau_0$, da mit [7] (1.2) gilt:

$$\operatorname{ord}_{\tau_0}(j-j(\tau_0)) \underset{M\tau_0\in\mathbb{F}}{\overset{M\in\Gamma}{=}} \operatorname{ord}_{M\tau_0}(j-j(M\tau_0)) \overset{M\tau_0\notin\{i,\rho\}}{=} 1$$

Per Definition also $j'(\tau_0)\neq 0$.

Annahme: f ist ganz und nimmt die Werte a und b, $a\neq b$, nicht an.
Wir betrachten die ganze Funktion

$$g(z) := 1728\cdot\frac{f(z)-a}{b-a},$$

die die Werte 0 und 1728 nach Voraussetzung auslässt. Zunächst bestimmt man nach Satz (2.10) ein $\tau_0\in\mathbb{F}\backslash\{i,\rho\}$ mit $j(\tau_0)=g(0)$. Mit der Vorbemerkung und der Stetigkeit von j' existiert eine offene Umgebung $U\subset\mathbb{H}$ von τ_0, so dass $j'(\tau)\neq 0$ für alle $\tau\in U$. Mit [2] Kap. VI (2.4) ist j lokal biholomorph, insbesondere ist also j^{-1}

auf $j(U)$ holomorph. Da $g(0) = j(\tau_0)$ und g per Definition holomorph, existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von 0, so dass $g(V) \subset j(U)$. Definiert man

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto j^{-1}(g(z)),$$

so ist ϕ wohldefiniert und als Komposition holomorpher Funktionen holomorph. ϕ erfüllt zudem:

$$j(\phi(z)) = g(z) \qquad \text{und} \qquad \phi(0) = \tau_0.$$

Mit der Vorbemerkung gilt $j'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) \in g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \backslash \{0, 1728\}$. Also ist ϕ längs jeder Kurve in $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach dem Monodromiesatz (vgl. Hurwitz-Courant) eine ganze Funktion

$$\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{H} \qquad \text{mit} \qquad \phi(0) = \tau_0 \qquad \text{und} \qquad j(\phi(z)) = g(z) \qquad \text{für alle} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt für alle $\phi(z) = x + iy \in \mathbb{H}$:

$$|e^{i\phi(z)}| = |e^{ix} \cdot e^{-y}| = |e^{-y}| \overset{y>0}{\leq} 1$$

Nach dem Satz von Liouville ([2] Kap. III (4.8)) ist $e^{i\phi(z)}$ als ganze Funktion und somit auch $\phi(z)$ konstant. Dann ist aber auch g und somit f konstant. □

Literatur

[1] M. Koecher, A. Krieg: *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, 2. Auflage (2007)

[2] A. Krieg: *Funktionentheorie I*, Vorlesungsskript WS 2008/09

[3] T.M. Apostol: *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*,

[4] A. Freh: *Beispiele ganzer Modulformen*, Seminarvortrag SS 2009

[5] D. Hohmann: *Modulformen*, Seminarvortrag SS 2009

[6] B. Laumen: *Basen*, Seminarvortrag SS 2009

[7] C. Höller: *Die Gewichtsformel*, Seminarvortrag SS 2009

[8] K. Küpper: *Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe*, Seminarvortrag SS 2009