Die obere Halbebene $\mathbb{H}$

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 15.04.2009

Tom Rihm

Diese Ausarbeitung beruht auf Kapitel II, Abschnitt 1, Punkt 1-4 aus dem Buch: Elliptische Funktionen und Modulformen von M. Koecher und A. Krieg [1]. Ihr Schwerpunkt liegt in der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$. Sie ist in 4 Kapitel unterteilt, wobei die ersten beiden zum größten Teil nur Wiederholung aus Kapitel VII Der Riemannsche Abbildungssatz aus dem Skript zur Vorlesung Funktionentheorie I von A. Krieg [2] vom letzten Semester sind.

Inhaltsverzeichnis

§1 Gebrochen- lineare Transformation

In diesem Abschnitt werden spezielle rationale Funktionen als meromorphe Funktionen studiert, d.h.: die gebrochen- lineare Transformation wird definiert und einige nützliche Eigenschaften bewiesen.

— *Kurze Wiederholung aus der Vorlesung Funktionentheorie I* —

Im Zentrum folgender Überlegungen stehen 2×2 Matrizen, die wir allgemein in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

schreiben. Wie üblich definieren wir die Determinante und die Spur mit

$$\det M := ad - bc \quad \text{und} \quad \operatorname{Sp} M := a + d$$

sowie die Transponierte M^t bzw. die adjungierte $M^\#$

$$M^t := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M^\# := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

der Matrix M. $\mathrm{Mat}(n; K)$ steht für $n \times n$ über K. Des weiteren bezeichnet $\mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$ die allgemeine lineare Gruppe vom Grad 2 über $\mathbb{C}$, d.h. die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 Matrizen

$$\mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{Mat}\ (2; \mathbb{C}); \quad \det M \neq 0\}.$$

Mit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird die Einheitsmatrix abgekürzt. Die Inverse der Matrix $M \in \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$ wird gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^\# = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Außerdem definieren wir die abgeschlossene komplexe Ebene, oder auch RIEMANNsche Zahlenkugel, mit $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$. Folgende „Rechenregeln“ mit ∞ in $\widehat{\mathbb{C}}$

sind zu beachten:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z &:= \infty, \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}, \\ z \cdot \infty \;=\; \infty \cdot z \;&:= \infty, \forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}, \\ \frac{z}{\infty} &:= 0, \;\; \forall z \in \mathbb{C}, \\ \frac{z}{0} &:= \infty, \forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}. \end{aligned}$$

(1.1) Definition (gebrochen- lineare Transformation)

Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ nennt man

$$\Phi_M : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\; \Phi_M(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d},\; \tau \in \mathbb{C},\; \Phi_M(\infty) := \begin{cases} \infty & \text{falls } c = 0, \\ a/c & \text{falls } c \neq 0, \end{cases}$$

eine *gebrochen- lineare Transformation* oder eine Möbius- Transformation. Abkürzend schreiben wir auch:

$$\Phi_M(\tau) = M\langle\tau\rangle = M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

◇

Wir notieren noch eine

(1.2) Bemerkung
Aus der Vorlesung Funktionentheorie ist folgendes bereits bekannt: Φ_M ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die für $c = 0$ eine ganze Funktion (d.h.: hol. auf $\mathbb{C}$) ist. Für $c \neq 0$ hat Φ_M nur einen Pol und zwar von erster Ordnung bei $\tau = -d/c$ da $\lim_{z \to -\frac{d}{c}} |\Phi_M(z)| = \infty$ mit

$$Res_{-\frac{d}{c}}(\Phi_M) = \lim_{z \to \frac{-d}{c}} \left(z + \frac{d}{c} \right) \Phi_M(z) = \frac{1}{c} \left(a \cdot \frac{-d}{c} + b \right) = \frac{-\det M}{c^2}$$

Für die Möbius- Transformation Φ_M gilt:

$$\Phi_M(\infty) = \lim_{z \to \infty} \Phi_M(z)$$

◇

Direkt aus der Definition (1.1) erhält man das

(1.3) Lemma
Seien $L, M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt:

a) $E\tau = \tau$, d.h. Φ_E=id

b) $(\lambda M)\tau = M\tau$, d.h. $\Phi_{\lambda M} = \Phi_M$

c) $(LM)\tau = L\langle M\tau\rangle$, d.h. $\Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M$
Insbesondere ist $\Phi_M : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\Phi_M^{-1} = \Phi_{M^{-1}}$.

d) Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ und $\tau, \tau' \in \mathbb{C}$ gilt

$$M\tau' - M\tau = \frac{\det M}{(c\tau' + d)(c\tau + d)} \cdot (\tau' - \tau)$$

e) Sowie

$$\Phi'_M(\tau) = \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{\det M}{(c\tau + d)^2}$$ ◇

Beweis
Siehe Satz VII (2.2) der Vorlesung Funktionentheorie. □

Eine Art Umkehrung von (1.3)(b) formulieren wir im folgenden

(1.4) Lemma
Für $L, M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $M\tau = L\tau$ gilt für wenigstens drei verschiedene $\tau \in \mathbb{C}$.

ii) Es gibt $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $M = \lambda L$. ◇

Beweis
Siehe Satz VII (2.3) der Vorlesung Funktionentheorie. □

(1.5) Bemerkung
Für $M, L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ gilt

$$\Phi_M = \Phi_L \Longleftrightarrow M = \pm L.$$ ◇

Beweis
Wegen Lemma (1.4) folgt aus $\Phi_M = \Phi_L$, dass ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $M = \lambda L$.
Aus $1 = \det M = \det \lambda L = \lambda^2 \cdot \det L = \lambda^2$ folgt $\lambda = \pm 1$.
Die Rückrichtung folgt gleich aus Lemma (1.3)(b). □

— *Kreise und Geraden unter gebrochen- linearen Transformationen* —

Für den zentralen Satz dieses Abschnittes brauchen wir folgendes Hilfsmittel:

(1.6) Hilfssatz
Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, C \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0 \quad \text{und} \quad B \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden. Dabei gilt $|B|^2 > AC$ und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r > 0$ werden gegeben durch

$$m = -\frac{\overline{B}}{A} \quad \text{bzw.} \quad r^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}. \qquad \diamond$$

Beweis
Die allgemeine Gleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r ist:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

mit $a, b, r \in \mathbb{R}$. Dies können wir ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \\ \overset{A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}{\Longleftrightarrow} \quad & A(x^2+y^2) \underbrace{-2aA}_{=:b_1} x \underbrace{-2bA}_{=:b_2} y + \underbrace{A(a^2+b^2-r^2)}_{=:C} = 0 \end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir also folgende Gleichung:

$$A(x^2+y^2) + b_1 x + b_2 y + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, b_1, b_2, C \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sei nun $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= x - iy & (2) \\ x &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) & (3) \\ y &= \frac{i}{2}(\overline{z} - z) & (4) \\ z\overline{z} &= x^2 + y^2 & (5) \end{aligned}$$

Setze (2) bis (5) in (1) ein und erhalte

$$Az\overline{z} + \underbrace{\frac{1}{2}(b_1 - ib_2)}_{=:B} z + \underbrace{\frac{1}{2}(b_1 + ib_2)}_{=:\overline{B}} \overline{z} + C = 0.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}|B|^2 &= \frac{1}{4}\cdot(b_1 - ib_2)\cdot(b_1+ib_2)\\ &= \frac{1}{4}\cdot(-2aA+i2bA)\cdot(-2aA-i2bA)\\ &= \frac{1}{4}\cdot(4a^2A^2+4b^2A^2)\\ &= A^2(a^2+b^2)\\ &> A^2(a^2+b^2-r^2)\,, \quad \text{da } r\in\mathbb{R}\\ &= AC.\end{aligned}$$

Daraus folgt: Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\overline{\tau}+B\tau+\overline{B\tau}+C=0 \quad \text{mit} \quad A,C\in\mathbb{R}, \quad A\neq 0 \quad \text{und} \quad B\in\mathbb{C}, \quad \text{wobei } |B|^2 > AC$$

beschrieben werden. Bestimme jetzt den Mittelpunkt m und den Radius r des Kreises:

$$\begin{aligned} & A\tau\overline{\tau}+B\tau+\overline{B\tau}+C=0\\ \overset{\tau=x+iy,B=u+it}{\Longleftrightarrow}\quad & A(x+iy)(x-iy)+(u+it)(x+iy)+(u-it)(x-iy)+C=0\\ \overset{(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2}{\Longleftrightarrow}\quad & Ax^2+Ay^2+ux+iuy+ixt-yt+ux-iuy-ixt-yt+C=0\\ \Longleftrightarrow\quad & x^2+\frac{2ux}{A}+\frac{u^2}{A^2}+y^2-\frac{2yt}{A}+\frac{t^2}{A^2}=\frac{-C}{A}+\frac{u^2+t^2}{A^2}\\ \Longleftrightarrow\quad & \left(x+\frac{u}{A}\right)^2+\left(y-\frac{t}{A}\right)^2=\frac{|B|^2-AC}{A^2}\\ \Longleftrightarrow\quad & \left(x+\frac{\mathrm{Re}(B)}{A}\right)^2+\left(y-\frac{\mathrm{Im}(B)}{A}\right)^2=\frac{B\overline{B}-AC}{A^2}.\end{aligned}$$

Also gilt $|B|^2 > AC$ und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r>0$ werden gegeben durch

$$m=-\frac{\overline{B}}{A} \quad \text{bzw.} \quad r^2=\frac{|B|^2-AC}{A^2}.$$

□

Umgekehrt beschreibt die obige Gleichung im Fall $A\neq 0$ und $|B|^2 > AC$ stets einen Kreis. Im Fall $A=0$, $B\neq 0$ betrachte die

(1.7) Folgerung

Durch die Gleichung

$$B\tau+\overline{B\tau}+C=0 \quad \text{mit} \quad C\in\mathbb{R} \quad \text{und} \quad B\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$$

erhält man genau alle Geraden in $\mathbb{C}$. ◇

Beweis
Forme dazu die Gleichung genau so wie im Hilfssatz (1.6) um:

$$\begin{aligned}
& B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \\
\overset{\tau=x+iy, B=u+it}{\Longleftrightarrow} \quad & (u+it)(x+iy) + (u-it)(x-iy) + C = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & ux + iuy + +ixt - yt + ux - iuy - ixt - yt + C = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2ux - 2ty + C = 0 \\
\overset{t\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & y = \frac{u}{t}\cdot x + \frac{C}{2t} \\
\Longleftrightarrow \quad & y = \frac{\operatorname{Re}(B)}{\operatorname{Im}(B)}\cdot x + \frac{C}{2\cdot \operatorname{Im}(B)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für $t \neq 0$. Betrachte jetzt den Spezialfall $t = 0$: Dann ist $u \neq 0$, da $B \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, und man hat $x = \frac{-C}{2u}$, y beliebig. Also genau die senkrechten Geraden. □

Um die Bilder von Geraden und Kreisen unter den gebrochen- linearen Transformationen zu untersuchen, betrachten wir folgenden

(1.8) Satz
Unter gebrochen- linearen Transformationen geht die Menge der Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ in sich über. ◇

Beweis
Betrachte $z = M\tau \Leftrightarrow \tau \overset{(*)}{=} M^{-1}z$ mit $M \in \mathrm{Gl}(2;\mathbb{C})$: Dazu:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und daraus folgt:

$$\tau = M^{-1}z = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

Setze jetzt (*) in die allgemeine Kreisgleichung (1.6) ein:

$$\begin{aligned}
& A\cdot \frac{dz-b}{-cz+a}\cdot\frac{\overline{d}\overline{z}-\overline{b}}{-\overline{c}\overline{z}+\overline{a}} + B\cdot\frac{dz-b}{-cz+a} + \overline{B}\cdot\frac{\overline{d}\overline{z}-\overline{b}}{-\overline{c}\overline{z}+\overline{a}} + C = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \underbrace{(Ad\overline{d} - B\overline{c}d - \overline{B}c\overline{d} + Cc\overline{c})}_{=:\alpha} z\overline{z} + \underbrace{(-A\overline{b}d + B\overline{a}d + \overline{B}\overline{b}c - C\overline{a}c)}_{=:\beta} z \\
& + \underbrace{(-Ab\overline{d} + Bb\overline{c} + \overline{B}a\overline{d} - Ca\overline{c})}_{=:\overline{\beta}} \overline{z} + \underbrace{(Ab\overline{b} - B\overline{a}b - \overline{B}a\overline{b} + Ca\overline{a})}_{=:\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

- $\alpha \in \mathbb{R}$, da $\underbrace{d\overline{d}}_{=|d|} \in \mathbb{R}$, $\underbrace{c\overline{c}}_{=|d|} \in \mathbb{R}$ und $B\overline{c}d + \overline{B}c\overline{d} \in \mathbb{R}$, als Summe einer Zahl aus $\mathbb{C}$ und ihrer Konjugierten.
- Aus dem gleichen Grund ist $\gamma \in \mathbb{R}$.
- Ausserdem ist der Koeffizient von $\overline{z}$ das Konjugierte vom Koeffizient von z und $\beta \in \mathbb{C}$.
- Und α und β können nicht gleiczeitig 0 sein.

Also hat der obige Ausdruck die Form der Gleichung des allgemeinen Kreises. $\square$

§2 Die obere Halbebene und der Einheitskreis

Ziel dieses Kapitels ist es die Automorphismen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und des Einheitskreises $\mathbb{E}$ zu beschreiben. Das ganze Kapitel ist lediglich eine Wiederholung aus Funktionentheorie I. Wir benötigen es jedoch um spätere Sätze zu beweisen. Wie bereits in der Vorlesung Funktionentheorie I gesehen, wird die obere Halbebene, d.h. die Menge aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil, mit $\mathbb{H}$ bezeichnet. Also

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}\tau > 0\}.$$

Außerdem bezeichnen wir den Einheitskreis mit $\mathbb{E}$, also

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Ist G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, so steht

$$\operatorname{Aut} G := \{\varphi : G \to G;\ \varphi \text{ biholomorph}\}$$

für die Automorphismengruppe von G. Laut Lemma VII (1.4)(a) der Vorlesung Funktionentheorie I bildet Aut G eine Gruppe bezüglich Komposition. Der folgende Satz ist auch bereits aus der Vorlesung Funktionentheorie I bekannt:

(2.1) Satz

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$.

a) Dann ist die Abbildung

$$\Phi_C : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \tau \mapsto C\tau = \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

biholomorph mit Umkehrabbildung

$$\Phi_{C^{-1}} : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, z \mapsto C^{-1}z = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

b) Es gilt:

$$\operatorname{Aut} \mathbb{H} = \Phi_{C^{-1}} \circ \operatorname{Aut} \mathbb{E} \circ \Phi_C. \qquad \diamond$$

Man nennt Φ_C die Cayley- Transformation.

Beweis
(a) Siehe Satz VII (2.9) der Vorlesung Funktionentheorie.
(b) Laut Lemma VII (1.4) b) der Vorlesung Funktionentheorie gilt:
Ist $f : G \to G'$ biholomorph, so gilt

$$\operatorname{Aut} G' = f \circ \operatorname{Aut} G \circ f^{-1}.$$

Mit $G = \mathbb{H}$, $G' = \mathbb{E}$ sowie $f = \Phi_C$ und $f^{-1} = \Phi_{C^{-1}}$ folgt die Behauptung. □

$\mathbb{H}$ ist also ein unbeschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, das biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden kann.

Für das weitere Vorgehen benötigen wir folgendes Hilfsmittel:

(2.2) Lemma (Schwarzsches Lemma)
Sei $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $\varphi(0) = 0$. Dann gilt:

$$|\varphi(z)| \leq |z| \quad \text{für alle} \quad z \in E \text{ und } |\varphi'(0)| \leq 1.$$

Gibt es ein a $\in \mathbb{E}\backslash\{0\}$ mit $\varphi(a) = a$ oder gilt $|\varphi'(0)| = 1$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}. \qquad \diamond$$

Beweis
Siehe Satz VII (2.4) der Vorlesung Funktionentheorie. □

Damit haben wir das zentrale Hilfsmittel, um alle Automorphismen von $\mathbb{E}$ mit Fixpunkt 0 zu beschreiben.

(2.3) Lemma
Für $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathbb{E}$ gilt genau dann $\varphi(0) = 0$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\varphi(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}. \qquad \diamond$$

Beweis
Siehe Satz VII (2.5) der Vorlesung Funktionentheorie. □

Die Automorphismen des Einheitskreises beschreiben wir im folgenden

(2.4) Satz
Die Automorphismen des Einheitskreises sind genau die Abbildungen der Form

$$\mathbb{E} \to \mathbb{E},\ z \mapsto e^{i\lambda} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \text{mit } a \in \mathbb{E},\ \lambda \in [0, 2\pi). \qquad \diamond$$

Beweis
Siehe Satz VII (2.6) der Vorlesung Funktionentheorie. □

§3 Die Automorphismen von $\mathbb{H}$

Die Automorphismen der oberen Halbebene werden genauer untersucht und beschrieben, die spezielle lineare Untergruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ und die Orthogonalkreise werden eingeführt. Anstelle von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ betrachten wir jetzt die Untergruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ der reellen invertierbaren Matrizen.

— Die Automorphismen der oberen Halbebene —

Für $M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ und $\operatorname{Im}\tau \neq 0$ gilt jetzt $M\tau \in \mathbb{C}$, da

$$\begin{aligned}
M\tau &= \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \\
&\overset{\tau=x+iy}{=} \frac{ax+b+iay}{cx+d+icy} \\
&= \frac{(ax+b+iay)\cdot(cx+d-icy)}{(cx+d)^2+icy} \\
&= \frac{acx^2+axd-iaxcy+bcx+bd-ibcy+iacxy+iady+acy^2}{(cx+d)^2+icy} \\
&= \frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+bd+iy(ad-bc)}{(cx+d)^2+icy} \\
&\overset{\det M=ad-bc}{=} \frac{ac(x^2+y^2)+x\det M+bd}{(cx+d)^2+icy} + iy\cdot\frac{\det M}{(cx+d)^2+icy}
\end{aligned}$$

und $\det M \neq 0$ mit $a,b,c,d,x,y \in \mathbb{R}$.

(3.1) Hilfssatz
Für $M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ und $\operatorname{Im}\tau \neq 0$ gilt: $\operatorname{Im} M\tau = \frac{\det M}{|c\tau+d|^2}\cdot\operatorname{Im}\tau$. ◇

Beweis
Zeige zuerst: $\overline{M\tau} = M\overline{\tau}$. Dazu:

$$\begin{aligned}
\overline{M\tau} &= \overline{\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} \\
&= \frac{\overline{(a\tau+b)}}{\overline{(c\tau+d)}} \\
&\overset{a,b,c,d\in\mathbb{R}}{=} \frac{a\overline{\tau}+b}{c\overline{\tau}+d} \\
&= M\overline{\tau}
\end{aligned}$$

Betrachte jetzt:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & M\overline{\tau} - M\tau & \overset{(1.3)(d)}{=} & \dfrac{\det\ M}{(c\overline{\tau}+d)(c\tau+d)} \cdot (\overline{\tau}-\tau) \\
 & & = & \dfrac{(\overline{\tau}-\tau)\cdot \det\ M}{c^2\tau\overline{\tau} + cd\overline{\tau} + cd\tau + d^2} \\
 & & \overset{\tau=x+iy}{=} & \dfrac{(-2yi)\cdot \det M}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2} \\
 & & = & \dfrac{(-2yi)\cdot \det M}{c^2x^2+2cdx+d^2+c^2y^2} \\
 & & = & \dfrac{(-2yi)\cdot \det M}{\underbrace{(cx+d)^2}_{=\mathrm{Re}\,(c\tau+d)^2} + \underbrace{(cy)^2}_{=\mathrm{Im}\,(c\tau+d)^2}} \\
 & & = & \dfrac{(-2yi)\cdot \det M}{|c\tau+d|^2} \\
\overset{M\overline{\tau}=\overline{M\tau}}{\Longleftrightarrow} & -2i\mathrm{Im}\ M\tau & = & \dfrac{-2i\cdot \det\ M\ \cdot\ \mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2} \\
\Longleftrightarrow & \mathrm{Im}\ M\tau & = & \dfrac{\det\ M}{|c\tau+d|^2}\cdot \mathrm{Im}\ \tau
\end{array}
\qquad \square
$$

$c\tau + d = 0$ ist nicht möglich, da sonst $\tau = \frac{-d}{c} \in \mathbb{R}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\mathrm{Im}\ \tau \neq 0$. Aus $|c\tau+d|^2 > 0$, und $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ folgt $\mathrm{Im}\ M\tau > 0$ für $\det\ M > 0$. Also wird $\mathbb{H}$ durch

$$\Phi_M : \tau \mapsto M\tau, \quad \text{mit} \quad M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R}), \quad \text{und} \quad \det\ M > 0,$$

in sich abgebildet. Wegen (1.3)(b) kann man ohne Einschränkung annehmen, dass M aus der Untergruppe

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R});\ \det M = 1\},$$

der so genannten speziellen linearen Gruppe vom Grad 2 über $\mathbb{R}$, stammt.

(3.2) Bemerkungen

a) $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ ist eine Gruppe bzgl. der Multiplikation.

b) $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$.

c) $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$. $\diamond$

Beweis

a)
- Matrixprodukt ist assoziativ, denn für A, B, C $\in$ GL(2; $\mathbb{R}$) gilt:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{2}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{2}A_{il}B_{lk}\right)C_{kj}$$

und

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{l=1}^{2}A_{il}(BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{2}A_{il}\left(\sum_{k=1}^{2}B_{lk}C_{kj}\right)$$

Aufgrund der Distributivgesetze in $\mathbb{R}$ sind die beiden Ausdrücke für alle i,j$\in \{1,2\}$ gleich. Daraus folgt: $(AB)C = A(BC)$

- Das neutrale Element ist: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da $AE = EA = A$ für alle $A \in$ GL(2; $\mathbb{R}$).
- Für jedes $A \in$ GL(2; $\mathbb{R}$) existiert ein inverses Element A^{-1}, da $\det A \neq 0$.

b)
- Das neutrale Element $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ SL(2; $\mathbb{R}$), da $\det E = 1$.
- Aus $A, B \in$ SL(2; $\mathbb{R}$) folgt $(AB) \in$ SL(2; $\mathbb{R}$), denn $1 = 1 \cdot 1 = \det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = 1$
- Für jedes $A \in$ SL(2; $\mathbb{R}$) existiert ein inverses Element $A^{-1} \in$ SL(2; $\mathbb{R}$), denn aus $\det A = 1$ folgt $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$.

c) SL(2; $\mathbb{R}$) ist Normalteiler von GL(2; $\mathbb{R}$), denn für jedes $A \in$ GL(2; $\mathbb{R}$) und $M \in$ SL(2; $\mathbb{R}$) gilt: $A^{-1}MA \in$ SL(2; $\mathbb{R}$), da

$$\det(A^{-1}MA) = \det(A^{-1}) \cdot \det(M) \cdot \det(A) = \frac{1}{\det A} \cdot 1 \cdot \det A = 1.$$ □

(3.3) Satz

Die biholomorphen Selbstabbildungen (also die Automorphismen) von $\mathbb{H}$ sind genau die Transformationen

$$\Phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \tau \mapsto M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}),$$

mit Umkehrabbildung $\Phi_{M^{-1}}$. Die Gruppe Aut $\mathbb{H}$ operiert transitiv auf $\mathbb{H}$ und ist isomorph zur Faktorgruppe PSL(2; $\mathbb{R}$) :=SL(2; $\mathbb{R}$)/$\{\pm E\}$. ◇

(Vgl. auch Satz VII (2.10),(2.11) und (4.3) der Vorlesung Funktionentheorie I.)

Beweis
Wegen (3.1) folgt $\Phi_M(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, da $\mathrm{Im}\, M\tau = \frac{\det M}{|c\tau+d|^2} \cdot \mathrm{Im}\,\tau$ und wegen $|c\tau + d|^2 > 0$ und $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ folgt $\mathrm{Im}\, M\tau > 0$ für $\det M > 0$. Aus (1.3)(c) und (1.3)(a) folgt

$$\Phi_M \circ \Phi_{M^{-1}} = \Phi_{M^{-1}}\Phi_M = \Phi_E = \mathrm{id}.$$

Daher ist $\Phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \tau \mapsto M\tau, \quad \text{mit} \quad M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, biholomorph mit Umkehrabbildung $\Phi_{M^{-1}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Die Menge Aut $\mathbb{H}$ bildet, nach Lemma VII (1.4)(a) der Vorlesung Funktionentheorie I, eine Gruppe bezüglich Komposition. Die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}, \quad M \mapsto \Phi_M,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, weil

- $\Phi_E = id$
- $\Phi_M \circ \Phi_N = \Phi_{MN}$ für $M, N \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$
- $\Phi_{E^{-1}} = \Phi_E^{-1}$

Für den Kern gilt: Kern $\Phi = \{M |\ \Phi_M = \Phi_E\}$. Wegen Bemerkung (1.5) gilt: Für $M, L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ gilt

$$\Phi_M = \Phi_L \Longleftrightarrow M = \pm L.$$

Also können wir jetzt den Kern bestimmen:

$$\Phi_M = \Phi_E \Leftrightarrow M = \pm E.$$

Insgesamt also: Kern $\Phi = \{\pm E\}$. Aus dem Homomorphiesatz für Gruppen folgt dann sofort

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\{\pm E\} \cong \Phi(\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})),$$

weil Φ Gruppenhomomorphismus und $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ und Aut $\mathbb{H}$ Gruppen sind.
Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass $\Phi(\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})) =$Aut $\mathbb{H}$: Sei für $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & \frac{-x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}).$$

Da $\tau \in \mathbb{H}$ ist $y > 0$, also insbesonders $y \neq 0$ und somit ist M wohldefiniert. Dann ist

$$M\tau = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\tau - \frac{x}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = \frac{\tau}{y} - \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{iy}{y} - \frac{x}{y} = i.$$

D.h. für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{C}$ existiert ein $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $M\tau = i$. Oder umgekehrt: $M^{-1}i = \tau$ für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{C}$. Es gibt nur eine Bahn

$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})i = \{Mi;\ M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\} = \mathbb{C}$, also operiert $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$.
Sei nun $\varphi \in \mathbb{H}$ beliebig. Dann existiert folglich eine Matrix $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, so dass $\psi := \Phi_M \circ \varphi$ bereits $\psi(i) = i$ erfüllt, denn für $\varphi(i) = \tau$ wähle M wie oben mit $M\tau = i$. Laut Satz (2.1) gilt: $\mathrm{Aut}\,\mathbb{H} = \Phi_{C^{-1}} \circ \mathrm{Aut}\,\mathbb{E} \circ \Phi_C$. Demnach ist

$$\begin{aligned}
& \psi^* := \Phi_C \circ \psi \circ \Phi_{C^{-1}} \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{E} \\
\text{mit} \quad & \psi^*(0) = \Phi_C\left[\psi\left(\Phi_{C^{-1}}(0)\right)\right] \\
& = \Phi_C\left[\psi\left(i \cdot \frac{1+0}{1-0}\right)\right] && \text{, da} \quad C^{-1} = \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& = \Phi_C\left(\psi(i)\right) \\
& = \Phi_C(i) && \text{, da} \quad \psi(i) = i \\
& = \frac{i-i}{i+i} && \text{, da} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Jetzt wissen wir durch Lemma (2.3), dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\psi^*(z) = e^{2i\lambda} \cdot z = \Phi_K(z), \quad K = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}).$$

Demnach gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \Phi_{M^{-1}} \circ \psi = \Phi_{M^{-1}} \circ \Phi_{C^{-1}} \circ \psi^* \circ \Phi_C = \Phi_L, \\
L &= M^{-1} \cdot C^{-1} \cdot K \cdot C \\
&= M^{-1} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\lambda + i\sin\lambda & 0 \\ 0 & \cos\lambda - i\sin\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\
&= M^{-1} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} i\cos\lambda - \sin\lambda & i\cos\lambda + \sin\lambda \\ -\cos\lambda - i\sin\lambda & \cos\lambda - i\sin\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\
&= M^{-1} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} i\cos\lambda - \sin\lambda + i\cos\lambda + \sin\lambda & \cos\lambda + i\sin\lambda - \cos\lambda + i\sin\lambda \\ -\cos\lambda - i\sin\lambda + \cos\lambda - i\sin\lambda & i\cos\lambda - \sin\lambda + i\cos\lambda + \sin\lambda \end{pmatrix} \\
&= M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und} \quad L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}), \quad \text{da} \quad \det L &= \det\left[M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\right] \\
&= \det M^{-1} \cdot \det\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \left((\cos\lambda)^2 + (\sin\lambda)^2\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Schlussendlich hat man $\Phi(\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})) =$Aut $\mathbb{H}$. Somit operiert Aut $\mathbb{H}$ transitiv auf $\mathbb{H}$. □

Für $c \neq 0$ gilt:

$$M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{ad - bc}{\tau + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + \frac{d}{c}}$$

Für $c = 0$ gilt wegen det $M = 1$ also $a = \frac{1}{d}$:

$$M\tau = \frac{a\tau + b}{d} = \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d}$$

Daraus folgt folgende Zerlegung für $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$M\tau = \begin{cases} \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d} & \text{,für } c = 0 \\ \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + \frac{d}{c}} & \text{,für } c \neq 0 \end{cases}$$

(Vgl. auch [3]) Aus dieser Zerlegung folgt das

(3.4) Lemma
Die Gruppe Aut $\mathbb{H}$ wird erzeugt von den Abbildungen

$$f_1 : \tau \mapsto \tau + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad f_2 : \tau \mapsto \lambda\tau,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0, \quad f_3 : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

f_1 wird Translation, f_2 Drehstreckung und f_3 Inversion genannt. ◇

Beweis
Laut vorigem Satz sind die Automorphismen von $\mathbb{H}$ genau die Transformationen

$$\Phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \tau \mapsto M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}).$$

Also brauchen wir nur die Zerlegung zu betrachten, d.h. wir zeigen: jede gebrochen-lineare Transformation lässt sich aus Translation, Drehstreckung und Inversion zusammensätzen.

- Im Fall $c = 0$ gilt: $M\tau = \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d}$ und wir können diese Abbildung als eine Hintereinanderausführung von Abbildungen vom Typ f_1 und f_2 darstellen: Wegen $\tau \overset{f_2}{\mapsto} \frac{1}{d^2} \cdot \tau \overset{f_1}{\mapsto} \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d}$ ist

$$M\tau = \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d} = f_1\left(f_2(\tau)\right) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{b}{d} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1}{d^2}.$$

- Ist $c \neq 0$, geht es folgendermaßen:

$$\tau \overset{f_1}{\mapsto} \tau + \frac{d}{c} \overset{f_3}{\mapsto} \frac{-1}{\tau + \frac{d}{c}} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + \frac{d}{c}} \overset{f_1}{\mapsto} \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + \frac{d}{c}}$$ □

Der Satz (3.3) und das Lemma (3.4) ergeben die folgende

(3.5) Folgerung
Die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ wird erzeugt von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ ◇

Beweis
Laut Satz (3.3) gilt: $\mathrm{Aut}\,\mathbb{H} = \Phi(\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ und laut Lemma (3.4) wird $\mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$ von Translation, Drehstreckung und Inversion erzeugt.

a) Für die Translation gilt:

$$\tau + \alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M_1} \tau,$$

mit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, da $\det M_1 = 1$.

b) Für die Drehstreckung gilt:

$$\lambda\tau = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}}_{=M_2} \tau,$$

mit $M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, da $\det M_2 = 1$.

c) Für die Inversion gilt:

$$-\frac{1}{\tau} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_3} \tau,$$

mit $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, da $\det M_3 = 1$.

Diese Matrizen erzeugen jetzt wegen

$$
\begin{aligned}
M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) &\overset{(3.3)}{\Longleftrightarrow} \Phi_M \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{H} \\
&\overset{(3.4)}{\Longleftrightarrow} \Phi_M \text{ wird von } f_1\ ,\ f_2 \text{ und } f_3 \text{ erzeugt.} \\
&\overset{a)-c)}{\Longleftrightarrow} \Phi_M \text{ ist Komposition von } \Phi_{M_1}\ ,\ \Phi_{M_2} \text{ und } \Phi_{M_3} \\
&\Longleftrightarrow \Phi_M = \Phi_{M_{i_1}\cdot\ldots\cdot M_{i_n}}\ , \quad \text{mit } i_1,\ldots,i_n \in \{1,2,3\} \\
&\overset{(1.5)}{\Longleftrightarrow} M = \pm M_{i_1}\cdot\ldots\cdot M_{i_n} \quad , \quad \text{mit } i_1,\ldots,i_n \in \{1,2,3\}
\end{aligned}
$$

die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ □

Abschließend noch eine

(3.6) Bemerkung

Die Abbildung $\tau \mapsto \lambda\tau,\ \lambda > 0$, kann man aus den Abbildungen $\tau \mapsto \tau + \alpha$ und $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ zusammensetzen. ◇

Beweis

Verifiziere dazu die so genannte Hua- Identität:

$$
\mu^2\tau = \frac{-1}{\lambda - \frac{1}{\mu - \frac{1}{\tau+\lambda}}} \quad , \quad \text{für } \lambda\mu = 1.
$$

Es gilt nämlich:

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{\lambda - \frac{1}{\underbrace{\mu - \frac{1}{\tau+\lambda}}_{=\frac{\mu\tau+\mu\lambda-1}{\tau+\lambda}}}} &\overset{\lambda\mu=1}{=} \frac{-1}{\lambda - \frac{\tau+\lambda}{\mu\tau}} \\
&= \frac{-1}{\frac{\mu\lambda\tau-\tau-\lambda}{\mu\tau}} \\
&= \frac{-\mu\tau}{\tau-\tau-\lambda} \\
&= \frac{-\mu\tau}{-\lambda} \\
&\overset{\lambda=\frac{1}{\mu}}{=} \mu^2\tau
\end{aligned}
$$

□

— *Orthogonalkreise* —

(3.7) Bezeichnung (Orthogonalkreis von $\mathbb{H}$)
Jeder in $\mathbb{H}$ gelegene Teil eines Kreisbogens bzw. jede Halbgerade in $\mathbb{H}$, der bzw. die auf der reellen Achse senkrecht steht nennt man einen *Orthogonalkreis von* $\mathbb{H}$. Im Fall eines Kreisbogens ist es ein Halbkreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse. ◇

(3.8) Satz
Unter den Automorphismen von $\mathbb{H}$ gehen Orthogonalkreise in Orthogonalkreise über. ◇

Beweis
Aus dem Hilfssatz (1.6) folgt: Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \quad A,\ C \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0 \quad \text{und} \quad B \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r > 0$ werden gegeben durch

$$m = -\frac{\overline{B}}{A} \quad \text{bzw.} \quad r^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

wobei $|B|^2 > AC$. Da der Mittelpunkt eines Orthogonalkreises auf der reellen Achse liegt, ist auch $B \in \mathbb{R}$. Ein Kreis in $\mathbb{C}$ ist also Orthogonalkreis, genau dann wenn $B \in \mathbb{R}$. Bei einer Geraden in $\mathbb{C}$ ist $A = 0$. Diese steht laut Folgerung (1.7) senkrecht, wenn Im $B = 0$. Also ist eine Gerade Orthogonalkreis, genau dann wenn $A = 0$ und $B \in \mathbb{R}$. Laut Lemma (3.4) genügt es, den Fall der Abbildungen $\tau \mapsto \lambda\tau = z$ und $\tau \mapsto \frac{-1}{\tau} = z$ zu betrachten, da die Behauptung für Translation klar ist. Bei der Translation handelt es sich nur um eine Verschiebung auf der reellen Achse. Bei der Drehstreckung gilt: Aus $\lambda\tau = z$, folgt $\tau = \frac{1}{\lambda} \cdot z$ und

$$\begin{aligned} & A\tau\overline{\tau} + B(\tau + \overline{\tau}) + C = 0 \\ \overset{\tau = \frac{1}{\lambda}\cdot z}{\Longleftrightarrow} \quad & \underbrace{\frac{1}{\lambda^2} \cdot A}_{=:\widetilde{A}} \cdot (z \cdot \overline{z}) + \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot B}_{=:\widetilde{B}} \cdot (z + \overline{z}) + C = 0. \end{aligned}$$

Hier ist $\widetilde{B} \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $B \in \mathbb{R}$, da $\lambda \in \mathbb{R}$. Also ist es wieder ein Orthogonalkreis. Betrachten wir nun die Inversion: Aus $\frac{-1}{\tau} = z$, folgt $\tau = \frac{-1}{z}$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
& A\tau\overline{\tau} + B(\tau + \overline{\tau}) + C = 0 \\
\overset{\tau = \frac{-1}{z}}{\iff} \quad & A \cdot \left[\frac{-1}{z} \cdot \overline{\left(\frac{-1}{z}\right)}\right] + B \cdot \left[\frac{-1}{z} + \overline{\left(\frac{-1}{z}\right)}\right] + C = 0 \\
\overset{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}{\iff} \quad & A \cdot \left(\frac{1}{z \cdot \overline{z}}\right) - B \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) + C = 0 \\
\overset{\cdot z\overline{z}}{\iff} \quad & A - B \cdot (\overline{z} + z) + C \cdot z\overline{z} = 0 \\
\iff \quad & \underbrace{C}_{=:\widetilde{A}} \cdot z\overline{z} + \underbrace{(-B)}_{=:\widetilde{B}} \cdot (\overline{z} + z) + \underbrace{A}_{=:\widetilde{C}} = 0.
\end{aligned}$$

Da $B \in \mathbb{R}$, ist auch $\widetilde{B} \in \mathbb{R}$. Es ist auch klar, dass $\widetilde{A},\ \widetilde{C} \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{B}^2 = B^2 > AC = \widetilde{C}\widetilde{A}$. Betrachte folgende Fälle:

- Beim Orthogonalkreis war $C \neq 0$: Darum erhalten wir wegen $\widetilde{A} = C \neq 0$ einen Kreis mit $B \in \mathbb{R}$, also einen Orthogonalkreis.
- Beim Orthogonalkreis war $C = 0$: Da B und C nicht gleichzeitig 0 sein können, (sonst ist $|B|^2 = AC$ und dies ist ein Widerspruch) erhalten wir wegen $\widetilde{A} = C = 0$ eine Gerade mit $B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, also einen Orthogonalkreis.

Insgesamt folgt also die Behauptung. $\square$

§4 $\mathbb{H}$ als homogener Raum

In diesem Abschnitt spielen orthogonale Matrizen eine zentrale Rolle. Nach Satz (3.3) gibt es zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ eine Matrix $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $\tau = Mi$. Sind zwei Matrizen $M, L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $\tau = Mi = Li$ gegeben, so gilt $(L^{-1}M)i = i$ nach (1.3)(c) und (1.3)(a), d.h. es gibt ein $K \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $M = LK$ und $Ki = i$.

(4.1) Bezeichnung (orthogonale Gruppe)
Es bezeichne

$$O(2;\mathbb{R}) = \{O \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R});\ O^{-1} = O^T\}$$

die orthogonale Gruppe vom Grad 2 über $\mathbb{R}$ und

$$\mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) = \{O \in O(2;\mathbb{R});\ \det O = 1\}$$

die spezielle orthogonale Gruppe vom Grad 2 über $\mathbb{R}$. $\diamond$

$SO(2;\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe von $SL(2;\mathbb{R})$, weil:

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2;\mathbb{R})$, wegen $E = E^{-1}$ und $\det E = 1$
- Für $M, N \in SO(2;\mathbb{R})$ gilt erstens
$$1 = 1 \cdot 1 = \det M \det N = \det MN$$
und zweitens, da M,N quadratisch und invertierbar,
$$(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1} = N^T \cdot M^T = (MN)^T$$
- Für $M \in SO(2;\mathbb{R})$ gilt: $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{1} = 1$ und
$$M^{-1} = M^T \Longleftrightarrow M = \left(M^T\right)^{-1} \Longleftrightarrow \left(M^{-1}\right)^T = \left(M^{-1}\right)^{-1}$$
also $M^{-1} \in SO(2;\mathbb{R})$.

(4.2) Lemma
Folgende Aussagen sind für $K \in SL(2;\mathbb{R})$ äquivalent:

i) $Ki = i$.

ii) $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

iii) $K \in SO(2;\mathbb{R}) := \{M \in SL(2;\mathbb{R});$ M orthogonal$\}$.

iv) Für $C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ gilt $C \cdot K \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$. ◇

Beweis
$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Sei $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Ki = i \Longleftrightarrow\ & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} i = i \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta} = i \\ \Longleftrightarrow\ & \alpha i + \beta = -\gamma + i\delta \\ \Longleftrightarrow\ & \alpha = \delta \text{ und } \beta = -\gamma \text{ und } 1 \overset{K \in SL(2;\mathbb{R})}{=} \det K = \alpha^2 + \beta^2, \\ & \text{d.h} \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\det K = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ und K ist orthogonal, weil:

$$K^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha^2+\beta^2=1}{=} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = K^T.$$

(iii)$\Rightarrow$ (ii): $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, dann ist $K^T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ und $K^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Da $K \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist $\alpha\delta - \beta\gamma = \det K = 1$. Außerdem ist K orthogonal, d.h. $K^T = K^{-1}$, also $\delta = \alpha$ und $\gamma = -\beta$ und somit $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha^2+\beta^2 = 1$.

(ii)$\Leftrightarrow$ (iv):

$$\begin{aligned}
CKC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\alpha+i\beta}{2} & \frac{\alpha-i\beta}{2} \\ \frac{-\beta+i\alpha}{2} & \frac{-\beta-i\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha+i\beta+i\beta+\alpha & \alpha-i\beta+i\beta-\alpha \\ \alpha+i\beta-i\beta-\alpha & \alpha-i\beta-i\beta+\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha+i\beta & 0 \\ 0 & \alpha-i\beta \end{pmatrix} \\
&\overset{\varphi\in\mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \text{da } |\alpha+i\beta| = 1 \text{ und somit } \alpha+i\beta = e^{i\varphi} \\
&\quad\ \text{für ein } \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha - i\beta = \overline{\alpha+i\beta} = e^{-i\varphi}.
\end{aligned}$$

□

Mit der Untergruppe $\mathrm{SO}(2;\mathbb{R})$ von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ kann man den Quotientenraum

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) := \{L \cdot \mathrm{SO}(2;\mathbb{R});\ L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})\} \tag{6}$$

bilden. $\mathrm{SO}(2;\mathbb{R})$ ist wegen

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) \quad \text{mit:} \\
A^{-1}BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{wobei } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

kein Normalteiler in $SL(2;\mathbb{R})$. Aus genau diesem Grund liegt hier keine Faktorgruppe, sondern nur ein so genannter *homogener Raum* vor. Aus der Algebra ist bekannt, dass für eine Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$, G durch Linksmultiplikation auf G/H operiert. Also operiert die Gruppe $SL(2;\mathbb{R})$ von links auf dem Quotientenraum (6):

$$(M, L \cdot SO(2;\mathbb{R})) \longmapsto (ML) \cdot SO(2;\mathbb{R}), \text{ für } M \in SL(2;\mathbb{R}). \tag{7}$$

(4.3) Satz
Wegen Lemma (4.2) ist die Abbildung

$$\varphi : SL(2;\mathbb{R})/SO(2;\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{H}, \quad L \cdot SO(2;\mathbb{R}) \longmapsto Li$$

eine mit der Operation (7) verträgliche Bijektion. ◇

Beweis
Seien dazu für $L, L' \in SL(2;\mathbb{R})$, $M \in SO(2;\mathbb{R})$ mit $L' \cdot M = L$ definiert. Also $L{\cdot}SO(2;\mathbb{R}) = L'{\cdot}SO(2;\mathbb{R})$.

- Wohldefiniertheit:

$$\begin{aligned} L'i = Li &\overset{L'\cdot M=L}{\iff} L'i = \left(L'M\right) i \\ &\overset{(1.3)}{\iff} L'i = L'\left(Mi\right) \\ &\overset{(4.2)}{\iff} L'i = L'i \end{aligned}$$

- Verträglichkeit:

$$\begin{aligned} \varphi\left((ML)\cdot SO(2;\mathbb{R})\right) &= (ML)i \\ M \cdot \varphi\left(L \cdot SO(2;\mathbb{R})\right) = M \cdot (Li) &\overset{(1.3)}{=} (ML)i \end{aligned}$$

- injektiv:

$$\begin{aligned} & \varphi\left(L' \cdot SO(2;\mathbb{R})\right) = \varphi\left(L \cdot SO(2;\mathbb{R})\right) \\ \iff & L'i = Li \\ \iff & (L^{-1}L')i = i \\ \iff & \exists M \in SO(2;\mathbb{R}) \text{ mit } L^{-1}L' = M \\ \iff & L' = LM \\ \iff & L' \cdot SO(2;\mathbb{R}) = L \cdot SO(2;\mathbb{R}) \end{aligned}$$

- surjektiv:
  Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ existiert nach Satz (3.3) ein $N \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $Ni = \tau$. $\square$

Man schreibt daher auch

$$\mathbb{H} \cong \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2;\mathbb{R})$$

Aus Lemma (4.2) folgt eine Verschärfung der Transitivitätsaussage.

(4.4) Satz
Seien $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ mit $\tau \neq \tau'$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\lambda > 1$ und eine eindeutig bestimmte Transformation $\tau \mapsto M\tau,\ M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, so dass

$$M\tau = i \quad \text{und} \quad M\tau' = \lambda i. \tag{8}$$

$\diamond$

Beweis
Zur Existenz: Aut $\mathbb{H}$ operiert laut Satz (3.3) transitiv auf $\mathbb{H}$. Daraus folgt: es existiert ein $N \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $N\tau = i$. Da die Möbiustransformationen biholomorph sind, gilt ausserdem: $N\tau' = \widetilde{\tau} \neq i$ für $\tau \neq \tau'$.

Annahme 1: Es existiert ein $K \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, so dass

$$Ki = i \text{ und } K\widetilde{\tau} = \lambda i, \text{ für } \lambda > 1. \tag{9}$$

Dann gilt wegen $N\tau = i$:

$$KN\tau = i \text{ und } KN\tau' = \lambda i.$$

Also ist $M = K \cdot N$ genau die Matrix aus (8).

Also genügt es zu zeigen, dass es zu $i \neq \tau' = u + iv \in \mathbb{H}$ ein $K \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ gibt, so dass (9) gilt.

Annahme 2: Es existiert ein $\varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi\left(\Phi_C(\tau')\right) = a \in (0,1)$. Dann gilt:

- wegen Satz (2.1) gilt Aut $\mathbb{H} = \Phi_{C^{-1}} \circ \mathrm{Aut}\ \mathbb{E} \circ \Phi_C$, und wegen Satz (3.3) existiert ein $L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ mit $\Phi_L = \Phi_{C^{-1}} \circ \varphi \circ \Phi_C$ und

$$\Phi_L(i) = \Phi_{C^{-1}}\left[\varphi\left(\Phi_C(i)\right)\right] = \Phi_{C^{-1}}\left(\varphi(0)\right) = \Phi_{C^{-1}}(0) = i$$

  Insgesamt also $Li = i$.

- analog für τ':

$$\Phi_L(\tau') = \Phi_{C^{-1}}\left[\underbrace{\varphi\left(\Phi_C(\tau')\right)}_{=a\in(0,1)}\right] = i\cdot\underbrace{\frac{1+a}{1-a}}_{=:\lambda\in\mathbb{R}}$$

mit $\lambda > 1$.

Für $K = L \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ haben wir ein K gefunden, das (9) erfüllt.

Es genügt also ein $\varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi\left(\Phi_C(\tau')\right) = a \in (0,1)$ zu finden.
Nach Lemma (2.3) sind die Automorphismen des Einheitskreises mit $\varphi(0) = 0$ genau die Abbildungen $\varphi(z) = e^{i\lambda}\cdot z$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Abbildung ist einfach eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt 0. Wir suchen uns λ genau so aus, dass wir den Punkt $\Phi_C(\tau')$ auf die positive reelle Achse drehen.

Beispiel: Für $\Phi_C(\tau') = \frac{i}{2}$ wählt man $\lambda = \frac{3}{2}\cdot\pi$ und es gilt:

$$e^{i\lambda}\cdot\Phi_C(\tau') = e^{\frac{3i}{2}\cdot\pi}\cdot\frac{i}{2} = -i\cdot\frac{i}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\varphi\left(\Phi_C(\tau')\right)$ liegt also in (0,1), da es einerseits auf der positiven reellen Achse liegt und andererseits ein Automorphismus des Einheitskreises ist. 0 ist wegen $\Phi_C(\tau') \neq 0$ ausgeschlossen. Damit haben wir ein entsprechendes φ gefunden und die Existenz ist bewiesen.

Zur Eindeutigkeit: Sei $M, M' \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ und $\lambda, \lambda' > 1$, mit $M\tau = i,\ M'\tau = i$ und $M\tau' = \lambda i$, $M'\tau' = \lambda' i$. Aus $M\tau = i \Leftrightarrow \tau = M^{-1}i$ und $M'\tau = i \Leftrightarrow \tau = (M')^{-1}i$ folgert man:

$$M^{-1}i = (M')^{-1}i \Leftrightarrow \underbrace{M'M^{-1}}_{=:K}i = i.$$

Genau so für $M\tau' = \lambda i \Leftrightarrow \tau' = M^{-1}\lambda i$ und $M'\tau' = \lambda' i \Leftrightarrow \tau' = (M')^{-1}\lambda' i$:

$$M^{-1}\lambda i = (M')^{-1}\lambda' i \Leftrightarrow \underbrace{M'M^{-1}}_{=:K}\lambda i = \lambda' i.$$

Dann gilt

$$Ki = i \text{ und } K\lambda i = \lambda' i \text{ für } K = M'M^{-1} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}).$$

Aus Lemma (4.2) folgt wegen $Ki = i$

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Also

$$\begin{aligned}
K\lambda i = \lambda' i \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha\lambda i + \beta}{-\beta\lambda i + \alpha} = \lambda' i \\
&\Longleftrightarrow \quad (\alpha\lambda i + \beta) = \lambda' i(-\beta\lambda i + \alpha) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\alpha\lambda i + \beta) = \alpha\lambda' i + \beta\lambda\lambda' \\
&\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\alpha\lambda = \alpha\lambda'}_{\Rightarrow \lambda = \lambda'} \quad \text{und} \quad \underbrace{\beta = \beta\lambda\lambda'}_{\Rightarrow \underbrace{\lambda\lambda' = 1}_{\text{Widerspruch: } \lambda,\lambda' > 1} \text{ oder } \beta = 0} \\
&\Longrightarrow \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad 1 = \det K = \alpha^2 \Rightarrow K = \pm E.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

- λ ist eindeutig bestimmt, weil:

$$K\lambda i = \lambda' i \Leftrightarrow (\pm E)\lambda i = \lambda' i \Leftrightarrow \lambda i = \lambda' i \Leftrightarrow \lambda = \lambda'$$

- Die Transformation $\tau \mapsto M\tau$ ist eindeutig bestimmt, weil:

$$\pm E = K = M'M^{-1} \Leftrightarrow \pm M = M' \overset{(1.3)}{\Leftrightarrow} M\tau = M'\tau. \qquad \square$$

§5 Literaturangaben

[1] M. Koecher, A. Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl., Springer 2007, Kapitel II.

[2] A. Krieg: Funktionentheorie I, 2008, Skript zur Vorlesung, Kapitel VII.

[3] W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie, 6. Aufl., Vieweg 1992, Kapitel IX.