Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 22.04.2009

Kerstin Küpper

Im Vortrag wird die Modulgruppe und ihre Erzeuger untersucht und ein exakter Fundamentalbeich der Modulgruppe kennengelernt. Dieses führt uns schließlich zur Modulfigur.

§1 Erzeugende

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Erzeugern der Modulgruppe.

(1.1) Definition (Modulgruppe)
Die Menge

$\Gamma := \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z});\ \det M = 1\}$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation und wird als *Modulgruppe* bezeichnet. $\diamond$

Zur Erinnerung:
Für $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ nennt man $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : \tau \longmapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ eine Möbius-Transformation ([2]FtI VII.2.1).
Da Γ eine Teilmenge von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist, sind nach ([2]FtI VII.2.10) die Möbius-Transformationen der Matrizen aus Γ Automorphismen der oberen Halbebene.

(1.2) Definition (Modulsubstitutionen)
Die Möbius-Transformationen der Matrizen aus Γ werden *Modulsubstitutionen* genannt. $\diamond$

Wir betrachten zunächst ausgewählte Matrizen aus Γ: Sei E die Einheitsmatrix.

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ „Involution"} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ „Translation"} \tag{1}$$

Die Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E \tag{2}$$

$$T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } m \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

$$(JT)^3 = (TJ)^3 = -E \tag{4}$$

Die Matrizen J und T entsprechen den Transformationen der oberen Halbebene

$$\tau \mapsto -1/\tau \quad \text{und} \quad \tau \mapsto \tau + 1 \tag{5}$$

(1.3) Ergänzungs-Lemma
Zu teilerfremden ganzen Zahlen c, d gibt es eine Matrix $M \in \Gamma$ mit $M := \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$.
Je zwei Matrizen mit dieser Eigenschaft unterscheiden sich nur um einen linksseitigen Faktor der Form T^m mit $m \in \mathbb{Z}$ ◇

Beweis
Seien c, $d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann folgt aus dem erweiterten Euklidischen Algorithmus die Existenz von $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$. Das heisst die Matrix $U := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist ein Element von Γ.
Sei $V \in \Gamma$ eine weitere Matrix mit $V := \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$VU^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

denn Γ ist eine Gruppe. Wegen $\det(VU^{-1}) = 1$ muss $VU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^m$ nach (3) gelten für ein $m \in \mathbb{Z}$. Somit gilt $V = T^m U$. □

(1.4) Satz
Die Modulgruppe wird von den Matrizen J und T erzeugt. ◇

Beweis
Seien J und T wie in (1) definiert. Mit Δ bezeichnen wir die von J und T erzeugte Untergruppe von Γ und wollen zeigen, dass bereits $\Gamma = \Delta$ gilt.
Wegen (2) gilt zunächst $-E \in \Delta$. Sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ beliebig. Wir zeigen durch Induktion nach $|c|$, dass $M \in \Delta$:

(IA) Im Fall $c = 0$ hat man: $\det M = a \cdot d = 1$ also $a = d = \pm 1$. Mit (3) erhält man $M = \pm T^m \in \Delta$, da $-E \in \Delta$

(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt und für alle $|c| < n$ gelte $M \in \Delta$. Es bleibt zu zeigen, dass $M \in \Delta$ für $|c| = n$ gilt. Definiere

$$M' := JT^m M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ a+mc & * \end{pmatrix}$$

für geeignetes $m \in \mathbb{Z}$ gilt dann also $0 \leq a + mc < |c|$.
Aus der Induktionsvorraussetzung erhält man $M' \in \Delta$ und damit dann auch $M = T^{-m} J^{-1} M' \in \Delta$. Also gilt für jedes $M \in \Gamma$ auch $M \in \Delta$. Somit folgt $\Delta = \Gamma$. □

Aus dem Satz(1.4) folgt, dass jede Matrix aus Γ als endliches Produkt der Form

$$J^{n_1} T^{m_1} J^{n_2} T^{m_2} ... J^{n_k} T^{m_k} J^{n_{k+1}} \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{N}$$

mit $m_1, ..., m_k \in \mathbb{Z}$ und $n_1, ..., n_{k+1} \in \mathbb{Z}$ geschreieben werden kann. Wegen (2) und (4) kann die Darstellung noch vereinfacht werden zu:

$$T^{m_1} J T^{m_2} ... J T^{m_k}$$

Diese Darstellung ist jedoch nicht eindeutig, was man beriets an (4) sieht.
Aus dem gleichen Satz folgt außerdem mit (5) das

(1.5) Korollar
Die Gruppe der Modulsubstitutionen $\tau \to M\tau$, $M \in \Gamma$, wird von den Abbildungen $\tau \to \tau + 1$ und $\tau \to -1/\tau$ erzeugt. ◇

Setzt man nun

$$U := -TJ = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

so gilt $U^3 = E$ und $T = -UJ^{-1}$. Also bilden auch die Matrizen U und J ein Erzeugendensystem von Γ.

(1.6) Korollar
Die Modulgruppe Γ wird von den Matrizen $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ der Ordnung 4 bzw. 3 erzeugt, denn $J^4 = U^3 = E$ nach (2). $\diamond$

(1.7) Bemerkungen

- Für eine beliebige Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$M^t JM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \det(M) \cdot J$$

  Also ist die Eigenschaft, dass M die Determinante 1 hat äquivalent dazu, dass $M^t JM = J$ gilt. Die Modulgruppe kannn also auch wie folgt geschrieben werden

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z});\ M^t JM = J\} \qquad \diamond$$

- Im Anschluss an Korollar (1.6) kann man zeigen, dass Γ als die Gruppe mit zwei Erzeugenden J und U und den definierenden Relationen $J^4 = U^3 = E$ sowie $J^2U = UJ^2$ beschrieben werden kann. Vergleiche [3].
- Die Gruppe $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ ist wegen [1]Proposition 1.1 und [1]Satz 1.3 kanonisch isomorph zur Gruppe der Modulsubstitutionen. Sie wird erzeugt von den Modulsubstituionen $\tau \mapsto J\tau$ und $\tau \mapsto U\tau$ der Ordnung 2 und 3. Also ist $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ das freie Produkt zweier Zyklischer Gruppen (von einem Element erzeugt) der Ordnung 2 und 3.

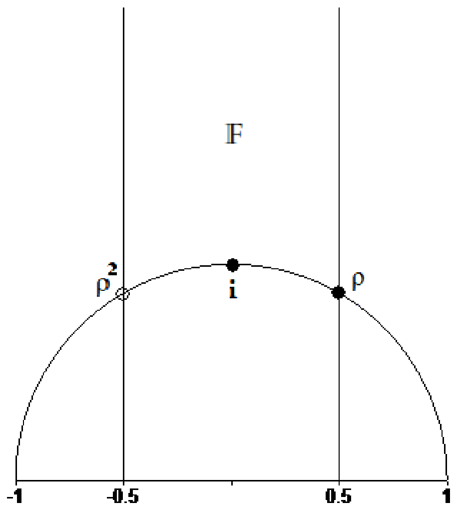
§2 Der exakte Fundamentalbereich

In diesem Abschnitt führen wir einen exakten Fundamentalbereich der Modulgruppe ein und schauen uns die Modulfigur an.

(2.1) Definition (exakter Fundamentalbereich)
Wir nennen

$$\mathbb{F} := \{\tau \in \mathbb{H};\ -1/2 < Re\tau \leq 1/2, |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -1/2 < Re\tau < 0\} \qquad (7)$$

einen *exakten Fundamentalbereich* der ModulgruppeΓ $\diamond$



Offenbar besteht der Rand von $\mathbb{F}$ aus Teilen der Geraden $\mathrm{Re}\tau = \pm\frac{1}{2}$ und aus einem Bogen des Einheitskreises. Also wird $\mathbb{F}$ von Orthogonalkreisen umrandet.

Zunächst veranschaulichen wir uns $\mathbb{F}$ an einer Skizze.

abgeschlossene Hülle: $\overline{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H};\ |\mathrm{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\}$

offener Kern: $\mathring{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H};\ |\mathrm{Re}\tau| < \frac{1}{2}, |\tau| > 1\}$

Außerdem ist zu sehen, dass die Punkte i und

$$\rho := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \tag{8}$$

zu $\mathbb{F}$ gehören, während $\rho^2 = \rho - 1 = -\overline{\rho} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Weiterhin folgt aus der Definition von $\mathbb{F}$ für $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$:

$$\begin{aligned} & 1 \leq |\tau|^2 = \mathrm{Re}\tau^2 + \mathrm{Im}\tau^2 \leq \frac{1}{4} + \mathrm{Im}\tau^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3}{4} \leq \mathrm{Im}\tau^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \mathrm{Im}\tau \end{aligned} \tag{9}$$

denn $\mathrm{Im}\tau > 0$.

(2.2) Satz
a) Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ gibt es ein $M \in \Gamma$ mit $M\tau \in \mathbb{F}$.
b) Gehören τ und $M\tau$, $M \in \Gamma$, zu $\mathbb{F}$, so gilt $\tau = M\tau$. Ist $M \neq \pm E$, so folgt entweder

$$\tau = M\tau = i \quad \text{und} \quad M = \pm J \tag{10}$$

oder

$$\tau = M\tau = \rho \quad \text{und} \quad M = \pm U, \pm U^2 \tag{11}$$

◇

Beweis (a)
Sei $\tau \in \mathbb{H}$, dann ist die Menge $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ diskret in $\mathbb{C}$, denn $\mathbb{Z}$ ist diskret in $\mathbb{C}$. Das heisst die Menge $\{z \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z};\ |z| < \epsilon\}$ ist endlich für jedes $\epsilon > 0$. Es gibt also ein Paar $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(c,d) \neq (0,0)$ und

$$|m\tau + n| \geq |c\tau + d| \quad \text{für alle} \quad (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (m,n) \neq (0,0) \tag{*}$$

Angenommen c und d haben einen gemeinsamen Teiler $g \in \mathbb{Z}\backslash\{0, \pm 1\}$, dann existieren c' und $d' \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit $c = gc'$ und $d = gd'$.
Daraus folgt $|c\tau + d| = |g| \cdot |c'\tau + d'| > |c'\tau + d'|$. Dies ist ein Widerspruch zu (*).
Also sind c und d teilerfremd. Das Ergänzungs-Lemma (1.3) liefert uns die Existenz einer Matrix $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Sei $m \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann gilt:

$$|T^m L\tau| \overset{(3)}{=} |\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau| = |\begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix} \tau| = |\frac{(a+mc)\tau + b + md}{c\tau + d}| \geq 1$$

da $|(a + mc)\tau + (b + md)| \geq |c\tau + d|$ nach (*) gilt.
Nun setzt man:

$$\tau' := T^m L\tau = \frac{mc\tau + md + a\tau + b}{c\tau + d} = m + \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = m + L\tau$$

$$\text{also ist:} \qquad \mathrm{Re}\tau' = \mathrm{Re}(m + L\tau) = m + \mathrm{Re}(\frac{a\tau + b}{c\tau + d})$$

Daran sieht man, dass $m \in \mathbb{Z}$ so gewählt werden kann, dass $-1/2 < \mathrm{Re}\tau' \leq 1/2$ erfüllt ist.
Im Fall $-1/2 < \mathrm{Re}\tau' < 0$ und $|\tau'| = 1$ ersetzt man τ' durch $J\tau' = -\frac{1}{\tau'} = -\frac{\bar{\tau'}}{\tau\bar{\tau}} \overset{|\tau|=1}{=} -\bar{\tau}'$. Also erfüllt unser neues τ': $|\tau'| = 1$ und $0 < \mathrm{Re}\tau' < 1/2$.
Somit erhalten wir, dass $\tau' \in \mathbb{F}$ ist.
Setzten wir $M := T^m L$ (bzw. $= JT^m L$), so gilt also $M \in \Gamma$ und $M\tau \in \mathbb{F}$. □

Beweis (b)
Seien $\tau = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ so gewählt, dass $\tau, M\tau \in \mathbb{F}$.
Im Fall $c = 0$ gilt $\det M = a \cdot d = 1$ $(M \in \Gamma)$. Also $a = d = \pm 1$. Somit ist $M\tau = \tau \pm b$. Da $M\tau$ und τ Elemente von $\mathbb{F}$ sind und somit $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(M\tau), \mathrm{Re}\tau \leq \frac{1}{2}$ gilt, muss $m = 0$ sein. Daraus folgt, dass $M\tau = \tau$ ist und $M = \pm E$ ist.
Sei nun $c \neq 0$.
Aus [1]1.3(1) erhält man, dass $\mathrm{Im}(M\tau) = \frac{\det M}{|c\tau+d|^2} \cdot \mathrm{Im}\tau = \frac{y}{|c\tau+d|^2}$. Da $M\tau, \tau \in \mathbb{F}$ folgt aus (9), dass $\mathrm{Im}(M\tau),\ y \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Also erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \frac{y}{|c\tau + d|^2} \tag{**}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&|c\tau + d|^2 = |c(x + iy) + d|^2 = (cx + d)^2 + (cy)^2 \geq c^2 y^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} \overset{(**)}{\leq} \frac{y}{|c\tau + d|^2} \leq \frac{y}{c^2 y^2} = \frac{1}{c^2 y} \overset{(9)}{\leq} \frac{1}{c^2 \frac{1}{2}\sqrt{3}} \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} c^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow c \pm 1
\end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, dass $-E \in \Gamma$ können wir ohne Einschränkungen $c = 1$ annehmen. Sei also im Folgenden $c = 1$. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Bestimmung von d. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|\tau + d|^2 &= |(x + iy + d)^2| = |(x + d)^2 + 2(x + d)iy - y^2| \\
&= \sqrt{((x + d)^2 - y^2)^2 + (2(x + d)y)^2} \\
&\geq \sqrt{(2(x + d)y)^2} = 2|x + d|y
\end{aligned}$$

denn $\tau \in \mathbb{F}$ und somit $y > 0$. Damit und mit (**) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \frac{y}{|c\tau + d|^2} \leq \frac{y}{2|x + d|y} = \frac{1}{2|x + d|} \\
&\Rightarrow \sqrt{3}|x + d| \leq 1 \\
&\Rightarrow d \in \{0, \pm 1\}
\end{aligned}$$

da $\tau \in \mathbb{F}$ und somit $|x| \leq 1/2$.
Nun werden die einzelnen Fälle für d untersucht:

d=0: Da $\det(M) = 1 = -bc = -b$ folgt $b = -1$ und $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Somit gilt für die Möbiustransformation: $M\tau = \frac{a\tau-1}{\tau} = a - \frac{1}{\tau}$
Wir nehmen an, dass $|\tau| > 1$ ist. So erhalten wir:

$$|\mathrm{Re}(-\frac{1}{\tau})| = |\mathrm{Re}(-\frac{\bar{\tau}}{\tau\bar{\tau}})| = \frac{|\mathrm{Re}\tau|}{|\tau|^2} < |\mathrm{Re}\tau| \leq \frac{1}{2} \quad \text{da} \quad \tau \in \mathbb{F}$$

Da $M\tau$ auch ein Element von $\mathbb{F}$ ist, gilt:

$$\frac{1}{2} \geq |\mathrm{Re}(M\tau)| = |\mathrm{Re}(a - \frac{1}{\tau})| = |a + \mathrm{Re}(-\frac{1}{\tau})|$$

Die beiden Ungleichungen sind nur für $a = 0$ erfüllt. Damit ergibt sich folgender Widerspruch:

$$1 \overset{M\tau\in\mathbb{F}}{\leq} |M\tau| = |-\frac{1}{\tau}| \overset{|\tau|>1}{<} 1$$

Sei also $|\tau| = 1$. Dann gilt:

$$M\tau = a - \frac{1}{\tau} = a - \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}\tau} \overset{|\tau|=1}{=} a - \bar{\tau} \overset{\tau=x+iy}{=} a - x + iy$$

Wir wissen, dass τ und $M\tau$ Elemente von $\mathbb{F}$ sind und somit $\mathrm{Re}\tau = x \in [0, \frac{1}{2}]$ und $\mathrm{Re}(M\tau) = a - x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt. Folglich kann a nur 0 oder 1 sein.
Für $a = 0$ hat man $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ und $J\tau = -x + iy$ mit $x \in [0, \frac{1}{2}]$ und $-x \in [0, \frac{1}{2}]$. Folglich muss $x = 0$ und $y = 1$ und somit $\tau = i$ sein.
Für $a = 1$ hat man $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TJ = -U$ und $M\tau = \frac{\tau-1}{\tau} = \frac{(\tau-1)\cdot\bar{\tau}}{\tau\bar{\tau}} \overset{|\tau|=1}{=} 1 - \bar{\tau} = 1 - x + iy$ mit $x \in [0, \frac{1}{2}]$ und $1 - x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Folglich muss $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gelten und somit $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = \rho$ (8).
In beiden Fällen gilt $M\tau = \tau$.

d=±1 Wir haben also:

$$|\tau + d|^2 = |x + iy \pm 1|^2 = (x \pm 1)^2 + y^2 \overset{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}{\geq} y^2 + \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} \overset{(9)}{\leq} \mathrm{Im}(M\tau) \overset{(**)}{\leq} \frac{y}{|\tau + d|^2} \leq \frac{y}{y^2 + \frac{1}{4}}$$

Wir definieren die Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) := \frac{y}{y^2+\frac{1}{4}}$
Die Funktion f ist streng monoton fallend für $y > \frac{1}{2}$, denn $f'(y) = \frac{-y^2+\frac{1}{4}}{(y^2+\frac{1}{4})^2} < 0$ für alle $y > \frac{1}{2}$. Außerdem ist $f(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Da uns nur Werte interessieren, die größer oder gleich $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sind, gilt die obige Ungleichung nur für $\mathrm{Im}(M\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = y$. Somit ist $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = \rho$ (8), denn es gilt $\tau \in \mathbb{F}$. Es gilt also wie gewünscht $M\tau = \tau$.
Jetzt ist noch zu zeigen, dass $M = \pm U, \pm U^2$ gilt. Wir betachten dazu erneut:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \mathrm{Im}(M\tau) = \frac{y}{|\tau+d|^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}+d|^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(\frac{1}{2}+d)^2+\frac{3}{4}}$$
$$\Leftrightarrow 1 = (\frac{1}{2}+d)^2 + \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = |\frac{1}{2}+d| \quad \Rightarrow \quad d = -1$$

Daraus erhalten wir, dass $M = \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Eine Möglichkeit für M ist $(TJ)^2 = U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (6). Aus dem Ergänzungs-Lemma (1.3) ergibt sich, dass $M = T^m(TJ)^2$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ gilt.
Es ist $TJ\rho = \rho$, denn $TJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und somit ist die Aussage äquivalent zu $\frac{\rho-1}{\rho} = \rho \;\Leftrightarrow\; \rho - 1 = \rho^2 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{4} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}$. Außerdem ist $M\rho = \rho$. Also folgt $T^m\rho = \rho$ und schließlich $m = 0$.
Also ist $M = (TJ)^2 = U^2$. □

(2.3) Beispiel
Ist n eine ganze Zahl, so bestimme man expilzit ein $M \in \Gamma$ mit $M\tau \in \mathbb{F}$ für $\tau = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}i$. Die Existenz von M folgt bereits aus Satz (2.2). Aus Satz (1.4) wissen wir, dass M sich als Produkt von J und T schreiben lässt. Im Fall $n = 1$ ist $\tau = 1 + i$. Also ist $T^{-1}\tau = i \in \mathbb{F}$. Sei also im Folgenden $n > 1$.
Berechnen wir zunächst
$J\tau = -\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{i}{n}} = \frac{-\frac{1}{n}+\frac{i}{n}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2}n + i\frac{n}{2}$ so ist für $n \geq 2$ der $\mathrm{Im}(J\tau) \geq 1$.

Berechnen wir nun $T^mJ\tau$ mit $m := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \in \mathbb{Z}$

$$T^m J\tau = J\tau + m = -\tfrac{n}{2} + m + i\tfrac{n}{2} = \begin{cases} i\frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} + i\frac{n}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit ist $\mathrm{Re}(T^m J\tau) \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Setzten wir $M := T^m J$ so ist $M \in \Gamma$ und es gilt $M\tau \in \mathbb{F}$. $\diamond$

(2.4) Lemma
Ist $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$, so gilt für alle $M \in \Gamma$: $\mathrm{Im}(M\tau) \leq \mathrm{Im}\tau$ $\diamond$

Beweis
Seien $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$ und $M \in \Gamma$. Dann hat man

$$\begin{aligned} |c\tau + d|^2 &= |c \cdot (\mathrm{Re}\tau + i\mathrm{Im}\tau) + d|^2 = (c \cdot \mathrm{Re}\tau + d)^2 + (\mathrm{Im}\tau \cdot c)^2 \\ &= (c \cdot \mathrm{Re}\tau)^2 + 2c \cdot \mathrm{Re}\tau \cdot d + d^2 + (c \cdot \mathrm{Im}\tau)^2 = c^2 \cdot |\tau|^2 + 2cd \cdot \mathrm{Re}\tau + d^2 \\ &\overset{|\tau|\geq 1, |\mathrm{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd| \overset{M \in \Gamma}{\geq} 1 \end{aligned}$$

Somit folgt mit

$$\mathrm{Im}(M\tau) = \frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau + d|^2} \overset{|c\tau+d|^2 \geq 1}{\leq} \mathrm{Im}\tau$$

die Behauptung. $\square$

(2.5) Korollar
Die Bilder $M\mathbb{F} := \{M\tau;\ \tau \in \mathbb{F}\}, M \in \Gamma$ überdecken die obere Halbebene $\mathbb{H}$ lückenlos. $\diamond$

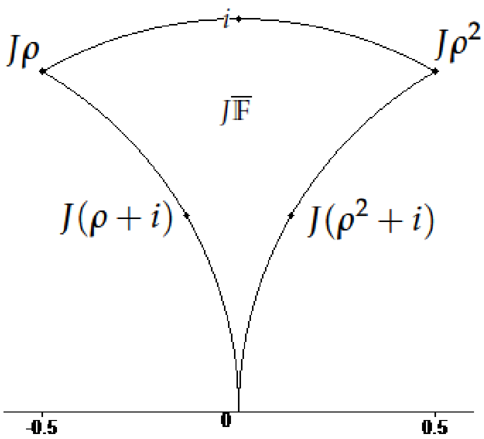
Beweis
Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Wir wollen zeigen, dass es ein $M \in \Gamma$ und ein $\tau' \in \mathbb{F}$ gibt mit $\tau = M\tau'$. Aus dem Satz (2.2) wissen wir bereits, dass ein $M' \in \Gamma$ existiert mit $M'\tau \in \mathbb{F}$. Also ist $M := M'^{-1} \in \Gamma$ und $\tau' := M'\tau \in \mathbb{F}$. Es gilt also $\tau = M'^{-1}\tau' = M\tau'$. $\square$

Aus [1]Proposition 1.3 wissen wir bereits, dass Orthogonalkreise unter den Automorphismen von $\mathbb{H}$ in Orthogonalkreise übergehen. Da der Rand von $\overline{\mathbb{F}}$ aus Teilen von Orthogonalkreisen besteht und $\Phi_M, M \in \Gamma$ ein Automorphismus der oberen Halbebene ist folgt, dass die Bilder des Randes wieder aus Teilen von Orthogonalkreisen bestehen. Schauen wir uns also ein Beispiel zur Bestimmung der Bilder von $\overline{\mathbb{F}}$ an.

(2.6) Beispiel (Bestimmung von $J\overline{\mathbb{F}}$)
Zunächst überlegen wir uns auf was der Rand von $\overline{\mathbb{F}}$ abgebildet wird. Wir benutzen dabei die Tatsache, dass Orthogonalkreise durch zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{H}$ eindeutig bestimmt sind ([1]Proposition 1.6). Also bestimmen wir die Bilder von ρ (8), ρ^2, $\rho + i$ und $\rho^2 + i$. Es ist $J\tau = -\frac{1}{\tau}$ nach (5). Also haben wir:

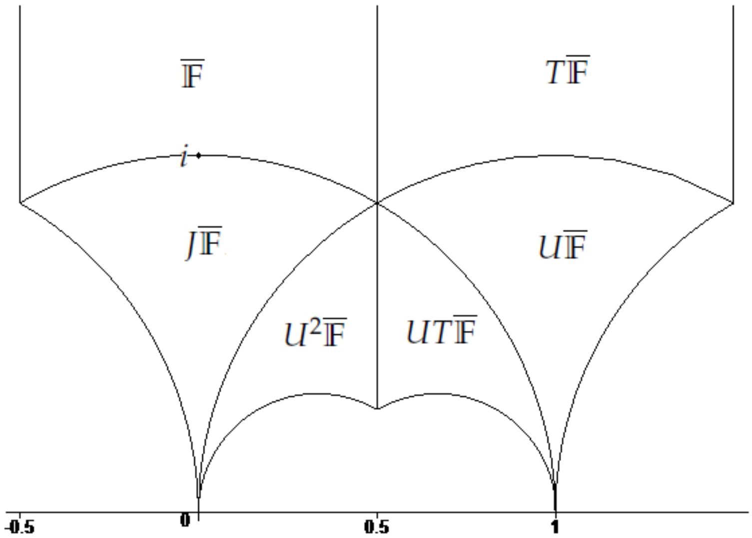
$$J\rho = -\bar{\rho} = \rho^2 , \quad J\rho^2 = \rho$$
$$J(\rho + i) = \frac{\rho^2 + i}{|\rho + i|^2} = \frac{\rho^2 + i}{2 + \sqrt{3}}$$
$$J(\rho^2 + i) = \frac{1}{\bar{\rho} - i} = \frac{\rho + i}{|\rho + i|^2} = \frac{\rho + i}{2 + \sqrt{3}}$$

◇



Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die Punkte auf dem Einheitskreis und auf dem um eins nach links bzw rechts verschobenen Einheitskreis liegen. Teile dieser Orthogonalkreise sind also die Bilder des Randes von $\overline{\mathbb{F}}$. Da $\mathbb{F}$ ein Gebiet ist folgt, dass auch das Bild unter J ein Gebiet ist ([2]Satz von der Gebietstreue III.4.12). Somit kann $J\overline{\mathbb{F}}$ nur diese Gestalt haben.

Von jeder anderen Matrix $M \in \Gamma$ kann genauso $M\overline{\mathbb{F}}$ bestimmt werden. So erhalten wir die *Modulfigur*. $\overline{\mathbb{F}}$ wird dann auch *Moduldreieck* genannt.



§3 Literaturverzeichnis

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2.Aufl., Springer 2007

[2] A. Krieg, Funktionentheorie I, 2008, Skript zur Vorlesung

[3] H. Maass, Lectures on modular functions of one complex variable, Springer 1983