Fixpunkte

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 06.05.2009

Alexander Hagen

Die Ausarbeitung beruht auf Kapitel II, Paragraph 1 Unterpunkt 5 und Paragraph 2 Unterpunkt 3-4 aus dem Buch Elliptische Funktionen und Modulformen von M. Koecher und A. Krieg. Der Schwerpunkt der Ausarbeitung liegt auf Fixpunkten.

Inhaltsverzeichnis

§1 Fixpunkte

In diesem Abschnitt wird der Fixpunkt eingeführt. Zunächst wird der Fixpunkt definiert und dann einige Zusammenhänge zwischen dem Fixpunkt und der zugehörigen Matrix erläutert. Die in Vortrag 1 und Vortrag 2 eingeführten Bezeichnungen werden weiter verwendet.

(1.1) Definition (Fixpunkt)

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$. Wir nennen $\tau \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ einen *Fixpunkt* von M, wenn $M\tau = \tau$ gilt. Für $\tau = \infty$ verwendet man $M\infty = \begin{cases} \infty & \text{falls } c = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \end{cases}$
([1]1.1).
Für $\tau \in \mathbb{C}$ ist $M\tau = \tau$ äquivalent zu $\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \tau$ also für $c\tau + d \neq 0$ äquivalent zu

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0. \tag{1}$$

Für $c\tau + d = 0$ und $c \neq 0$ hat die gebrochen-lineare Transformation einen Pol ([2]V(2.4)), also an der Stelle $\tau = -\frac{d}{c}$. Also gilt hier $M\tau = \infty$ und M hat an dieser Stelle keinen Fixpunkt. Für $c = 0$, müsste auch $d = 0$ gelten, was aber ein Widerspruch zu $M \in GL(2,\mathbb{C})$ wäre. ◇

(1.2) Bemerkung
Ist M reell und τ erfüllt Gleichung (1), so erfüllt auch $\overline{\tau}$ diese Gleichung. Also gibt es in diesem Fall für $M \neq \pm E$ höchstens ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $M\tau = \tau$. ◇

Beweis
$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0 = \overline{0} = \overline{(c\tau^2 + (d-a)\tau - b)} = c\overline{\tau}^2 + (d-a)\overline{\tau} - b$
Die Umformung gilt, da $a,\ b,\ c,\ d$ aus $\mathbb{R}$ sind. □

Einen ersten Zusammenhang beschreibt der

(1.3) Satz
Sei $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) M hat genau einen Fixpunkt $\tau \in \mathbb{H}$.

(ii) M hat keinen reellen Eigenwert.

(iii) $|\mathrm{Sp}(M)| < 2$.

In diesem Fall gilt $c \neq 0$, denn für $c = 0$ müsste $(d-a)\tau - b = 0$ gelten, und da $a, b, d \in \mathbb{R}$ gibt es kein $\tau \in \mathbb{H}$ welches Gleichung (1) erfüllen würde. Der Fixpunkt ist dann gegeben durch

$$\tau = \frac{a-d}{2c} + \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4c^2} + \frac{4bc}{4c^2}} \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $\tau = x + iy$ mit x, y aus $\mathbb{R}$. Für $c = 0$ muss ein Fixpunkt τ die Gleichung $(d-a)\tau - b = (d-a)x - b + i(d-a)y = 0$ erfüllen. Da τ aus $\mathbb{H}$ sein soll, folgt $y > 0$, also muss $d = a$ gelten. Daraus folgt $b = 0$. Da M aus SL(2;$\mathbb{R}$) wäre dann aber auch $ad = 1$, und mit $a = d$ folgt daraus $a = d = 1$. Also gibt es für $c = 0$ kein M mit Fixpunkt aus $\mathbb{H}$ und $|\mathrm{Sp}(M)| < 2$. M habe genau einen Fixpunkt in $\mathbb{H}$. Da für jedes τ auch $\overline{\tau}$ die Gleichung (1) löst gibt es nur ein τ mit positivem Imaginärteil das (1) löst. Mit der „pq-Formel" sieht man, dass dieser Punkt gegeben ist durch

$$\tau = \frac{a-d}{2c} + \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4c^2} + \frac{4bc}{4c^2}}$$

leicht umzuschreiben in

$$\tau = \frac{a-d}{2c} + \sqrt{\frac{i^2}{4c^2}(-4bc - (a-d)^2)}$$

da $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ gilt det(M) = 1, also $ad - bc = 1$ also

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{a-d}{2c} + \frac{i}{2|c|}\sqrt{(-4(ad-1) - (a^2 - 2ad + d^2)} \\ &= \frac{a-d}{2c} + \frac{i}{2|c|}\sqrt{(4 - \mathrm{Sp}(M)^2} \end{aligned}$$

also ist der Imaginärteil von τ größer als 0 genau dann, wenn $4 - \mathrm{Sp}(M)^2 > 0$ und dies gilt wenn $|\mathrm{Sp}(M)| < 2$. Damit sind (i) und (iii) äquivalent.

Die Eigenwerte von M werden berechnet durch $\det(M - \lambda E) = 0$, wobei die Eigenwerte der Matrix gerade die λ sind, die die Gleichung erfüllen.
Also gilt:

$$\det(M - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + \underbrace{ad - cb}_{=\det(M)=1} = 0$$

für alle λ, die Eigenwert der Matrix M sind.
Aus der „pq- Formel" folgt, dass die λ, die diese Gleichung erfüllen, gegeben sind durch:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \frac{4}{4}} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{4i^2}{4} - \frac{i^2(a+d)^2}{4}} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{i^2}{4}(4-(a+d)^2)} \\ &= \frac{\mathrm{Sp}(M)}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4-\mathrm{Sp}(M)^2}\end{aligned}$$

Daraus folgt: M hat genau dann keinen reellen Eigenwert wenn $4 - \mathrm{Sp}(M)^2 > 0$, und dies gilt genau dann wenn $|\mathrm{Sp}(M)| < 2$.
Damit sind (ii) und (iii) äquivalent und somit nach dem ersten Teil auch (i) äquivalent zu (ii). □

(1.4) Bezeichnung
Matrizen mit den Eigenschaften aus Satz (1.3) nennt man auch *elliptisch*. ◇

Nun betrachten wir die Matrizen M deren Fixpunkte auf der reellen Achse liegen und erhalten

(1.5) Satz
Sei M $\in$ SL(2;$\mathbb{R}$). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) M hat genau zwei verschiedene Fixpunkte $\tau \in \mathbb{R} \cup \infty$.

(ii) M hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(iii) $|\mathrm{Sp}(M)| > 2$.

Die Fixpunkte sind in diesem Fall gegeben durch

$$\tau_{1/2} = \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4c^2} + \frac{4bc}{4c^2}} \quad \text{für} \quad c \neq 0$$

und

$$\tau = \infty \quad \text{und} \quad \tau = \frac{b}{d-a} \quad \text{für} \quad c = 0$$ ◇

Beweis
1. Fall, $c \neq 0$:
M habe genau zwei verschiedene Fixpunkte in $\mathbb{R} \cup \infty$. Wie auch schon im Beweis von (1.3) erhalten wir die Form der Fixpunkte aus Gleichung (1) mit der „pq-Formel“:

$$\tau_{1/2} = \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4c^2} + \frac{4bc}{4c^2}}$$

nun schreiben wir die Gleichung ähnlich wie im Beweis von (1.3) um. Da weiterhin M $\in$ SL(2;$\mathbb{R}$), gilt wie eben $ad - bc = 1$

$$\begin{aligned}\tau_{1/2} &= \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a^2-2ad+d^2}{4c^2} + \frac{4(ad-1)}{4c^2}} \\ &= \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2|c|}\sqrt{a^2+2ad+d^2-4} \\ &= \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2|c|}\sqrt{(\mathrm{Sp}(M))^2-4}\end{aligned}$$

Da $M \in$ SL(2;$\mathbb{R}$) kann man aus dieser Umformung schließen, dass M genau dann zwei verschiedene Fixpunkte in $\mathbb{R} \cup \infty$ hat wenn $(\mathrm{Sp}(M))^2$ - 4 > 0, also genau dann wenn $|\mathrm{Sp}(M)|$ > 2. Damit sind (i) und (iii) äquivalent.

Die Eigenwerte von M berechnet man wieder durch $\det(M - \lambda E) = 0$.
Es gilt also wieder:

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + \underbrace{ad - cb}_{\det(M)=1} = 0$$

für alle λ, die Eigenwert der Matrix M sind.
Die Eigenwerte sind also wieder gegen durch:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \frac{4}{4}} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(Sp(M)^2-4)} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Sp(M)^2-4)}\end{aligned}$$

Also hat M genau dann zwei verschiedene reelle Eigenwerte wenn $\mathrm{Sp}(M)^2 - 4 > 0$, also genau dann wenn $|\mathrm{Sp}(M)| > 2$. Also sind (ii) und (iii) äquivalent. Damit ist auch (i) äquivalent zu (ii).
2. Fall, $c = 0$:
Da M aus SL(2;$\mathbb{R}$) folgt für $c = 0$ sofort, dass $ad = 1$.

M habe zwei verschiedene reelle Eigenwerte. Es gilt det($M - \lambda$E)=$(a-\lambda)(d-\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad$.
Also kann man die Eigenwerte bestimmen durch

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \frac{4}{4}} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\mathrm{Sp}(M)^2 - 4)} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{Sp}(M)^2 - 4)}\end{aligned}$$

Also hat M genau dann zwei verschiedene reelle Eigenwerte wenn $\mathrm{Sp}(M)^2 - 4 > 0$, also genau dann wenn $|\mathrm{Sp}(M)| > 2$. Damit ist $a \neq d$ und (ii) und (iii) sind äquivalent.
$M\tau = \frac{a\tau+b}{d}$. Für $\tau = \infty$ ist auch $\frac{a\tau+b}{d} = \infty$. Damit ist $\tau = \infty$ ein Fixpunkt. Dann hat man noch die Gleichung

$$(d-a)\tau - b = 0$$

Für $a = d$ wäre $b = 0$, und da weiterhin $ad = 1$ gilt, wäre $M = \pm E$, dies ist aber ein Widerspruch, da $|\mathrm{Sp}(M)| > 2$ gelten soll.
Also gilt $a \neq d$ und damit ist

$$\tau = \frac{b}{d-a}$$

der zweite Fixpunkt. Nun gilt $ad = 1$ und $a \neq d$, also ist $a \neq \pm 1$ und $d \neq \pm 1$. Es gilt also $d = \frac{1}{a}$, dann gilt $|\mathrm{Sp}(M)| = |a+d| = |a + \frac{1}{a}| = |\frac{a^2+1}{a}|$, also gilt

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Sp}(M)| > 2 \\ \iff &|\frac{a^2+1}{a}| > 2 \\ \iff &\underbrace{|a^2+1|}_{>0} > 2|a| \\ \iff &|a|^2 - 2|a| + 1 > 0 \\ \iff &\underbrace{(|a|-1)^2}_{\geq 0} > 0 \\ \iff &|a| \neq 1\end{aligned}$$

Damit hat M also genau dann zwei Fixpunkte in $\mathbb{R} \cup \infty$, wenn $a \neq d$. Also genau dann wenn $|\mathrm{Sp}(M)| > 2$. Damit sind (i) und (iii) äquivalent, und damit auch (i) äquivalent zu (ii). □

(1.6) Bezeichnung
Matrizen mit den Eigenschaften aus Satz (1.5) heißen *hyperbolisch*. ◇

(1.7) Satz
Sei $M \in SL(2;\mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) M hat genau einen reellen Fixpunkt $\tau \in \mathbb{R} \cup \infty$.

(ii) M besitzt 1 oder -1 als doppelten Eigenwert.

(iii) $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$ und M $\neq \{\pm E\}$.

Der Fixpunkt ist dann gegeben durch

$$\tau = \frac{a-d}{2c} \quad \text{für } c \neq 0$$

und

$$\tau = \infty \quad \text{für } c = 0$$ ◇

Beweis
M habe genau einen Fixpunkt $\tau \in \mathbb{R} \cup \infty$. Aus Gleichung (1) folgt mit „pq-Formel", dass dieser Fixpunkt gegeben ist durch

$$\tau = \frac{a-d}{2c} + \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4c^2} + \frac{4bc}{4c^2}}, \quad \text{für } c \neq 0$$

also

$$\begin{aligned}\tau_{1/2} &= \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a^2-2ad+d^2}{4c^2} + \frac{4(ad-1)}{4c^2}} \\ &= \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2|c|}\sqrt{a^2+2ad+d^2-4} \\ &= \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2|c|}\sqrt{(\mathrm{Sp}(M))^2-4}\end{aligned}$$

also hat M genau dann genau einen Fixpunkt $\tau \in \mathbb{R} \cup \infty$ wenn $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$ und zwar $\tau = \frac{a-d}{2c}$.
Gilt $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$ mit $M \neq \pm E$ und $c = 0$, so gilt $a = d = \pm 1$, da $ad = 1$ und $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$ gelten soll. Also muss $b \neq 0$, da sonst $M = \pm E$ gelten würde. Somit gilt $M\tau = \tau \pm b = \tau$ nur für $\tau = \infty$. Da $a = d = \pm 1$ kann man aus der Gleichung $(d-a)\tau - b = 0$ keinen weiteren Fixpunkt berechnen. Damit ist (i) äquivalent zu (iii).

Nun werden wieder die Eigenwerte bestimmt

$$\det(M - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + \underbrace{ad - cb}_{=\det(M)=1} = 0$$

für alle λ, die Eigenwert der Matrix M sind.
Damit sind die Eigenwerte gegeben durch:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \frac{4}{4}} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\mathrm{Sp}(M)^2 - 4)} \\ &= \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{Sp}(M)^2 - 4)} \end{aligned}$$

Daraus folgt: M hat genau dann einen doppelten Eigenwert wenn $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$. Also ist der einzige Eigenwert:

$$\lambda = \frac{\mathrm{Sp}(M)}{2}.$$

□

Da $|\mathrm{Sp}(M)| = 2$ folgt sofort, dass der doppelte Eigenwert der Matrix entweder -1 oder 1 ist. Also sind (ii) und (iii) äquivalent, und damit dann auch (i) äquivalent zu (ii).

(1.8) Bezeichnung
Matrizen mit den Eigenschaften aus Satz (1.7) nennt man *parabolisch*. ◇

(1.9) Bemerkung
Man kann SL(2;$\mathbb{R}$) in disjunkte Teilmengen zerlegen, und zwar gerade in $\{\pm E\}$ sowie die Mengen der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Matrizen. ◇

§2 Fixpunkte und Nachbarn

In diesem Abschnitt führen wir eine Untergruppe von Γ, die sogenannte Fixgruppe ein. Ausserdem werden Aussagen über Fixpunkte und ihre zugehörigen Matrizen getroffen.

(2.1) Definition
Für $\tau \in \mathbb{H}$ definieren wir die Fixgruppe von τ

$$\Gamma_\tau := \{M \in \Gamma; M\tau = \tau\} \tag{2}$$

◇

(2.2) Bemerkung
Γ_τ ist eine Untergruppe von Γ. ◇

Beweis
Seien N und L aus Γ.
E ist aus Γ da $E\tau$=$\frac{\tau}{1}$=τ.
Für N aus Γ gilt $N\tau = \tau$.
Mit den Rechenregeln aus ([1]1.1(3) - 1.1(5)) gilt:
$\tau = E\tau = (N^{-1}N)\tau = N^{-1}(N\tau) = N^{-1}\tau$.
Also ist für N in Γ auch N^{-1} in Γ.
Sei $K = NL$, dann gilt:
$K\tau = (NL)\tau = N(L\tau) = N\tau = \tau$
Also ist auch die Verknüpfung von zwei Matrizen aus Γ wieder in Γ □

Untersucht man die Fixgruppen von Γ etwas genauer so sieht man aus Satz (2.2) aus Vortrag 2:
Für $M\tau = \tau \in \mathbb{F}$ mit $M \neq \pm E$ gilt entweder, dass $\tau = M\tau = i$ mit $M = \pm J$ oder dass $\tau = M\tau = \rho$ mit $M = \pm U, \pm U^2$.
Also gilt:

$$\Gamma_i = \{\pm E, \pm J\}, \Gamma\rho = \left\{\pm E, \pm U, \pm U^2\right\}, \Gamma_\tau = \{\pm E\},\ \tau \in \mathbb{F},\ \tau \neq i, \rho \tag{3}$$

(2.3) Definition
$\tau \in \mathbb{H}$ heißt Fixpunkt von Γ, wenn $\Gamma_\tau \neq \{\pm E\}$. ◇

Da dies aber laut Satz 2 nur für i und ρ erfüllt ist, sind i und ρ gerade die Fixpunkte von Γ in $\mathbb{F}$.
Ist τ ein beliebiger Fixpunkt, so gibt es nach (2.2)b) aus Vortrag 2 ein $M \in \Gamma$ mit $M\tau \in \mathbb{F}$.

(2.4) Bemerkung
Die Fixgruppen $\Gamma_{M\tau} = M\Gamma_\tau M^{-1}$ und Γ_τ sind in Γ konjugiert. ◇

Beweis
Mit den Rechenregeln aus Vortrag 1 folgt:
„ $\supseteq$ “
Sei $N \in \Gamma_\tau$, z.z. $MNM^{-1} \in \Gamma_{M\tau}$
$MNM^{-1}(M\tau) = M(N\tau) = M\tau$, da $N\tau = \tau$

„ $\subseteq$ “
Sei $N \in \Gamma_{M\tau}$, z.z. $M^{-1}NM \in \Gamma_\tau$
$M^{-1}N(M\tau) = M^{-1}(M\tau) = \tau$, da $N(M\tau) = M\tau$ □

Somit ist für einen beliebigen Fixpunkt τ auch $M\tau$ ein Fixpunkt.

Mithilfe von Satz (2.2) aus Vortrag 2 erhalten wir das

(2.5) Korollar
Die Fixpunkte von Γ sind genau die Punkte Mi und $M\rho$ mit $M \in \Gamma$. ◇

Beweis
Es gilt $\Gamma_{M\tau} = M\Gamma_\tau M^-1$ und für $\tau \in \mathbb{H}$ existiert $M \in \Gamma$ mit τ'=$M\tau \in \mathbb{F}$
Also gilt:
$\Gamma_\tau = M^{-1}\Gamma_{\tau'}M$
Sei nun $N \in \Gamma_{\tau'}$, also $N \in \Gamma$ mit $N\tau' = \tau'$ und $N \neq \pm E$. Dann folgt aus Satz (2.2)b) aus Vortrag 2, dass $\tau' \in \{i, \rho\}$ mit $\Gamma_i = \{\pm E, \pm J\}$ und $\Gamma_\rho = \left\{\pm E, \pm U, \pm U^2\right\}$.
Somit gilt $M\tau = i$ oder $M\tau = \rho$. Also $\tau = M^{-1}i$ oder $\tau = M^{-1}\rho$. Daraus folgt, dass die Fixpunkte von Γ genau die Punkte Mi und $M\rho$ mit $M \in \Gamma$ sind. □

(2.6) Definition
Für $\epsilon > 0$ nennen wir
$$\mathcal{V}_\epsilon := \left\{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ y \geq \epsilon, |x| \leq \frac{1}{\epsilon}\right\} \tag{4}$$
einen Vertikalstreifen der Höhe ϵ in $\mathbb{H}$. ◇

(2.7) Bemerkung
Es gilt $\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}} \subset \mathcal{V}_\epsilon$ für alle $\epsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ◇

Beweis
$\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}}$ ist klar.
$\overline{\mathbb{F}} \subset \mathcal{V}_\epsilon$ gilt, da nach Definition 2.2(1) ([1] S.126) $|\text{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}$ und nach Definiton 2.2(3) ([1] S.126) gilt $\text{Im}(\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, für alle $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$. Da $\epsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ gewählt wurde, gilt $|\text{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\epsilon}$ und $\text{Im}(\tau) \geq \epsilon$. Somit folgt die Behauptung. □

Kommen wir nun zu einer ersten Eigenschaft des Vertikalstreifens in folgendem

(2.8) Satz
Ist $\epsilon > 0$, so gibt es nur endlich viele $M \in \Gamma$ mit der Eigenschaft

$$M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$$

Beweis
Es seien $M \in \Gamma$ und $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ mit $M\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$. $\tau = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$
Aus $M\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ folgt $\epsilon \leq \text{Im}(M\tau)$. Zusammen mit dem Hilfssatz(3.1) aus Vortrag 1 folgt:

$$\frac{1}{\epsilon} \geq \frac{1}{\text{Im}(M\tau)} = \frac{|c\tau + d|^2}{y} = \underbrace{\frac{(cx+d)^2}{y}}_{\geq 0} + c^2 y \geq c^2 y \geq c^2 \epsilon. \tag{5}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ und somit $\epsilon \leq$ y. Ausserdem folgt aus der Ungleichung $|c| \leq \frac{1}{\epsilon}$.
Also gibt es nur endlich viele c für die $M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$ gelten kann.
Für c = 0 ist M = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, d \in \mathbb{Z}$ und da det(M)=1 gilt, folgt sofort $a = d = \pm 1$.
Also $M\tau$= $\frac{\tau+b}{1}$ mit $b \in \mathbb{Z}$. Es gilt $|\text{Re}\tau| \leq \frac{1}{\epsilon}$ für alle $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$. Wähle $|b| > \frac{2}{\epsilon}$ und es gilt: $|\text{Re}(M\tau)| = |\text{Re}(\tau + b)| \geq |b| - |\text{Re}(\tau)| > \frac{1}{\epsilon}$.
Also ist $|\text{Re}(M\tau)| > \frac{1}{\epsilon}$ für unendlich viele b und damit gibt es für $c = 0$ nur endlich viele M die

$$M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$$

erfüllen.
Für $0 \neq c \in \mathbb{Z}$ gilt $c^2 \geq 1$ und somit erhalten wir aus Gleichung (5):

$$\frac{1}{\epsilon} \geq c^2 y \geq y$$

Also gilt weiter

$$\frac{1}{\epsilon} \geq \frac{|c\tau + d|^2}{y} = \frac{(cx+d)^2}{y} + \underbrace{c^2 y}_{\geq 0} \geq \frac{(cx+d)^2}{y} \geq \epsilon(cx+d)^2$$

Draus erhält man
$$\frac{1}{\epsilon^2} \geq (cx+d)^2 = |cx+d|^2$$
Dies formt man weiter um zu
$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon} &\geq |d+cx| \\ &\geq |d| - |cx|\end{aligned}$$
und erhält schließlich
$$|d| \leq |cx| + \frac{1}{\epsilon}$$
Da nach den Voraussetzungen $|x|$ = $|Re(\tau)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ gilt und im ersten Teil des Beweises $|c| \leq \frac{1}{\epsilon}$ gezeigt wurde, gilt:
$$|d| \leq \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}$$
Also gibt es für d nur endlich viele Möglichkeiten. Laut dem Ergänzungslemma aus Vortrag 2 unterscheiden sich zwei verschiedene Matrizen, mit derselben zweiten Zeile nur um einen linksseitigen Faktor T^m mit $m \in \mathbb{Z}$. Also können die Matrizen mit derselben zweiten Zeile (c, d) in der Form $T^m M$ dargestellt werden, wobei $M \in \Gamma$ eine fest gewählte Matrix ist, die als zweite Zeile genau (c, d) hat und $M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$ erfüllt.
Sei also $T^m M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$. Also existiert $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ mit $T^m M\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$.
Insbesondere gilt $|\mathrm{Re}(T^m M\tau)| \leq \frac{1}{\epsilon}$.
Sei $\tau = x + iy$. Für $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ gilt:
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(M\tau) &= \mathrm{Re}\left(\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy+d)}\right) \\ &= \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2}\end{aligned}$$
Für $c = 0$ ist $(cx+d)^2 + c^2y^2 = d^2 > 0$, also ist $|\mathrm{Re}(M\tau)| = |\frac{ax}{d} + \frac{b}{d}|$. Dieser Ausdruck ist für |x| beschränkt ebenfalls beschränkt.
Für $c \neq 0$ ist $(cx+d)^2 + c^2 + y^2 \geq c^2y^2 \geq \epsilon^2c^2 \geq \epsilon^2$, also ist
$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}(M\tau)| &= |\frac{(ax+b)(cx+d)}{(cx+d^2)+c^2y^2} + \frac{acy^2}{(cx+d^2)+c^2y^2}| \\ &\leq |\frac{(ax+b)(cx+d)}{(cx+d^2)+c^2y^2}| + |\frac{acy^2}{(cx+d^2)+c^2y^2}| \\ &\leq |\frac{1}{\epsilon^2}(ax+b)(cx+d)| + |\frac{a}{c}|.\end{aligned}$$
□

Dies ist ein Polynom 2. Grades in x, und somit beschränkt falls |x| beschränkt.
Es gilt also $|\mathrm{Re}(M\tau)| \leq \delta$ für ein δ. Ohne Einschränkung sei $\delta \geq \frac{1}{\epsilon}$.
Sei $\tau' = M\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$ mit $\tau\ in \mathcal{V}_\epsilon$, dann ist $|\mathrm{Re}(T^m\tau')| = |\mathrm{Re}(\frac{\tau'+m}{1})|$. Wähle nun $|m| > 2\delta$ dann ist $|\mathrm{Re}(T^m\tau')| \geq |m| - |\mathrm{Re}(\tau')| > 2\delta - \delta \geq \frac{1}{\epsilon}$. Also ist $T^m M\tau \notin \mathcal{V}_\epsilon$ für alle $\tau \in \mathcal{V}_\epsilon$. Damit gibt es also nur endlich viele M die $M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$ erfüllen.

(2.9) Bezeichnung
Eine Menge $M\mathbb{F}$ mit $M \in \Gamma$ und $M\mathbb{F} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$ heißt *Nachbar* von $\mathbb{F}$. ◇

Dann folgt aus Satz (2.8) das

(2.10) Korollar
$\mathbb{F}$ hat nur endlich viele Nachbarn. ◇

Beweis
Laut Satz (2.8) gibt es für $\epsilon > 0$ nur endlich viele $M \in \Gamma$, die $M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$ erfüllen.
Da $\mathbb{F} \subset \mathcal{V}_\epsilon$ für alle $\epsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ gibt es auch nur endlich viele $M \in \Gamma$ mit $M\mathbb{F} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$.
Daraus folgt, dass $\mathbb{F}$ nur enlich viele Nachbarn hat. □

(2.11) Bemerkung
Die Nachbarn von $\mathbb{F}$ sind gerade $\mathbb{F}$, $J\mathbb{F}$, $U\mathbb{F}$ und $U^2\mathbb{F}$. ◇

Beweis
Es soll $M\mathbb{F} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$ gelten.
Also existiert $\tau \in \mathbb{F}$ mit $\tau \in M\mathbb{F}$. Wenn $\tau \in M\mathbb{F}$ gilt, dann ist $M^{-1}\tau \in \mathbb{F}$.
Aus Satz (2.2) aus Vortrag 2 folgt nun, dass $M^{-1} \in \{\pm E, \pm, J, \pm U, \pm U^2\} =: P$. Nach Satz (2.2) gilt also, dass $M\mathbb{F} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$ für alle $M \in P$. Also sind die Nachbarn von $\mathbb{F}$ gerade $M\mathbb{F}$ mit $M \in P$. □

Kommen wir nun zu einem weiteren

(2.12) Korollar
Ist $K \subset \mathbb{H}$ kompakt, so gilt $M\overline{\mathbb{F}} \cap K \neq \emptyset$ für nur endlich viele $M \in \Gamma$ ◇

Beweis
Sei $\epsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, dann ist $\overline{\mathbb{F}} \subset \mathcal{V}_\epsilon$. Sei $K \subseteq \left\{\tau \in \mathbb{H};\ \frac{1}{\alpha} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{\beta}\ ,\ \mathrm{Im}(\tau) \geq \gamma\right\}$
$(\alpha, \beta, \gamma$ existieren, da $K \subseteq \mathbb{H}$ kompakt, wähle γ zum Beispiel also $\gamma = \mathrm{dist}(K, \mathbb{H}))$.
Dann wähle ϵ so, dass $\epsilon < \min\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$. Damit ist $K \subset \mathcal{V}_\epsilon$. Also gilt nun
$\left(M\overline{\mathbb{F}} \cap K\right) \subset (M\mathcal{V}_\epsilon \cap \mathcal{V}_\epsilon) \neq \emptyset$ für nur endlich viele M. □

§3 Der Quotientenraum

(3.1) Definition
Der Quotientenraum $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ wird definiert durch

$$\Gamma\backslash\mathbb{H} := \{\Gamma\tau; \tau \in \mathbb{H}\}$$

und enthält alle Bahnen

$$\Gamma\tau := \{M\tau; M \in \Gamma\}$$

für $\tau \in \mathbb{H}$ unter Γ. ◇

Wir betrachten nun die kanonische Surjektion

$$\pi : \mathbb{H} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}, \tau \longmapsto \pi(\tau) := \Gamma\tau \tag{6}$$

Die Bedeutung von Satz (2.2) aus Vortrag 2 liegt in dem

(3.2) Satz
Die Einschränkung von π auf $\mathbb{F}$, π: $\mathbb{F} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}$ ist bijektiv. ◇

Beweis
Für $\tau \in \mathbb{H}$ existiert nach Satz (2.2) aus Vortrag 2 ein $M \in \Gamma$ mit $\tau' = M\tau \in \mathbb{F}$.
Somit existiert in jedem $\Gamma\tau$ ein τ' = M$\tau \in \mathbb{F}$.
Es gilt also $\Gamma\tau' = \{N\tau',\ N \in \Gamma\} = \{N(M\tau),\ N \in \Gamma\} = \Gamma M\tau$.
Da Γ eine Gruppe ist, folgt $\Gamma M = \Gamma$.
Also findet man für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ein $\tau' \in \mathbb{F}$ mit $\Gamma\tau = \Gamma\tau'$.
Da die Abbildung π: $\mathbb{H} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}$ surjektiv war ist sie es jetzt auch noch, da man gezeigt hat, dass durch die Abbildung π: $\mathbb{F} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}$ alle Elemente der Zielmenge getroffen werden, die auch von π getroffen wurden.
Seien $\tau, \tau' \in \mathbb{F}$ mit $\pi(\tau) = \pi(\tau')$. Es gilt also $\Gamma\tau = \Gamma\tau'$. $E\tau' = \tau' \in \Gamma\tau'$. Da $\Gamma\tau = \Gamma\tau'$ folgt nun also auch $\tau' \in \Gamma\tau$. Daraus folgt es existiert $M \in \Gamma$, sodass $\tau' = M\tau$. Nach den Voraussetzungen sind nun τ, $M\tau = \tau' \in \mathbb{F}$. Also folgt mit Satz (2.2) aus Vortrag 2, dass $\tau = M\tau = \tau'$.
Damit ist π auch injektiv und die Behauptung ist gezeigt. □

§4 Aufgaben

(4.1) Satz
$\mathbb{F}$ ist ein Stern mit Mittelpunkt λi für alle $\lambda \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\diamond$

Beweis
Wir betrachten die Strecke zwischen einem beliebigem Punkt $\tau \in \mathbb{F}$ und dem Mittelpunkt λi.
$\tau = x + iy$

1. Fall: -$\frac{1}{2}$ < Re(τ) < 0 mit $|\tau|$ > 1
Die Strecke hat die Form:

$$\begin{aligned} &x + iy + t(\lambda i - x - iy) \\ &= x(1-t) + i((1-t)y + t\lambda) \end{aligned}$$

Man betrachtet nun den Realteil $x(1-t)$

$$-\frac{1}{2} < \underbrace{x}_{\in\left(-\frac{1}{2},0\right)} \underbrace{(1-t)}_{\in[0,1]} \leq 0$$

Also gilt -$\frac{1}{2}$ < Re(τ') $\leq \frac{1}{2}$ für alle τ' auf der Strecke zwischen τ und λi.
Nun betrachtet man den Betrag zunächst für $t \neq 1$:

$$|\tau + t(\lambda i - \tau)| = \underbrace{x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2}_{>(1-t)^2} + \underbrace{2(1-t)ty\lambda}_{\geq 2(1-t)t} + \underbrace{t^2\lambda^2}_{\geq t^2\frac{4}{3}}$$

Die Abschätzungen gelten, da $|\tau|$ > 1, y $\in \mathbb{F}$ und somit y $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\lambda \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Also folgt weiter:

$$\begin{aligned} |\tau + t(\lambda i - \tau)| &> (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2\frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}t^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Für $t = 1$ erhält man gerade den Punkt λi der natürlich in $\mathbb{F}$ liegt. Also ist $|\tau + t(\lambda i - \tau)| > 1$ für $-\frac{1}{2}$ < Re(τ) < 0. Somit gilt nach Definition von $\mathbb{F}$ stets $\tau' \in \mathbb{F}$ für jeden Punkt τ' auf der Verbindungsstrecke zwischen τ und λi.

2. Fall: $0 \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}$ mit $|\tau| \geq 1$
Die Strecke hat die Form:

$$\begin{aligned} &x + iy + t(\lambda i - x - iy) \\ &= x(1-t) + i((1-t)y + t\lambda) \end{aligned}$$

Man betrachtet nun den Realteil $x(1-t)$

$$0 \leq \underbrace{x}_{\in[0,\frac{1}{2}]} \underbrace{(1-t)}_{\in[0,1]} \leq \frac{1}{2}$$

Also gilt wieder $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\tau') \leq \frac{1}{2}$ für alle τ' auf der Verbindungsstrecke zwischen τ und λi.
Nun betrachtet man den Betrag:

$$|\tau + t(\lambda i - \tau)| = \underbrace{x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2}_{\geq (1-t)^2} + \underbrace{2(1-t)ty\lambda}_{\geq 2(1-t)t} + \underbrace{t^2\lambda^2}_{\geq t^2\frac{4}{3}}$$

Die Abschätzungen gelten, da $|\tau| \geq 1$, y $\in \mathbb{F}$ und somit y $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\lambda \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} |\tau + t(\lambda i - \tau)| &\geq (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2\frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}t^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Also ist $|\tau + t(\lambda i - \tau)| \geq 1$ für $0 \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}$. Nach Definition von $\mathbb{F}$ gilt also wieder $\tau' \in \mathbb{F}$ für alle τ' auf der Verbindungsstrecke von τ und λi.
Damit wurde gezeigt dass $\mathbb{F}$ ein Stern mit Mittelpunkt λi für alle $\lambda \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ist, da die Verbindungsstrecke zwischen λi und einem beliebigen $\tau \in \mathbb{F}$ wieder komplett in $\mathbb{F}$ liegt. □

Beschreiben wir nun noch das Bild von $\mathbb{F}$ unter der Cayley-Abbildung.

$\mathbb{F}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Cayley-Abbildung ist biholomorph, somit ist das Bild von $\mathbb{F}$ wieder einfach zusammenhängend ([2]IV(3.5)).
Die Cayley-Abbildung, ist eine gebrochen-lineare Transformation. Laut Vortrag 1 Satz (1.8) geht die Menge der Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ unter gebrochen-linaren Transformationen in sich selbst über. Da der Rand von $\mathbb{F}$ nach Vortrag 2 nur aus Geraden und Kreisen besteht, kann man das Bild des Randes leicht berechnen. Zunächst nimmt man drei Punkte vom Rand des Einheitskreises, die auch zu $\overline{\mathbb{F}}$ gehören.

Als erstes bildet man i ab und stellt fest, dass $\Phi_C(i) = 0$ gilt. Nun bildet man noch ρ und ρ^2 ab.

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Phi_C(\rho) &= \frac{\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)}{\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)} \\
&= \frac{(\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1))(\frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1))}{\frac{1}{4} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) - \frac{1}{2}i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) + \frac{3}{4} - 1}{2 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{-i}{2 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Nun bestimmt man $\Phi_C(\rho^2)$

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Phi_C(\rho) &= -\frac{\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)}{-\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)} \\
&= \frac{(-\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1))(-\frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1))}{\frac{1}{4} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) + \frac{1}{2}i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) + \frac{3}{4} - 1}{2 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{i}{2 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen, d.h. das Stück des Einheitskreises, welches $\mathbb{F}$ beschränkt, wird auf eine Strecke zwischen $\frac{i}{2+\sqrt{3}}$ und $\frac{-i}{2+\sqrt{3}}$ abgebildet.
Nach Vortrag 1 erhält man aus

$$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \;\; A, C \in \mathbb{R},\; A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C}\;,\; |B|^2 > AC$$

alle Kreise in $\mathbb{C}$, und mit $A = 0$, $B \neq 0$ alle Geraden in $\mathbb{C}$. Nun bildet man die Gerade deren Realteil immer $\frac{1}{2}$ ist ab. Nach dem ersten Vortrag sind alle Senkrechten gerade

in der Form $x = \frac{-C}{2B}$ gegeben, wobei y beliebig ist und $B \in \mathbb{R}$.
Wähle nun $C = -1$, daraus folgt $B = 1$ und da wir eine Gerade betrachten gilt auch $A = 0$.
Zur Untersuchung der Bilder von Kreisen und Geraden unter gebrochen-linearen Transformationen hat man $z = M\tau$ mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und nach Vortrag 1 erhält man eine Gleichung der Form

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 \quad \text{mit } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } \beta \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha &= Ad\overline{d} - B\overline{c}d - \overline{B}c\overline{d} + Cc\overline{c} \\
\beta &= -A\overline{b}d + B\overline{a}d + \overline{B}\overline{b}c - C\overline{a}c \\
\overline{\beta} &= -Ab\overline{d} + Bb\overline{c} + \overline{B}a\overline{d} - Ca\overline{c} \\
\gamma &= Ab\overline{b} - B\overline{a}b - \overline{B}a\overline{b} + Ca\overline{a}
\end{aligned}$$

Also gilt für $A = 0$, $B = 1$ und $C = -1$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0 - i + i - 1 = -1 \\
\beta &= 0 + i + i + 1 = 1 + 2i \\
\overline{\beta} &= 0 - i - i + 1 = 1 - 2i \\
\gamma &= 0 + i - i - 1 = -1
\end{aligned}$$

Also wird die Gerade mit Realteil $\frac{1}{2}$ abgebildet auf den Kreis mit

$$m = -\frac{\overline{\beta}}{\alpha} = 1 - 2i \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{|\beta|^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} = 4$$

wobei m der Mittelpunkt und r der Radius ist.
Nun betrachten wir die Gerade die immer Realteil $-\frac{1}{2}$ hat. Die Gerade ist wieder in der Form $x = \frac{-C}{2B}$ gegeben. Wähle $C = 1$, damit $B = 1$ und da wir wieder eine Gerade betrachten ist $A = 0$. Nun berechnen wir wieder unser α, β und γ, die diesmal gegeben sind durch:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0 - i + i + 1 = 1 \\
\beta &= 0 + i + i - 1 = -1 + 2i \\
\overline{\beta} &= 0 - i - i - 1 = -1 - 2i \\
\gamma &= 0 + i - i + 1 = 1
\end{aligned}$$

Also wird die Gerade mit Realteil $-\frac{1}{2}$ abgebildet auf den Kreis mit

$$m = -\frac{\overline{\beta}}{\alpha} = 1 + 2i \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{|\beta|^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} = 4.$$

Nun bilden wir noch jeweils einen Punkt jeder Gerade einzelt ab, um zu erkennen auf welches Kreisstück die Geraden gehen. Wir wählen den Punkt $a := \frac{1}{2} + i$ der auf der Geraden mit Realteil $\frac{1}{2}$ liegt.

$$\begin{aligned} \Phi_C(a) &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2i} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - i}{\frac{17}{4}} \\ &= \frac{1}{17} - i\frac{4}{17} \end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass die Gerade mit Realteil $\frac{1}{2}$ auf das Sück des Kreises mit Realteil größer als Null abgebildet wird.
Nun wählen wir noch $b := -\frac{1}{2} + i$ der auf der Geraden mit Realteil $-\frac{1}{2}$ liegt.

$$\begin{aligned} \Phi_C(a) &= \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 2i} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + i}{\frac{17}{4}} \\ &= \frac{1}{17} + i\frac{4}{17} \end{aligned}$$

Also wird auch die Gerade mit Realteil $-\frac{1}{2}$ auf das Stück des Kreises mit Realteil größer als Null abgebildet.

Das Randverhalten der Abbildung kann man von $\mathbb{F}$ übenehmen.
Also ist $\Phi_C(\mathbb{F}) =$
$\left\{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < \mathrm{Re}(\tau) < 1, \mathrm{Im}(\tau) > 0\ |\mathrm{Im}(\tau)| < 2 - \sqrt{3}\ ,\ |\tau - (1 + 2i)| > 2\right\} \cup$
$\left\{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ 0 \leq \mathrm{Re}(\tau) < 1, \mathrm{Im}(\tau) \leq 0\ |\mathrm{Im}(\tau)| \leq 2 - \sqrt{3}\ ,\ |\tau - (1 - 2i)| \geq 2\right\}$

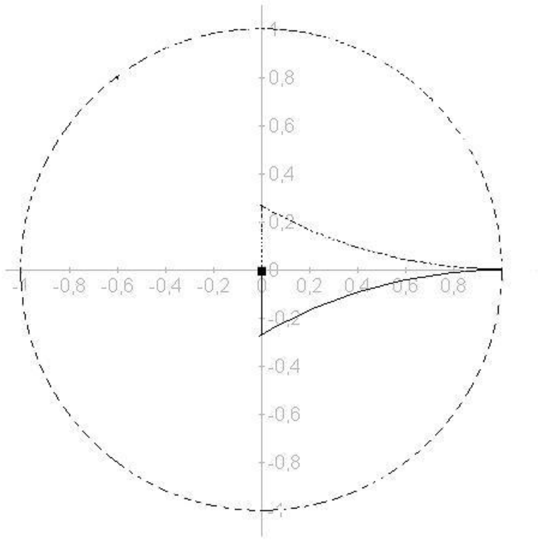

Abbildung 1: $C\mathbb{F}$

§ 5 Literaturverzeichnis

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl., Springer 2007
[2] A. Krieg Funktionentheorie I, 2008, Skript zur Vorlesung