Modulformen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 24.06.2009

Dominik Hohmann

Der Vortrag gibt eine Einführung in die Grundlagen der Theorie der *Modulformen*. Modulformen sind meromorphe Funktionen der Gestalt $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit der besonderen Eigenschaft, dass ein Zusammenhang zur *Modulgruppe* Γ besteht.

Insgesamt werden wir fünf Funktionsklassen kennen lernen, von denen jede einzelne die obige Eigenschaft besitzt. Sie seien hier schon einmal genannt:

- modulare Funktionen (Seite 4)
- Modulformen (Seite 17)
- Modulfunktionen (Seite 18)
- ganze Modulformen (Seite 19)
- Spitzenformen (Seite 19)

Es werden die Bezeichnungen aus den vorherigen Vorträgen übernommen. Insbesondere bezeichne τ ein Element der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ mit Realteil x und Imaginärteil y. Der Buchstabe M stehe, wie gewohnt, für die 2×2 Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Inhaltsverzeichnis

§1 Modulare Funktionen

In diesem Kapitel lernen wir die modularen Funktionen kennen. Sie dienen als Prototyp der Modulformen, sodass wir die wesentliche Eigenschaft

$$f|_k M = f \quad \text{für alle } M \in \Gamma$$

schon einmal studieren können.

— *Der Strichoperator* —

Auf dem Raum der auf $\mathbb{H}$ meromorphen Funktionen führen wir einen Operator ein:

(1.1) Definition (Strichoperator)
Sei f eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion, deren Polstellenmenge D_f bekanntlich diskret in $\mathbb{H}$ ist. Der sogenannte *Strichoperator* definiert für ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ eine neue Funktion $f|_k M$ mit

$$(f|_k M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_{f\circ M}.$$

Abkürzend schreibt man auch bloß $f|M$ anstelle von $f|_k M$. ◇

Man beachte, dass in obiger Definition der Ausdruck $(c\tau + d)$ nie den Wert 0 annimmt, da c und d reell sind und der Fall $c = d = 0$ im Widerspruch zu $\det(M) = 1$ steht. Auch der Ausdruck $f(M\tau)$ ist wohldefiniert, denn die Automorphismen der oberen Halbebene (siehe [2], Satz VII(2.10)) sind genau die Abbildungen der Form $\tau \mapsto M\tau$ mit $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$.

Wir notieren eine wichtige Rechenregel dieses Operators:

(1.2) Lemma
Für alle $M, N \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ gilt:

$$(f|M)|N = f|(MN)$$ ◇

Beweis
Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen in die Definition und unter Verwendung von $M(N\tau) = (MN)\tau$.

Mit $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ sowie $N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$ erhält man demnach:

$$\begin{aligned}
\Big((f|M)|N\Big)(\tau) &= (n_3\tau + n_4)^{-k} \cdot (m_3(N\tau) + m_4)^{-k} \cdot f(M(N\tau)) \\
&= (n_3\tau + n_4)^{-k} \cdot (m_3\frac{n_1\tau + n_2}{n_3\tau + n_4} + m_4)^{-k} \cdot f((MN)\tau) \\
&= (m_3(n_1\tau + n_2) + m_4(n_3\tau + n_4))^{-k} \cdot f((MN)\tau) \\
&= ((m_3n_1 + m_4n_3)\tau + (m_3n_2 + m_4n_4))^{-k} \cdot f((MN)\tau) \\
&= \Big(f|(MN)\Big)(\tau)
\end{aligned}$$

□

— Modulare Funktionen —

(1.3) Definition (modular vom Gewicht k)
Man nennt *f modular vom Gewicht k*, wenn gilt:

(M.1) f ist meromorph auf $\mathbb{H}$

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$ ◇

Ohne Verwendung des Strichoperators bedeutet (M.2) also, dass

$$(c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) = f(\tau) \qquad \text{für alle } M \in \Gamma \text{ und alle } \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f$$

gilt. Schreibt man die Gleichung um zu

$$f(M\tau) = f(\tau) \cdot (c\tau + d)^k \qquad \text{für alle } M \in \Gamma \text{ und alle } \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f,$$

so wird das Verhalten von f unter Elementen der Modulgruppe Γ noch offensichtlicher. Speziell sind modulare Funktionen vom Gewicht 0 also invariant unter Elementen der Modulgruppe Γ.

Der Fall $M = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \qquad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f.$$

Jede modulare Funktion von beliebigem Gewicht ist also modulo 1 periodisch.

Kommen wir nun zu einer ersten wichtigen Strukturaussage:

(1.4) Satz
Jede modulare Funktion von ungeradem Gewicht ist identisch 0. $\diamond$

Beweis
Sei also f modular vom Gewicht k. Dann gilt insbesondere für $-E \in \Gamma$ die Gleichheit $f = f|_k(-E)$. Das bedeutet $f(\tau) = (-1)^{-k} f(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H} \setminus D_f$. Da k ungerade ist, folgt sofort $f \equiv 0$. $\square$

(1.5) Bemerkung
Wie wir wissen, erzeugen die beiden Matrizen $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Modulgruppe Γ. Unter Verwendung von $(f|M)|N = f|(MN)$ können wir daher anstelle von (M.2) in der Definition der modularen Funktion auch bloß verlangen, dass f den beiden Gleichungen

$$f|_k T = f \quad \text{und} \quad f|_k J = f$$

genügt, was nichts anderes bedeutet als

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau). \qquad \diamond$$

(1.6) Bemerkung
Sind f und g zwei modulare Funktionen vom Gewicht k, dann ist $\alpha f + \beta g,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ebenso modular vom Gewicht k. Denn offensichtlich erfüllt $\alpha f + \beta g$ die Bedingung (M.1) sowie die Bedingung (M.2), wenn man folgende Gleichheit betrachtet:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\tau) &= \alpha f(\tau) + \beta g(\tau) \\ &= \alpha \cdot (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) + \beta \cdot (c\tau + d)^{-k} \cdot g(M\tau) \\ &= (c\tau + d)^{-k} \cdot (\alpha f + \beta g)(M\tau)\end{aligned} \qquad \diamond$$

Die modularen Funktionen vom Gewicht k bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

§2 Pol bei ∞

In diesem Kapitel definieren wir für modulo 1 periodische Funktionen die Eigenschaft *Pol bei* ∞. Zu den modulo 1 periodischen Funktionen gehören, wie wir bereits festgestellt haben, auch die modularen Funktionen. Die neue Eigenschaft benötigen wir, um in Kapitel 3 die Modulformen zu definieren.

— *Meromorphie und* $\hat{\mathbb{C}}$ —

Eine *meromorphe Funktion* auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist bekanntlich eine holomorphe Funktion $f : U \backslash D_f \to \mathbb{C}$ mit

1) D_f ist diskret in U.

2) f hat in $a \in D_f$ Pole.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf einer offenen Menge U sei mit $\mathcal{M}(U)$ bezeichnet.

Die *Riemannsche Zahlenkugel* ist gegeben durch $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit den Rechenregeln:

$$\infty \pm a = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \frac{b}{0} = b \cdot \infty = \infty, \quad b \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$$

Somit schreiben wir für eine meromorphe Funktion f fortan

$$f(a) = \infty \quad \text{für } a \in D_f.$$

Wir beweisen kurz noch einen Hilfssatz, auf den wir im nächsten Abschnitt zurückgreifen werden:

(2.1) Hilfssatz
Sei G ein Gebiet, U eine offene Menge, $h : G \to U$ eine holomorphe Funktion und $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit Polstellenmenge D_f. Wenn h nicht ausschließlich auf einen Wert aus D_f abbildet, dann ist $f \circ h$ meromorph auf G. $\diamond$

Beweis
Zuerst beweisen wir, dass die Menge $T := \{z \in G \mid h(z) \in D_f\}$ diskret in G liegt. Dazu betrachten wir ein beliebiges $z_0 \in T$ und zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt mit $K_r(z_0) \cap T = \{z_0\}$.

Sei also $z_0 \in T$ mit $h(z_0) = u_0 \in D_f$. Da D_f diskret in U liegt, gibt es ein $R > 0$ mit $K_R(u_0) \cap D_f = \{u_0\}$. Da h auf G stetig ist, lässt sich dazu ein $r_1 > 0$ finden mit $h\big(K_{r_1}(z_0)\big) \subset K_R(u_0)$. Für alle $z \in K_{r_1}(z_0) \cap T$ gilt nun $h(z) = u_0$. Sei $r_2 := r_1/2$. Angenommen die Menge $\overline{K_{r_2}(z_0)} \cap T$ ist unendlich. Dann besitzt T (genauer gesagt die Menge $\{z \in G \mid h(z) = u_0\}$) in dem Kompaktum $\overline{K_{r_2}(z_0)}$ mindestens einen Häufungspunkt. Dieser Häufungspunkt liegt dann natürlich auch in $K_{r_1}(z_0)$. Daraus folgt mit dem Identitätssatz (siehe [2], Korollar III(3.10)), dass $h \equiv u_0$ gilt, was aber ausgeschlossen wurde. Also ist $\overline{K_{r_2}(z_0)} \cap T$ endlich. Jetzt können wir den Kreis so weit verkleinern, dass der Schnitt nur noch z_0 enthält. Es existiert also ein $r_3 > 0$ mit $K_{r_3}(z_0) \cap T = \{z_0\}$. Demnach liegt T diskret in G, womit $G \setminus T$ offen ist und $f \circ h$ holomorph auf $G \setminus T$.

Es bleibt zu zeigen, dass $f \circ h$ in T Polstellen hat. Sei $z_0 \in T$ mit $h(z_0) = u_0 \in D_f$. Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{u \to u_0} |f(u)| = \infty$. Das bedeutet, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(u)| > a$ für alle $u \in K_\delta(u_0)$. Da h stetig ist, gibt es nun zu jedem solchen δ ein $r > 0$ mit $h\big(K_r(z_0)\big) \subset K_\delta(u_0)$. Also folgt $\lim\limits_{z \to z_0} \big|f\big(h(z)\big)\big| = \infty$. Somit hat $f \circ h$ in T Polstellen. □

— Funktionen auf Streifen und Kreisringen —

Wie wir wissen, bezeichnet $S_{\alpha,\beta}$ für $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ einen „horizontalen" Streifen in $\mathbb{C}$ mit $S_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \mathrm{Im}(z) < \beta\}$.

Der Ausdruck $K_{r,R}(a)$ steht für die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le r < R \le \infty$. Abkürzend schreiben wir $\dot{K}_R(a)$ anstelle von $K_{0,R}(a)$.

Die Funktion

$$\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{2\pi i z}$$

bildet einen Streifen $S_{\alpha,\beta}$ auf den Kreisring $K_{r,R}(0)$ ab mit $r = e^{-2\pi\beta}$ und $R = e^{-2\pi\alpha}$. Umgekehrt bildet die Funktion

$$\bar{\lambda} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{Log}(z)$$

den Kreisring $K_{r,R}(0)$ ab auf $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) \le \frac{1}{2} \mid \alpha < \mathrm{Im}(z) < \beta\} \subset S_{\alpha,\beta}$, also für endliches α und β auf ein Rechteck (siehe auch [2], Lemma V(4.2)).

Wir kommen nun zu einem Lemma, das eine leicht veränderte Version des Lemmas V(4.2) aus der Funktionentheorie I [2] darstellt.

(2.2) Lemma
Sei die Funktion $f : S_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}$ meromorph und modulo 1 periodisch. Dann gibt es genau ein $\hat{f} \in \mathcal{M}(K_{r,R}(0))$ mit

$$f(z) = \hat{f}(e^{2\pi i z}) \quad \text{für alle } z \in S_{\alpha,\beta}.$$

Dabei ist $r = e^{-2\pi\beta}$ und $R = e^{-2\pi\alpha}$. ◇

Beweis
Wir werden feststellen, dass $f \circ \bar{\lambda}$ genau die gesuchte Funktion ist. Zunächst einmal zeigen wir, dass $f \circ \bar{\lambda}$ meromorph auf $K_{r,R}(0)$ ist.

Meromorphie
Mit Hilfssatz (2.1) folgt, dass die Funktion

$$f \circ \bar{\lambda} : K_{r,R}(0) \to \hat{\mathbb{C}}, \quad w \mapsto f\left(\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(w)\right)$$

meromorph auf dem Gebiet $K_{r,R}(0) \cap \mathbb{C}_-$ ist. Bei Annäherung an ein $x_0 \in (-R, -r)$ mit $\bar{\lambda}(x_0) \notin D_f$ von der oberen bzw. unteren Halbebene aus konvergiert $\bar{\lambda}$ gegen

$$\frac{1}{2\pi i}(\ln|x_0| + \pi i) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi i}(\ln|x_0| - \pi i),$$

was nach Ausmultiplizieren

$$\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\ln|x_0|}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\ln|x_0|}{2\pi}$$

ergibt. Die beiden Punkte unterscheiden sich nur im Realteil um 1. Da f die Gleichung $f(z+1) = f(z)$ erfüllt, ist f somit stetig in x_0. Sei T definiert als

$$T := \{z \in K_{r,R}(0) \mid \bar{\lambda}(z) \in D_f\}.$$

Wir zeigen nun noch, dass $K_{r,R}(0)\backslash T$ offen ist und haben dann alle Voraussetzungen um Lemma V(4.1) aus der Funktionentheorie I [2] anzuwenden. Da $f \circ \bar{\lambda}$ meromorph auf $K_{r,R}(0) \cap \mathbb{C}_-$ ist, folgt die Offenheit von $(K_{r,R}(0)\backslash T) \cap \mathbb{C}_-$. Es bleibt zu zeigen, dass T keinen Häufungspunkt auf $(-R, -r)$ hat. Angenommen T besitzt einen Häufungspunkt auf $(-R, -r) = (-e^{-2\pi\alpha}, -e^{-2\pi\beta})$. Dann hat D_f einen Häufungspunkt auf

$$\Big(\frac{1}{2} + i\alpha\,,\ \frac{1}{2} + i\beta\Big)$$

oder

$$\Big(-\frac{1}{2} + i\alpha\,,\ -\frac{1}{2} + i\beta\Big).$$

Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass D_f diskret in $S_{\alpha,\beta}$ ist. Also ist $K_{r,R}(0)\backslash T$ offen. Mit dem oben genannten Lemma erhalten wir die Holomorphie von $f \circ \bar{\lambda}$ auf $K_{r,R}(0)\backslash T$. Abschließend bemerken wir, dass $f \circ \bar{\lambda}$ in $z_0 \in T \cap (-R, -r)$ einen Pol hat, da $|f \circ \bar{\lambda}(z)| \xrightarrow{z \to z_0} \infty$ sowohl bei Annäherung von der unteren als auch von der oberen Halbebene aus gilt. Also ist $f \circ \bar{\lambda}$ meromorph auf $K_{r,R}(0)$.

Funktionaler Zusammenhang
Die Funktion $f \circ \bar{\lambda}$ erfüllt den geforderten funktionalen Zusammenhang, denn für ein beliebiges $z_0 \in S_{\alpha,\beta}$ gilt mit einem von z_0 abhängigen $k_{z_0} \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit

$$f \circ \bar{\lambda}(e^{2\pi i z_0}) = f\left(\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(e^{2\pi i z_0})\right) = f(z_0 + k_{z_0}) \overset{\text{Periodizität}}{=} f(z_0).$$

Eindeutigkeit
Die Eindeutigkeit folgt mit dem Identitätssatz aus der Funktionentheorie I [2]. Denn sind $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \mathcal{M}\big(K_{r,R}(0)\big)$ zwei Funktionen mit

$$\hat{f}_1(\underbrace{e^{2\pi i z}}_{\in K_{r,R}(0)}) = f(z) = \hat{f}_2(\underbrace{e^{2\pi i z}}_{\in K_{r,R}(0)}),$$

gilt schließlich auch die Gleichheit

$$\hat{f}_1(z) = \hat{f}_2(z) \qquad \text{für alle } z \in K_{r,R}(0).$$

□

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch die umgekehrte Beziehung:

(2.3) Lemma
Sei $\hat{f}$ meromorph auf dem Kreisring $K_{r,R}(0)$. Dann ist die Funktion f mit

$$f(z) := \hat{f}(e^{2\pi i z}) \qquad \text{für alle } z \in S_{\alpha,\beta}$$

meromorph auf dem Streifen $S_{\alpha,\beta}$ und modulo 1 periodisch. ◇

Beweis
Es gilt die Gleichheit $\lambda(S_{\alpha,\beta}) = K_{r,R}(0)$. Mit Hilfssatz (2.1) folgt, dass f auf $S_{\alpha,\beta}$ meromorph ist. Außerdem gilt $\hat{f}(e^{2\pi i(z+1)}) = \hat{f}(e^{2\pi i z} \cdot e^{2\pi i}) = \hat{f}(e^{2\pi i z})$, womit f modulo 1 periodisch ist. □

(2.4) Bemerkung
Ist f aus Lemma (2.2) holomorph auf $S_{\alpha,\beta}$, dann ist die zugehörige Funktion $\hat{f}$ holomorph auf $K_{r,R}(0)$ (siehe auch [2], Lemma V(4.2)). ◇

(2.5) Bemerkung
Wir bezeichnen kurzerhand mit $\mathcal{M}_1(G)$ die Menge aller meromorphen Funktionen auf einem Gebiet G, die modulo 1 periodisch sind. Aus der Funktionentheorie I wissen wir, dass die meromorphen Funktionen auf einem Gebiet G einen Körper bilden (siehe [2], Korollar V(3.4)). Man verifiziert leicht, dass $\mathcal{M}_1(G)$ einen Teilkörper von $\mathcal{M}(G)$ darstellt. Insgesamt erhalten wir mit Lemma (2.2) und Lemma (2.3), dass die Abbildung
$$\lambda^* : \mathcal{M}\big(K_{r,R}(0)\big) \to \mathcal{M}_1\big(S_{\alpha,\beta}\big), \quad \hat{f} \mapsto \hat{f} \circ \lambda$$
ein Körper-Isomorphismus ist. $\diamond$

(2.6) Bemerkung
Lemma (2.2) und Lemma (2.3) gelten insbesondere für den Fall $\alpha = 0$ und $\beta = \infty$ mit $S_{\alpha,\beta} = \mathbb{H}$ und $K_{r,R}(0) = \dot{\mathbb{E}}$. $\diamond$

— *Pol bei* ∞ —

Sei eine meromorphe Funktion χ gegeben durch
$$\chi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$
Außerdem sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine offene Menge mit $\infty \in U$ (siehe [2], Definition V(3.6)).

Für eine Funktion $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ haben wir in Aufgabenblatt 10 der Vorlesung Funktionentheorie I die folgenden Bezeichnungen kennen gelernt:

- Wir nennen f *holomorph in* ∞, wenn $f \circ \chi\big|_{\chi(U)}$ holomorph in 0 ist.
- Die Funktion f hat eine Nullstelle, einen Pol oder eine wesentliche Singularität in ∞, wenn $f \circ \chi\big|_{\chi(U)}$ eine Nullstelle, einen Pol oder eine wesentliche Singularität in 0 hat.

Diese Bezeichnungen kann man jedoch nicht verwenden für Funktionen, die nur auf $\mathbb{H}$ definiert sind. Speziell für modulo 1 periodische Funktionen werden wir nun eine etwas andere Definition von *Pol bei* ∞ geben. Die Grundidee bleibt dabei erhalten: Das „Verhalten bei ∞“ wird mittels einer Komposition zurückgespielt auf ein „Verhalten bei 0“.

(2.7) Definition (Pol bei ∞)
Man sagt, dass eine modulo 1 periodische und auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion f *bei* ∞ *höchstens einen Pol* hat genau dann, wenn die zugehörige Funktion $\hat{f}$ aus Lemma (2.2) auf $\mathbb{E}$ meromorph fortgesetzt werden kann. $\diamond$

(2.8) Bemerkung
Die Definition bedeutet nichts anderes, als dass eine Laurent-Entwicklung von $\hat{f}$ in 0 mit endlichem Hauptteil existiert. Es gilt also für ein geeignetes $r > 0$ und für alle $z \in \dot{K}_r(0)$ die Gleichung

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m,$$

wobei m_0 das Minimum aller $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_f(m) \neq 0$ ist (vgl. [2], Satz V(2.10)). Die Reihe konvergiert absolut (Hauptteil und Nebenteil konvergieren auf ihrem Konvergenzbereich immer absolut) und nach Satz V(1.4) aus der Funktionentheorie I [2] auch kompakt gleichmäßig

Die Benennung der Laurent-Koeffizienten von $\hat{f}$ mit α_f ist berechtigt, da diese gleichzeitig die Fourier-Koeffizienten von f darstellen, wie wir in Lemma (2.9) sehen werden.

An m_0 in der Laurent-Reihe lässt sich ablesen, ob $\hat{f}$ eventuell holomorph in 0 ist oder welche Ordnung Pole oder Nullstellen in 0 haben. In Übereinstimmung damit sagt man, dass f bei ∞

- holomorph ist, falls $m_0 \geq 0$ gilt.
- einen Pol der Ordnung $-m_0$ hat, falls $m_0 < 0$ gilt.
- eine Nullstelle der Ordnung m_0 hat, falls $m_0 > 0$ gilt.

Wir setzen demnach

$$\operatorname{ord}_\infty f := m_0. \qquad \diamond$$

(2.9) Lemma
Sei f eine modulo 1 periodische und auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion. Dann gilt die Äquivalenz:

a) f hat bei ∞ höchstens einen Pol

b) f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die auf einem Streifen $S_{\gamma,\infty}$ für ein geeignetes $\gamma > 0$ absolut und kompakt gleichmäßig konvergiert. $\diamond$

Beweis
a) $\Rightarrow$ b)
Hat f bei ∞ höchstens einen Pol, so besitzt die zugehörige Funktion $\hat{f}$ in 0 also eine Laurent-Entwicklung der Form

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m,$$

die für ein geeignetes $r > 0$ auf $\dot{K}_r(0)$ absolut und kompakt gleichmäßig konvergiert Wählen wir $\gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln(r)$ erhalten wir

$$\lambda(S_{\gamma,\infty}) = \dot{K}_r(0).$$

Da $\hat{f}$ auf $\dot{K}_r(0)$ holomorph ist, folgt die Holomorphie von $\hat{f} \circ \lambda$ auf $S_{\gamma,\infty}$ mit

$$(\hat{f} \circ \lambda)(z) = f(z) = \hat{f}(e^{2\pi i z}) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m z}.$$

Also besitzt f eine Fourier-Entwicklung der gewünschten Form.

a) $\Leftarrow$ b)
Die Funktion f hat eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die auf einem Streifen $S_{\gamma,\infty}$ für ein geeignetes $\gamma > 0$ absolut und kompakt gleichmäßig konvergiert. Mit dem Satz von Weierstraß (siehe [2], Satz III(5.1)) ist f holomorph auf $S_{\gamma,\infty}$. Lemma (2.2) liefert nun die Existenz einer Funktion $\hat{f}$ mit $\hat{f}(e^{2\pi i \tau}) = f(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Die Fourier-Reihe von f übersetzt sich dann zu:

$$\hat{f}(e^{2\pi i z}) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot (e^{2\pi i z})^m \qquad \text{für alle } z \in S_{\gamma,\infty}$$

Das ist äquivalent zu

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m$$

für $z \in \dot{K}_r(0)$ mit $r = e^{-2\pi\gamma}$. Die Funktion $\hat{f}$ hat also in 0 eine Laurent-Entwicklung mit endlichem Hauptteil. $\square$

(2.10) Bemerkung
Analog zu Satz V(4.3) aus der Funktionentheorie I [2] lassen sich die Fourier-Koeffizienten ausdrücken durch

$$\alpha_f(m) = \int_{[w,w+1]} f(\tau) \cdot e^{-2\pi i m \tau} d\tau \qquad \text{für alle } w \in \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) > \gamma\}.$$

Der Wert γ ist hier wie im Beweis von Lemma (2.9) gewählt. Zur Erinnerung sei noch darauf hingewiesen, dass man diese Formel aus der Cauchyschen Integralformel erhält. $\diamond$

Wir möchten eine weitere äquivalente Definition zu Pol bei ∞ geben. Dafür benötigen wir den

(2.11) Hilfssatz
Sei $g \neq 0$ eine auf $\dot{K}_r(0)$ holomorphe Funktion und stetig fortsetzbar auf $\overline{K_r(0)}\backslash\{0\}$. Dann gilt die Äquivalenz:

a) g hat auf $\dot{K}_r(0)$ eine Laurent-Reihe der Form

$$g(z) = \sum_{m \geq m_0} a_m \cdot z^m \qquad \text{für ein } m_0 \in \mathbb{Z}.$$

b) g genügt auf $\overline{K_r(0)}\backslash\{0\}$ einer Abschätzung der Gestalt

$$|g(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0}.$$ $\diamond$

Beweis
a) $\Rightarrow$ b)
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a_{m_0} \neq 0$. Auf $\dot{K}_r(0)$ lässt sich g schreiben als

$$g(z) = \sum_{m \geq m_0} a_m \cdot z^m = z^{m_0} \cdot \underbrace{\sum_{m \geq m_0} a_m \cdot z^{m-m_0}}_{=:h(z)}.$$

Die Funktion h ist holomorph auf $\dot{K}_r(0) \cup \{0\}$ mit $h(0) \neq 0$, da $a_{m_0} \neq 0$ verlangt wurde. Außerdem ist h nach Voraussetzung stetig auf $\overline{K_r(0)}$ und erfüllt somit nach dem Maximumprinzip (siehe [2], Satz III(4.13)) für ein $w \in \partial K_r(0)$ die Abschätzung $|h(z)| \leq |h(w)|$ für alle $z \in \overline{K_r(0)}$.

Wir erhalten damit die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned}
|g(z)| &= |z^{m_0}| \cdot |\sum_{m \geq m_0} a_m \cdot z^{m-m_0}| \\
&= |z^{m_0}| \cdot |h(z)| \\
&\leq |z^{m_0}| \cdot |h(w)| \\
&= |z^{m_0}| \cdot C \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und alle } z \in \overline{K_r(0)}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

a) $\Leftarrow$ b)
Es gelte also

$$|g(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0} \qquad \text{für alle } z \in \overline{K_r(0)} \setminus \{0\},$$

was äquivalent ist zu

$$|\underbrace{g(z) \cdot \frac{1}{z^{m_0}}}_{=:h(z)}| \leq C \qquad \text{für alle } z \in \overline{K_r(0)} \setminus \{0\}.$$

Die Funktion h ist in einer punktierten Umgegung von 0 beschränkt und hat somit eine hebbare Singularität in 0. Die Laurent-Reihe von h hat dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Form

$$h(z) = \sum_{m \geq m_0} a_m z^{m-m_0}.$$

Für alle $z \in \dot{K}_r(0)$ folgt dann

$$\underbrace{h(z) \cdot z^{m_0}}_{=g(z)} = \sum_{m \geq m_0} a_m z^m,$$

womit wir a) erhalten haben. $\square$

Kommen wir nun zur versprochenen Äquivalenz:

(2.12) Lemma
Sei $f \neq 0$ eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion und modulo 1 periodisch. Dann gilt die Äquivalenz:

a) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

b) Es gibt ein $\gamma > 0$ mit den beiden Eigenschaften

   1) f ist holomorph auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) > \gamma\}$.

   2) Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, sodass es für jedes $\epsilon > 0$ ein C gibt mit:

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \operatorname{Im}(\tau)} \text{ für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon. \qquad \diamond$$

Beweis

a) $\Rightarrow$ b1)

In 0 hat $\hat{f}$ also eine isolierte Singularität und ist somit holomorph auf $\dot{K}_r(0)$ für ein $r > 0$. Also ist f als Verkettung holomorpher Funktionen auf dem zu $\dot{K}_r(0)$ gehörenden Streifen $S_{\gamma,\infty}$ holomorph mit $\gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln(r)$.

a) $\Rightarrow$ b2)

Sei $\epsilon > 0$. Nach a) ist $\hat{f}$ also holomorph auf $\dot{K}_r(0)$ für ein $r > 0$ mit endlichem Hauptteil. Also ist $\hat{f}$ für ein $\tilde{\epsilon} \in (0, r)$ stetig auf $\overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\}$, wobei $\tilde{\epsilon}$ so gewählt sei, dass die Gleichheit

$$\overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\} = \{e^{2\pi i\tau} \mid \tau \in \mathbb{H} \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon\}$$

erfüllt ist. Ein konkreter Wert für $\tilde{\epsilon}$ sei hier nicht angegeben. Stattdessen beachte man, dass unter der Funktion λ eine *Erhöhung* der unteren Grenze γ des Streifens $S_{\gamma,\infty}$ eine *Verkleinerung* des Radius r vom Kreisring $\dot{K}_r(0)$ bedeutet. Mit Hilfssatz (2.11) folgt nun für ein $C > 0$

$$|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0} \quad \text{für alle } z \in \overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\}.$$

Dann lässt sich die letzte Ungleichung für alle τ mit $\operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon$ schreiben als

$$|\hat{f}(e^{2\pi i\tau})| \leq C \cdot |e^{2\pi i\tau}|^{m_0},$$

was äquivalent ist zu

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \operatorname{Im}(\tau)}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung.

a) $\Leftarrow$ b)

Die Funktion f ist also holomorph auf $S_{\gamma,\infty}$. Mit Bemerkung (2.4) folgt die Holomorphie von $\hat{f}$ auf dem zu $S_{\gamma,\infty}$ gehörenden Kreisring $\dot{K}_r(0)$. Also hat $\hat{f}$ in 0 eine isolierte Singularität. Weiter gilt nach b2) die Ungleichung

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \operatorname{Im}(\tau)} = C \cdot |e^{2\pi i\tau}|^{m_0} \qquad \text{für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon,$$

was äquivalent ist zu

$$|\hat{f}(e^{2\pi i\tau})| \leq C \cdot |e^{2\pi i\tau}|^{m_0}.$$

Es gilt $e^{2\pi i\tau} \in \overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\}$, wobei der Wert $\tilde{\epsilon}$ so gewählt sei, dass die Gleichheit

$$\overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\} = \{e^{2\pi i\tau} \mid \tau \in \mathbb{H} \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon\}$$

erfüllt ist. Somit lässt sich die letzte Ungleichung schreiben als

$$|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0} \qquad \text{für alle } z \in \overline{K_{r-\tilde{\epsilon}}(0)}\backslash\{0\}.$$

Insgesamt können wir nun Hilfssatz (2.11) anwenden, womit wir erhalten, dass $\hat{f}$ auf $\dot{K}_{r-\tilde{\epsilon}}(0)$ eine Darstellung der Form

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m$$

hat. Also besitzt f bei ∞ höchstens einen Pol. $\square$

§3 Modulformen

(3.1) Definition (Modulform)
Eine Funktion f heißt *Modulform vom Gewicht k*, wenn gilt:

(M.1) f ist meromorph auf $\mathbb{H}$

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$

(M.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

Mit anderen Worten ist f also eine Modulform vom Gewicht k, wenn f modular vom Gewicht k ist und bei ∞ höchstens einen Pol hat. $\diamond$

Wie wir aus Lemma (2.9) wissen, kann (M.3) auch durch die Bedingung ersetzt werden: f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form $f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$, die mit einem $\gamma > 0$ für $\mathrm{Im}(\tau) \geq \gamma$ absolut und kompakt gleichmäßig konvergiert.

Haben f und g bei ∞ höchstens einen Pol, so hat $\alpha f + \beta g$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ebenfalls bei ∞ höchstens einen Pol, wie man schnell aus Lemma (2.12) erkennt. Die Modulformen vom Gewicht k bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, für den wir $\mathbb{V}_k$ schreiben.

Das Produkt zweier Modulformen vom Gewicht k und l hat wiederum bei ∞ höchstens einen Pol und ergibt eine Modulform vom Gewicht $k + l$. Dafür müssen wir uns in Erinnerung rufen, dass meromorphe Funktionen auf einem Gebiet G einen Körper bilden (siehe [2], Korollar (3.4)). Sind nun f und g zwei Modulformen vom Gewicht k und l, so gilt offensichtlich

$$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Somit kann auch $\widehat{f \cdot g}$ auf $\mathbb{E}$ meromorph fortgesetzt werden. Dass sich die Gewichte addieren, wird klar durch

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(\tau) &= f(\tau) \cdot g(\tau) \\ &= (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) \cdot (c\tau + d)^{-l} \cdot g(M\tau) \\ &= (c\tau + d)^{-(k+l)} \cdot f(M\tau) \cdot g(M\tau) \\ &= (c\tau + d)^{-(k+l)} \cdot (f \cdot g)(M\tau)\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_l \subset \mathbb{V}_{k+l} \quad \text{für } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Des weiteren stellen wir fest, dass $\frac{1}{f}$ eine Modulform ist, wenn $f \neq 0$ eine Modulform ist. Wiederum rufen wir uns dazu in Erinnerung, dass meromorphe Funktionen auf einem Gebiet G einen Körper bilden. Offensichtlich gilt $\widehat{\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{1}{\hat{f}}$. Also ist $\widehat{\left(\frac{1}{f}\right)}$ meromorph auf $\mathbb{E}$, womit $\frac{1}{f}$ bei ∞ höchstens einen Pol hat. Dass das Gewicht sein Vorzeichen ändert, wird ersichtlich durch:

$$\frac{1}{f}(\tau) = \frac{1}{f(\tau)} = \frac{1}{(c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau)} = \frac{(c\tau + d)^k}{f(M\tau)} = (c\tau + d)^k \cdot \frac{1}{f}(M\tau)$$

Wir erhalten also:

$$\frac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \quad \text{für } f \in \mathbb{V}_k \setminus \{0\}$$

(3.2) Definition (Modulfunktion)
Eine Modulform vom Gewicht 0 heißt *Modulfunktion*. ◇

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Modulfunktionen unter Elementen der Modulgruppe Γ folglich invariant sind.

Mit den algebraischen Eigenschaften der Modulformen stellen wir unschwer fest, dass der Vektorraum $\mathbb{V}_0$ der Modulfunktionen ein Körper ist, der die konstanten Funktionen sowie alle Quotienten von Modulformen des selben Gewichts enthält.

§4 Ganze Modulformen

— *Ganze Modulformen* —

(4.1) Definition (Ganze Modulform)
Eine Funktion f heißt *ganze Modulform vom Gewicht* k, wenn gilt:

(M.1)* f ist holomorph auf $\mathbb{H}$

(M.2)* $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$

(M.3)* f ist für alle $\gamma > 0$ auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}(\tau) \geq \gamma\}$ beschränkt.

Eine Modulform f vom Gewicht k heißt somit ganze Modulform vom Gewicht k, wenn f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist und wenn f bei ∞ *keinen* Pol hat. ◇

Da ganze Modulformen bei ∞ *keinen* Pol haben, folgt, dass $\hat{f}$ in 0 holomorph ist und die zugehörige Laurent-Reihe keinen Hauptteil besitzt, also $m_0 \geq 0$ gilt. Ersichtlich wird dies anhand von Bemerkung (2.8) oder, wenn man im Beweis von Lemma (2.12) beachtet, dass »f beschränkt« äquivalent zu $m_0 \geq 0$ ist.

Wie schon bei den Modulformen, kann (M.3)* ersetzt werden durch: f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form $f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$, die mit einem $\gamma > 0$ für $\mathrm{Im}(\tau) \geq \gamma$ absolut und kompakt gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt für eine ganze Modulform f vom Gewicht k die Gleichung

$$\alpha_f(0) = \lim_{y \to \infty} f(iy).$$

Sind f und g ganze Modulformen vom Gewicht k, stellt man schnell fest, dass $\alpha f + \beta \gamma$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ wiederum eine ganze Modulform vom Gewicht k ist. Die ganzen Modulformen vom Gewicht k bilden also einen Vektorraum, den wir im Folgenden mit $\mathbb{M}_k$ bezeichnen.

Für das Produkt von ganzen Modulformen erhalten wir mit ähnlicher Begründung wie bei den Modulformen

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{M}_{k+l} \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}.$$

(4.2) Definition (Spitzenform)
Eine ganze Modulform f heißt *Spitzenform*, wenn f bei ∞ eine Nullstelle hat, wenn also $\alpha_f(0) = 0$ gilt. ◇

Auch die Spitzenformen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum. Diesen bezeichnen wir mit $\mathbb{S}_k$.

Insgesamt erfüllen die eingeführten Vektorräume die Inklusionskette

$$\mathbb{S}_k \subset \mathbb{M}_k \subset \mathbb{V}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Das Produkt einer Spitzenform f vom Gewicht k und einer ganzen Modulform g vom Gewicht l (also insbesondere auch das Produkt zweier Spitzenformen) ergibt eine Spitzenform vom Gewicht $k+l$. Die Begründung läuft ähnlich ab wie bei der Betrachtung des Produkts zweier Modulformen. Einzig zu zeigen bleibt, dass die resultierende Funktion $f \cdot g$ bei ∞ eine Nullstelle hat. Auf $\mathbb{H}$ sind f und g stetig. Wir erhalten damit

$$\lim_{y\to\infty}(f \cdot g)(iy) = \lim_{y\to\infty} f(iy) \cdot \lim_{y\to\infty} g(iy) = \alpha_f(0) \cdot 0 = 0.$$

In Mengenschreibweise fassen wir dieses Resultat zusammen zu

$$\mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_k \subset \mathbb{S}_{k+l} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Abschließend notieren wir einen speziellen Fall von Lemma (2.12). Dabei besagt die Notation

$$f(z) = \mathcal{O}\big(g(z)\big) \quad \text{für alle } z \in U\ ,$$

dass für ein $C > 0$ die Ungleichung $|f(z)| \leq C \cdot |g(z)|$ auf U gilt.

(4.3) Lemma
Ist $f \in \mathbb{M}_k$ und $\gamma > 0$, so gilt

$$f(\tau) - \alpha_f(0) = \mathcal{O}(e^{-2\pi \operatorname{Im}(\tau)})$$

auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma\}$. ◇

Beweis
Die Funktion $f - \alpha_f(0)$ ist offensichtlich modulo 1 periodisch und holomorph auf $\mathbb{H}$. Wegen

$$f(\tau) - \alpha_f(0) = \sum_{m\geq 1} \alpha_f(m) e^{2\pi i m \tau}$$

stellen wir mit Lemma (2.9) fest, dass die Funktion bei ∞ höchstens einen Pol hat. Bemerkung (2.8) liefert uns sogar, dass die Funktion in ∞ eine Nullstelle besitzt mit

$m_0 > 0$. Nun können wir Lemma (2.12) anwenden und erhalten, dass ein $\gamma > 0$ und ein $m_0 > 0$ existiert, sodass es für jedes $\epsilon > 0$ ein C gibt mit:

$$\left|f(\tau) - \alpha_f(0)\right| \leq e^{-2\pi m_0 \operatorname{Im}(\tau)} \cdot C \quad \text{für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma + \epsilon.$$

Im Beweis von Lemma (2.12) sehen wir, dass die Wahl $\gamma = 0$ zugelassen werden kann, falls Holomorphie auf ganz $\mathbb{H}$ vorliegt. Somit lässt sich die Aussage vereinfachen: Es existiert ein $m_0 > 0$, sodass es für jedes $\epsilon > 0$ ein C gibt mit:

$$\left|f(\tau) - \alpha_f(0)\right| \leq e^{-2\pi m_0 \operatorname{Im}(\tau)} \cdot C \quad \text{für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \epsilon.$$

Schließlich schätzen wir mittels $m_0 > 0$ noch einmal ab und erhalten:

$$\left|f(\tau) - \alpha_f(0)\right| \leq e^{-2\pi \operatorname{Im}(\tau)} \cdot C \quad \text{für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{Im}(\tau) \geq \epsilon.$$

Schreiben wir statt des Buchstabens ϵ nun γ haben wir die Behauptung. □

— *Ganze Modulformen von negativem Gewicht* —

In diesem letzten Abschnitt zeigen wir noch, dass $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$ ist.

Dazu definieren wir eine reellwertige Funktion $\tilde{f}$:

(4.4) Definition
Für ein $f \in \mathbb{M}_k$ sei die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\tilde{f}(\tau) := (\operatorname{Im} \tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|, \tau \in \mathbb{H}.$$ ◇

(4.5) Lemma
Es gilt

$$\tilde{f}(M\tau) = \tilde{f}(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma.$$ ◇

Beweis
Den Beweis erhält man durch Einsetzen in die Definition und unter Verwendung der Identität (siehe Vortrag 1 »Die obere Halbebene $\mathbb{H}$«, Hilfssatz (3.1))

$$\operatorname{Im} M\tau = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \cdot \operatorname{Im} \tau \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \text{ und alle } M \in \Gamma.$$

Dieser sei hier der Vollständigkeit halber aufgeführt:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(M\tau) &= (\operatorname{Im} M\tau)^{k/2} \cdot |f(M\tau)| \\ &= \Big(\frac{1}{|c\tau+d|^2} \cdot \operatorname{Im}\tau\Big)^{k/2} \cdot |f(M\tau)| \\ &= \frac{(\operatorname{Im}\tau)^{k/2}}{|c\tau+d|^k} \cdot |f(\tau)| \cdot |c\tau+d|^k \\ &= (\operatorname{Im}\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)| \\ &= \tilde{f}(\tau)\end{aligned}$$

□

(4.6) Hilfssatz
Ist $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im}(\tau) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt und gilt

$$\phi(M\tau) = \phi(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

dann ist ϕ auf $\mathbb{H}$ beschränkt. ◇

Beweis
Es gilt $\mathbb{F} \subset \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$ und somit ist ϕ insbesondere auf $\mathbb{F}$ beschränkt $(*)$. Wie wir aus Vortrag 2 »Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe«, Satz (2.2) wissen, gibt es für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ein $\tilde{M} \in \Gamma$ mit $\tilde{M}\tau \in \mathbb{F}$. Für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{H}$ gilt insgesamt

$$\phi(\tau) \overset{\text{Vor.}}{=} \phi(\tilde{M}\tau) \overset{(*)}{\leq} C.$$

□

Wir kommen nun zum bereits angekündigten

(4.7) Satz
Es gilt $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$. ◇

Beweis
Nach Definition ist $f \in \mathbb{M}_k$ insbesondere auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$ beschränkt. Auch $\tilde{f}(\tau) = (\operatorname{Im}\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|$ ist somit beschränkt auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$, da $k < 0$ vorausgesetzt wurde. Mit Hilfssatz (4.6) folgt, dass $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Betrachte nun die Fourier-Koeffizienten von f. Nach Bemerkung (2.10) haben wir für diese die Darstellung

$$\alpha_f(m) = \int_{w}^{w+1} f(\tau) \cdot e^{-2\pi i m\tau} d\tau$$

mit einem beliebigen $w \in \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(\tau) > \gamma\}$, wobei im Falle ganzer Modulformen $m \geq 0$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\operatorname{Re}(w) = 0$. Wir schreiben τ als $x + iy$ und erhalten

$$\alpha_f(m) = e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx.$$

Also folgt für $|\alpha_f(m)|$:

$$\begin{aligned}
|\alpha_f(m)| &= e^{2\pi my} \cdot \Big| \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx \Big| \\
&\leq e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \big| f(x+iy) \big| dx \\
&= e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x+iy) \cdot \big(\operatorname{Im}(x+iy) \big)^{-k/2} dx \\
&= y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x+iy) dx \\
&\leq y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot C
\end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{H}$ kann das Integral mittels $C > 0$ abgeschätzt werden. Wir bemerken, dass der Exponent $-k/2$ echt größer 0 ist. Betrachtet man nun den Limes $y \to 0$, erhält man $\alpha_f(m) = 0$ für alle $m \geq 0$, also $f \equiv 0$. □

Literaturverzeichnis

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl., Springer-Verlag, Heidelberg 2007

[2] A. Krieg, Funktionentheorie I, 2008, Skript zur Vorlesung

[3] R. Remmert, G. Schumacher, Funktionentheorie 1, 5. Aufl., Springer-Verlag, Heidelberg 2002