Beispiele ganzer Modulformen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 01.07.2009

Andreas Freh

Nachdem wir im letzten Vortrag ganze Modulformen und Spitzenformen definiert haben, werden wir in diesem Vortrag Beispiele solcher Funktionen ansehen. Im letzten Vortrag konnten wir schon zeigen, dass $\mathbb{M}_k = \mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k < 0$ oder k ungerade. Damit zeigen diese Beispiele insbesondere, dass von der Nullfunktion verschiedene ganze Modulformen und Spitzenformen existieren und für gerades $k \geq 4$ gilt $\mathbb{M}_k \neq \mathbb{S}_k$.

Zusätzlich werden wir noch einige Eigenschaften der FOURIER-Koeffizienten von ganzen Modulformen herleiten.

Die Bezeichnungen aus den vorherigen Vorträgen werden übernommen.

§1 Die FOURIER-Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden wir noch einige Eigenschaften der FOURIER-Koeffizienten einer ganzen Modulform untersuchen.

(1.1) Hilfssatz
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\mathbb{M}_k \to \mathbb{C}\ ,\ f \mapsto \alpha_f(m)$$

eine Linearform, das heißt für alle $f, g \in \mathbb{M}_k$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\alpha_{z\cdot f+g}(m) = z \cdot \alpha_f(m) + \alpha_g(m). \qquad \diamond$$

Beweis
Es ist $\mathbb{M}_k$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum nach [4](4.1) und

$$\alpha_{z\cdot f+g}(m) = \int_0^1 (z \cdot f + g)(x + i)\mathrm{d}x.$$

Damit folgt die Behauptung aus der Linearität des Integrals. $\square$

In dem nächsten Satz werden wir das Wachstumsverhalten der FOURIER-Koeffizienten von Spitzenformen untersuchen.

(1.2) Satz (Wachstum der FOURIER-Koeffizienten)
Für $k > 0$ und $f \in \mathbb{M}_k$ gilt:

a) $\widetilde{f}$ ist genau dann auf $\mathbb{H}$ beschränkt, wenn $f \in \mathbb{S}_k$ ist. In diesem Fall nimmt $\widetilde{f}$ sein Maximum an, also es existiert ein $w \in \mathbb{H}$ mit
$$\widetilde{f}(\tau) \leq \widetilde{f}(w) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

b) Ist $f \in \mathbb{S}_k$, so gilt
$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k/2}) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$
◇

Beweis
a) "$\Rightarrow$" Nach [4](4.3) existiert ein $C \in \mathbb{R}_+$ sodass z.B. für alle τ mit $\operatorname{Im}\tau \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} & |f(\tau) - \alpha_f(0)| && \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \\ \Rightarrow & \left|\widetilde{f}(\tau) - \alpha_f(0) \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}\right| && \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}. \end{aligned}$$

Wendet man nun die Dreiecksungleichung an, ergibt sich

$$\left|\alpha_f(0) \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}\right| \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2} + \widetilde{f}(\tau),$$

wobei $C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}$ beschränkt ist. Sei nun $\widetilde{f}$ beschränkt, dann ist die rechte Seite beschränkt und damit ist auch $\alpha_f(0) \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}$ beschränkt für $\operatorname{Im}\tau \geq 1$. Da $k > 0$ muss $\alpha_f(0) = 0$ gelten. Damit ist $f \in \mathbb{S}_k$.

"$\Leftarrow$" Sei f eine Spitzenform. Dann existiert nach [4](4.3) ein $C \in \mathbb{R}_+$, sodass für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gilt

$$\begin{aligned} & |f(\tau) - \alpha_f(0)| = |f(\tau)| && \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \\ \Rightarrow & \qquad \widetilde{f}(\tau) && \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}, \end{aligned}$$

und $C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}$ ist beschränkt. Da $\widetilde{f}(M\tau) = \widetilde{f}(\tau)$ für alle $M \in \Gamma$ und alle $\tau \in \mathbb{H}$ nach [4](4.5) folgt mit [4](4.6) die Beschränktheit von $\widetilde{f}$ auf ganz $\mathbb{H}$.

Nun bleibt nur noch die Existenz von w zu zeigen.
Da $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist, existiert $s := \sup\{\widetilde{f}(\tau)\ ; \tau \in \mathbb{H}\} \geq 0$, da $\widetilde{f}(\tau) \geq 0$ für

alle $\tau \in \mathbb{H}$. Ist $s = 0$, so folgt, dass $\widetilde{f}$ konstant 0 ist und somit insbesondere sein Maximum annimmt. Sei also im folgenden $s > 0$.

Aus Vortrag 2, Satz 2.2 ist bekannt, dass es zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ ein $M \in \Gamma$ existiert mit $M\tau \in \mathbb{F}$ und somit insbesondere auch $M\tau \in \overline{\mathbb{F}}$. Da $\widetilde{f}(\tau) = \widetilde{f}(M\tau)$, ist $\widetilde{f}(\mathbb{H}) = \widetilde{f}(\overline{\mathbb{F}})$ und somit braucht nur gezeigt zu werden, dass $\widetilde{f}$ auf $\overline{\mathbb{F}}$ sein Maximum annimmt.

Da für für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und somit insbesondere für $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$ ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau}$ und damit $\widetilde{f}(\tau) = |f(\tau)| \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2} \leq C \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} \cdot (\operatorname{Im}\tau)^{k/2}$ folgt mit $\lim_{y\to\infty} C \cdot e^{-2\pi y} \cdot y^{k/2} = 0$, dass ein $N > 2$ existiert mit $\widetilde{f}(\tau) \leq \frac{s}{2}$ für alle $\tau \in \overline{\mathbb{F}}$ mit $\operatorname{Im}\tau > N$. Es ist aber $\{\tau \in \overline{\mathbb{F}};\ \operatorname{Im}\tau \leq N\}$ kompakt und somit nimmt die Funktion dort ihr Maximum an, was s sein muss.
w ist hierbei jedoch nie eindeutig.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $y > 0$ ist

$$\begin{aligned}
|\alpha_f(m)| &= \left| \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi i m(x+iy)} \mathrm{d}x \right| \\
&= e^{2\pi m y} \left| \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi i m x} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq e^{2\pi m y} \int_0^1 |f(x+iy)| \cdot \left| e^{-2\pi i m x} \right| \mathrm{d}x \\
&= e^{2\pi m y} \int_0^1 y^{-k/2} \cdot \widetilde{f}(x+iy) \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\
&\leq e^{2\pi m y} \cdot y^{-k/2} \cdot \max_{x\in[0,1]} (\widetilde{f}(x+iy)).
\end{aligned}$$

Nach a) ist $\widetilde{f}$ beschränkt, es existiert also ein $C > 0$ mit $\widetilde{f}(\tau) < C$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Damit folgt

$$e^{2\pi m y} \cdot y^{-k/2} \cdot \max_{x\in[0,1]} (\widetilde{f}(x+iy)) \leq e^{2\pi m y} \cdot y^{-k/2} \cdot C.$$

Da dies für alle $y > 0$ gilt, gilt es insbesondere für $y = \frac{1}{m}$. Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot e^{2\pi} \cdot m^{k/2}.$$

Das ist die Behauptung. □

(1.3) Bemerkung
In 2.18 b) werden wir sehen, dass wir Satz 1.2 b) auch schärfer formulieren können durch:

Für $k \geq 3$ ist $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ genau dann eine Spitzenform, wenn $f \in \mathbb{M}_k$ und

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k/2}) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für ungerades k ist die Aussage hierbei klar, da dann $\mathbb{M}_k = \mathbb{S}_k = \{0\}$. ◇

(1.4) Bezeichnung
Zu $f \in \mathbb{M}_k$ definiert man die Funktion f^* durch

$$f^* : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \tau \mapsto \overline{f(-\overline{\tau})}.$$ ◇

Da für $\tau \in \mathbb{H}$ auch $-\overline{\tau} \in \mathbb{H}$ ist, ist f^* wohldefiniert.

(1.5) Lemma
Ist $f \in \mathbb{M}_k$, so gilt

a) $f^* \in \mathbb{M}_k$.

b) Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist

$$f^*(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_f(m)} \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

also insbesondere $\alpha_{f^*}(m) = \overline{\alpha_f(m)}$.

c) $f^{**} = f$.

d) $f^* = f$ genau dann, wenn alle Koeffizienten der FOURIER-Reihe reell sind und $f^* = -f$ genau dann, wenn alle Koeffizienten der FOURIER-Reihe imaginär sind.

Die 0 ist hierbei natürlich sowohl eine imaginäre als auch eine reelle Zahl. ◇

Beweis
a) Die Holomorphie kann gezeigt werden, indem wir f^* um jedes $\tau \in \mathbb{H}$ in eine Potenzreihe entwickeln. Da f holomorph und $-\overline{\tau} \in \mathbb{H}$, kann man f um $-\overline{\tau}$ in eine Potenzreihe entwickeln, also existiert $\epsilon > 0$ mit

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_k \cdot (x - (-\overline{\tau}))^m$$

für alle x mit $|x - (-\overline{\tau})| < \epsilon$.
Für $x \in \mathbb{H}$ mit $|x - \tau| < \epsilon$ ist dann $|(-\overline{x}) - (-\overline{\tau})| = |x - \tau| < \epsilon$ und somit

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \overline{f(-\overline{x})} \\ &= \overline{\sum_{m=0}^{\infty} a_k \cdot ((-\overline{x}) - (-\overline{\tau}))^m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_k} \cdot ((-x) - (-\tau))^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \overline{a_k} \cdot (x - \tau)^m, \end{aligned}$$

wobei die Potenzreihe aufgrund von $|(-1)^m \overline{a_k}| = |a_k|$ den selben Konvergenzradius hat.

Sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, dann ist

$$\begin{aligned} f^*(M\tau) &= \overline{f(-\overline{M\tau})} \\ &= \overline{f\left(-\frac{a\overline{\tau} + b}{c\overline{\tau} + d}\right)} \\ &= \overline{f\left(\frac{a(\overline{-\tau}) - b}{-c(\overline{-\tau}) + d}\right)}. \end{aligned}$$

Da $M' = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, denn $\det M' = ad - bc = \det M = 1$, folgt weiter

$$\begin{aligned} \overline{f\left(\frac{a(\overline{-\tau}) - b}{-c(\overline{-\tau}) + d}\right)} &= \overline{(-c(-\overline{\tau}) + d)^k \cdot f(-\overline{\tau})} \\ &= (c\tau + d)^k \cdot f^*(\tau). \end{aligned}$$

Damit folgt das Transformationsverhalten.

Nun zeigen wir noch, dass sich f^* in eine Fourier-Reihe entwickeln lässt. Es ist

$$\begin{aligned} f^*(\tau) &= \overline{f(-\overline{\tau})} \\ &= \overline{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m(-\overline{\tau})}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_f(m)} \cdot e^{\overline{-2\pi i m\overline{\tau}}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_f(m)} \cdot e^{-2\pi(-i)m\tau} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_f(m)} \cdot e^{2\pi i m\tau}. \end{aligned}$$

Damit ist f^* eine ganze Modulform vom Gewicht k.

b) Ergibt sich direkt aus dem Beweis von a).

c) Sei $\tau \in \mathbb{H}$, dann ist

$$\begin{aligned} f^{**}(\tau) &\overset{\text{b)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_{f^*}(m)} \cdot e^{2\pi i m\tau} \\ &\overset{\text{b)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\overline{\alpha_f(m)}} \cdot e^{2\pi i m\tau} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} = f(\tau) \end{aligned}$$

d) Da die Fourier-Entwicklung einer Funktion eindeutig ist, ist $f^* = f$ genau dann, wenn $\alpha_{f^*}(m) = \alpha_f(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, nach b) ist $\alpha_{f^*}(m) = \overline{\alpha_f(m)}$ und es ist $\alpha_f(m) = \overline{\alpha_f(m)}$ genau dann wenn $\alpha_f(m) \in \mathbb{R}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Analog ist $f^* = -f$ genau dann, wenn $\alpha_{f^*}(m) = -\alpha_f(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Mit b) folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $\alpha_f(m)$ imaginär ist für alle $m \in \mathbb{N}_0$. □

(1.6) Korollar
Ist $f \in \mathbb{M}_k$ so sind auch

$$f_{\text{Re}} : \tau \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\big(\operatorname{Re} \alpha_f(m)\big)\, e^{2\pi i m\tau} \Big)$$

und

$$f_{\mathrm{Im}} : \tau \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \left(\left(\mathrm{Im}\, \alpha_f(m)\right) e^{2\pi i m \tau} \right)$$

ganze Modulformen vom Gewicht k. ◇

Beweis
Es ist $f_{\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}\left(f + f^*\right)$. Denn es ist für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\frac{1}{2}(f+f^*)}(m) &\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}\left(\alpha_f(m) + \alpha_{f^*}(m)\right) \\
&\overset{(1.5)}{=} \frac{1}{2}\left(\alpha_f(m) + \overline{\alpha_f(m)}\right) \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}\left(2 \cdot \mathrm{Re}\, \alpha_f(m)\right) \qquad = \alpha_{f_{\mathrm{Re}}}(m).
\end{aligned}$$

Analog ist $f_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2i}\left(f - f^*\right)$.

Da f und f^* Modulformen sind folgt die Behauptung, da $\mathbb{M}_k$ ein Vektorraum ist, vgl. [4](4.1). □

(1.7) Satz

a) Die Menge $\mathbb{M}_k^{\mathbb{R}} := \{f \in \mathbb{M}_k;\, \alpha_f(m) \in \mathbb{R} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0\}$, also die Menge der ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten, ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Jede Basis von $\mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$ ist auch eine Basis von $\mathbb{M}_k$, insbesondere besitzt also $\mathbb{M}_k$ eine Basis aus ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten. ◇

Beweis

a) Seien $f, g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$ und $r \in \mathbb{R}$. Nach 1.1 ist $\alpha_{r \cdot f + g}(m) \in \mathbb{R}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, also $r \cdot f + g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$.

b) Sei J eine Menge so, dass $f_j \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$ für alle $j \in J$ und $F = \{f_j\,;\, j \in J\}$ eine Basis von $\mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$. In einem späteren Vortrag wird gezeigt, dass J endlich ist. Zu zeigen ist, dass F Basis von $\mathbb{M}_k$ ist.

   Lineare Unabhängigkeit:
   Sei $J' \subseteq J$ endlich, $z_j = x_j + i \cdot y_j$ mit $z_j \in \mathbb{C}$ und $x_j = \mathrm{Re}\, z_j$ sowie $y_j = \mathrm{Im}\, z_j$ für alle $j \in J'$. Dann ist

$$0 \equiv \sum_{j \in J'} z_j \cdot f_j$$

äquivalent zu
$$0 = \sum_{j \in J'} z_j \cdot \alpha_{f_j}(m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0,$$
da $\sum\limits_{j \in J'} z_j \cdot f_j \in \mathbb{M}_k$ und somit eine Fourier-Entwicklung besitzt.

Sortiert man nun nach Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$0 = \mathrm{Re}\left(\sum_{j \in J'} z_j \cdot \alpha_{f_j}(m)\right) = \sum_{j \in J'} x_j \cdot \alpha_{f_j}(m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und}$$
$$0 = \mathrm{Im}\left(\sum_{j \in J'} z_j \cdot \alpha_{f_j}(m)\right) = \sum_{j \in J'} y_j \cdot \alpha_{f_j}(m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0,$$

da $\alpha_{f_j}(m) \in \mathbb{R}$. Da F Basis von $\mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$ folgt $x_j = y_j = 0$ für alle $j \in J'$ und somit $z_j = 0$. Damit folgt die lineare Unabhängigkeit.

Erzeugendensystem:
Sei $f \in \mathbb{M}_k$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i \tau} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\alpha_f(m)\right) \cdot e^{2\pi i \tau}\right) + i \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\alpha_f(m)\right) \cdot e^{2\pi i \tau}\right). \end{aligned}$$

Nach 1.6 ist $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\alpha_f(m)\right) \cdot e^{2\pi i \tau} \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$ und $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\alpha_f(m)\right) \cdot e^{2\pi i \tau} \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{R}}$, also existieren Linearkombinationen (mit reellen Skalaren) aus F, die die beiden Funktionen darstellen. Daraus folgt nun, dass eine Linearkombination (mit komplexen Skalaren) aus F existiert, die f darstellen.

Damit folgt die Behauptung. □

(1.8) Bemerkung
Die Aussagen in 1.4–1.7 können mit analogen Beweisen statt für ganze Modulformen auch für Spitzenformen getätigt werden. ◇

§2 Die EISENSTEIN-Reihen

In diesem Abschnitt werden wir nun ein Beispiel für eine ganze Modulform angeben.

Zuerst werden wir uns noch mit der Umsortierung von Reihen beschäftigen.

(2.1) Satz (Umsortierung von Reihen)
Sei $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $a_{s,t} \in \mathbb{C}$ für alle $(s,t) \in A$.

Ist $\sum\limits_{(s,t)\in A} a_{s,t}$ absolut konvergent, so folgt

$$\sum_{(s,t)\in A} a_{s,t} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(s,t)\in A_k} a_{s,t} \quad \text{für } 1 \leq n \leq \infty,$$

wenn $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$ für $k_1 \neq k_2$ und $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A$.

Das gilt auch, falls $a_{s,t} \geq 0$ für alle $(s,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wenn man bei den Reihen den Wert ∞ zulässt. $\diamond$

Beweis
Ohne Einschränkung kann man folgende Dinge annehmen:

1. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, denn sonst setzt man einfach $a_{s,t} = 0$ falls $(s,t) \notin A$.
2. $n = \infty$, denn sonst kann man $A_k = \emptyset$ setzen, falls $k > n$.
3. Zerlegt man die Reihen in Real- und Imaginärteil, so ergibt sich, dass man $a_{s,t} \in \mathbb{R}$ annehmen kann.

Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}, (x,y) \mapsto a_{s,t} \;\text{ falls }\; (x,y) \in [s, s+1) \times [t, t+1).$$

Dann ist

$$\sum_{(s,t)\in A} a_{s,t} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Damit folgt die Behauptung im Falle der absoluten Konvergenz aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz und falls $a_{s,t} \geq 0$ für alle $(s,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. $\square$

(2.2) Definition (EISENSTEIN-Reihen)
Für $k \geq 3, k \in \mathbb{Z}$ sind die EISENSTEIN-Reihen gegeben durch

$$G_k(\tau) := \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n^{-k} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k}.$$

Dabei bedeutet $\sum_{m,n}{}'$, dass über alle Paare (m,n) aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ summiert wird. Die hier angegebene Summationsreihenfolge ist dabei nur eine mögliche, denn in 2.4 werden wir die absolute Konvergenz der Reihe nachweisen, womit eine Umsortierung beim summieren den Wert der Reihe nicht ändert, wie in 2.1 gezeigt wurde. ⋄

Beginnen wir mit der also mit der Konvergenzuntersuchung, dazu benötigen wir zuerst die folgende Proposition.

(2.3) Proposition
Ist $K \subset \mathbb{H}$ kompakt, so existieren $\gamma, \delta > 0$ mit

$$\gamma \cdot |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \delta \cdot |mi + n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und $\tau \in K$. ⋄

Beweis
Wähle zuerst m, n so, dass $|mi + n| = m^2 + n^2 = 1$. Die Menge
$M := \{(m,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | m^2 + n^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist aber kompakt, da M beschränkt und $f : (m,n) \mapsto m^2 + n^2$ stetig, $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und damit $f^{-1}(\{1\}) = M$ abgeschlossen.

Damit ist auch $K \times M$ kompakt und somit nimmt die stetige Funktion

$$(\tau, m, n) \mapsto |m\tau + n|$$

auf dem Kompaktum $K \times M$ ein Minimum γ und ein Maximum δ an.
Ist $m = 0$, so folgt $|m\tau + n| = |n| = 1$ und sonst ist
$|m\tau + n| \geq |\operatorname{Im}(m\tau + n)| = |m| \cdot |\operatorname{Im} \tau| > 0$, da $\tau \in \mathbb{H}$. Damit ist $\gamma > 0$.

Sei nun $m, n \in \mathbb{R}$ beliebig, $\tau \in K$ und wähle nun γ und δ so wie im Fall $(m,n) \in M$ und setze $b := \sqrt{m^2 + n^2}$. Für $m = n = 0$ gilt die behauptete Ungleichung klarerweise und sonst ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma \cdot |mi + n| &= \gamma b \left| \frac{mi}{b} + \frac{n}{b} \right| \\ &\overset{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 = 1}{\leq} b \left| \frac{m\tau}{b} + \frac{n}{b} \right| = |m\tau + n| \\ &\leq \delta b \left| \frac{mi}{b} + \frac{n}{b} \right| \leq \delta \cdot |mi + n| . \end{aligned}$$

□

Hierraus kann man nun die absolute Konvergenz folgern.

(2.4) Lemma (Konvergenz-Lemma)
Für $k \geq 3$, $k \in \mathbb{Z}$ ist G_k absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent. $\diamond$

Beweis
Sei $K \subset \mathbb{H}$ kompakt. Mit 2.3 folgt nun für $\tau \in K$

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n}{}' |m\tau + n|^{-k} &\leq \sum_{m,n}{}' (\gamma|mi + n|)^{-k} \\
&= \gamma^{-k} \sum_{m,n}{}' \sqrt{m^2 + n^2}^{-k} \\
&\leq \gamma^{-k} \sum_{m,n}{}' (m^2 + n^2)^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Da γ^{-k} konstant ist, braucht dieser bei der weiteren Konvergenzuntersuchung nicht mehr betrachtet zu werden.

Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n}{}' (m^2 + n^2)^{-k/2} \\
\overset{(2.1)}{=} &\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (n^2)^{-k/2} + \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (m^2)^{-k/2} + \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (m^2 + n^2)^{-k/2} \\
= &\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{-k} + \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |m|^{-k} + \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (m^2 + n^2)^{-k/2} \\
= &\ 4\zeta(k) + \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (m^2 + n^2)^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Für alle $m, n \in \mathbb{R}^*$ gilt $m^2 + n^2 \geq 2 \cdot |mn| \geq |mn| > 0$,
denn $(|m| - |n|)^2 = |m|^2 - 2|mn| + |n|^2 = m^2 - 2|mn| + n^2 \geq 0$.

Wendet man dies an, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(m^2+n^2)^{-k/2}\\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|m\cdot n|^{-k/2}\\
&=\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|m|^{-k/2}\right)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|n|^{-k/2}\right)\\
&=(2\zeta(k/2))\cdot(2\zeta(k/2))=4\cdot\zeta^2(k/2).
\end{aligned}$$

Damit folgt die absolute Konvergenz auf K und aus dem Weierstrasschen Majorantenkriterium folgt die gleichmäßige Konvergenz auf K. □

(2.5) Satz
Für $k\geq 3, k\in\mathbb{Z}$ ist $G_k:\mathbb{H}\to\mathbb{C}, \tau\mapsto G_k(\tau)$ eine holomorphe Funktion. ◇

Beweis
Es ist $\tau\mapsto(m\tau+n)^{-k}$ für alle $m,n\in\mathbb{Z}$ mit $m\neq 0$ oder $n\neq 0$ holomorph auf $\mathbb{H}$. Aus der kompakt-gleichmäßigen Konvergenz von G_k nach 2.4 folgt damit die Holomorphie von G_k aus dem Satz von Weierstrass (siehe [1] §5 (5.1)). □

Als nächstes untersuchen wir das Transformationsverhalten der Eisenstein-Reihen.

(2.6) Lemma (Transformations-Lemma)
Für $k\geq 3, k\in\mathbb{Z}$ und $M\in\Gamma$ gilt $G_k|_kM=G_k$, also

$$G_k(M\tau)=(c\tau+d)^k\cdot G_k(\tau)$$

für alle $\tau\in\mathbb{H}$. ◇

Beweis
Sei $M\in\Gamma$, dann ist M insbesondere invertierbar und damit ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}^{1\times 2}\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{Z}^{1\times 2}\setminus\{(0,0)\}\ ,\ z\mapsto z\cdot M$$

bijektiv, denn die Umkehrabbildung ist gegeben durch $z\mapsto z\cdot M^{-1}$.

Es ist weiter

$$\begin{aligned}
G_k(M\tau) &= \sum_{m,n}{}' (m \cdot M\tau + n)^{-k} \\
&= \sum_{m,n}{}' \left(m \cdot \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + n \right)^{-k} \\
&= \sum_{m,n}{}' (c\tau + d)^k \cdot (m \cdot (a\tau + b) + (c\tau + d) \cdot n)^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k \cdot \sum_{m,n}{}' ((m \cdot a + c \cdot n)\tau + (m \cdot b + d \cdot n))^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k \cdot \sum_{m',n'}{}' (m'\tau + n')^{-k} \\
&= (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau),
\end{aligned}$$

wenn man $m' := m \cdot a + n \cdot c$ und $n' := m \cdot a + n \cdot c$ setzt, dann ist $(m', n') = (m, n) \cdot M$. Also ist dies lediglich eine Umordnung der EISENSTEIN-Reihe, die Aufgrund der absoluten Konvergenz gegen den gleichen Wert konvergiert. □

Aus dem letzten Vortrag ist bekannt, dass $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für k ungerade, und so ergibt sich auch hier:

(2.7) Korollar

Es ist $G_k \equiv 0$ für $k \geq 3$ ungerade. ◇

Beweis

Wendet man das Transformations-Lemma 2.6 auf $M = -E$ an, so ergibt sich für alle $\tau \in \mathbb{H}$

$$G_k(\tau) = G_k(-E\tau) = (-1)^k \cdot G_k(\tau) = -G_k(\tau)$$

für $k \geq 3$ ungerade. Damit ist $G_k(\tau) = 0$. □

Damit ist schon gezeigt, dass G_k eine ganze Modulform ist für $k \geq 3$ ungerade.

Für eine möglichst einfache Beschreibung der FOURIER-Reihe benötigen wir noch eine Hilfsfunktion.

(2.8) Bezeichnung

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $\sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\sigma_k(m) := \sum_{d|m} d^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es wird hier nur über die positiven Teiler von m summiert. ◇

(2.9) Proposition

a) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 2$ ist

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} \cdot e^{2\pi i r\tau} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\tau \in \mathbb{H}$ ist damit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} \cdot e^{2\pi i r m\tau}.$$

Alle diese Reihen konvergieren absolut und lokal gleichmäßig auf $\mathbb{H}$. ◇

Beweis

a) Wir führen den Beweis über eine Induktion nach k.

(Induktionsanfang)

Aus der Funktionentheorie I [1] übernehmen wir Korollar (1.13) aus Kapitel 8, welches uns

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau-n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^2}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ liefert, wobei die Reihe auf $\mathbb{H}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}}\right)^2 \\
&= (-2\pi i)^2 \cdot e^{2\pi i\tau} \frac{1}{(1-e^{2\pi i\tau})^2} \\
&= (-2\pi i)^2 \cdot e^{2\pi i\tau} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \cdot e^{2\pi i r\tau} \\
&= (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \cdot e^{2\pi i(r+1)\tau} \\
&= (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot e^{2\pi i r\tau}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die aus der Analysis I bekannte Gleichung

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

angewendet auf $z = e^{2\pi i\tau}$, denn für $\tau \in \mathbb{H}$ ist $|e^{2\pi i\tau}| = e^{\mathrm{Re}(2\pi i\tau)} \leq e^0 = 1$, denn $\mathrm{Re}(2\pi i\tau) = -\mathrm{Im}(2\pi\tau) \leq 0$. Als FOURIER-Reihe ist die Reihe absolut und lokal gleichmäßig konvergent, damit ist die Behauptung für $k = 2$ bewiesen.

(Induktionsvorraussetzung)
Die Behauptung gilt für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

(Induktionsschritt)
$k \to k+1$
Für dieses $k \in \mathbb{Z}$ gilt also

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} \cdot e^{2\pi i r\tau} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Beide Reihen konvergieren lokal gleichmäßig auf $\mathbb{H}$, damit kann Komponentenweise abgeleitet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{d}{d\tau}(\tau+n)^{-k} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-k)\cdot(\tau+n)^{-k-1} \\
&= (-k)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\cdot(\tau+n)^{-(k+1)}
\end{aligned}$$

für die linke Seite. Aus dem Satz von Weierstrass folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz und eine Majorante ist gegeben durch

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k}.$$

Damit folgt auch die absolute Konvergenz.

Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1}\cdot e^{2\pi i r\tau}\right)\\
&= \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(e^{2\pi i r\tau}\right)\\
&= \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1}\cdot 2\pi i r\cdot e^{2\pi i r\tau}\\
&= \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot 2\pi i\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k}\cdot e^{2\pi i r\tau}.
\end{aligned}$$

Wobei diese Reihe als FOURIER-Reihe wieder absolut und lokal gleichmäßig konvergiert.

Es ergibt sich aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung

$$(-k)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\cdot(\tau+n)^{-(k+1)} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot 2\pi i\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k}\cdot e^{2\pi i r\tau},$$

woraus folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-(k+1)} = \frac{(-2\pi i)^{k+1}}{k!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r^{k}\cdot e^{2\pi i r\tau},$$

also die Behauptung für $k+1$.

b) Für $\tau\in\mathbb{H}$ und $m\in\mathbb{N}$ ist auch $m\tau\in\mathbb{H}$, damit kann man a) anwenden. □

Mit diesen Mitteln können wir nun G_k auch in eine FOURIER-Reihe entwickeln.

(2.10) Satz

Sei $k\geq 4$ gerade, dann ist für alle $\tau\in\mathbb{H}$

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\cdot\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)\cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

◇

Beweis

Für alle $\tau\in\mathbb{H}$ ist

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= {\sum_{m,n}}'(m\tau+n)^{-k}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{-k} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k}.
\end{aligned}$$

Da k gerade ist, ergibt sich weiter

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{-k} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = 2\zeta(k)$$

und fasst man weiter die beiden Paare (m,n) und $(-m,-n)$ zusammen, folgt

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k} = 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k},$$

da $(m\tau+n)^{-k} = (-m\tau-n)^{-k}$.

Es ist also

$$\begin{aligned} G_k(\tau) = {} & 2\zeta(k) + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k} \\ \overset{(2.9)}{=} {} & 2\zeta(k) + 2\cdot\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1}\cdot e^{2\pi i r s\tau} \\ = {} & 2\zeta(k) + 2\cdot\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{(r,s)\\ r\cdot s=m}} r^{k-1}\cdot e^{2\pi i m\tau}, \end{aligned}$$

wenn man im letzten Schritt nach 2.1 alle Paare $(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zusammenfasst, für die $r\cdot s$ gleich sind. Dabei ist gerade

$$\sum_{\substack{(r,s)\\ r\cdot s=m}} r^{k-1} = \sum_{r\mid m} r^{k-1} = \sigma_{k-1}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

— *Die normierte EISENSTEIN-Reihe* —

Um im weiteren möglichst einfach Darstellungen zu erhalten, ist es nützlich die Eisenstein-Reihe zu normieren.

(2.11) Bezeichnung (normierte EISENSTEIN-Reihe)
Die normierte Eisenstein-Reihe G_k^* ist für gerades $k\geq 4$ gegeben durch

$$G_k^* := \frac{1}{2\zeta(k)}\cdot G_k.$$

◇

Es gibt einen überraschenden Zusammenhang zwischen den Paaren teilerfremder Zahlen und den EISENSTEIN-Reihen.

(2.12) Lemma
Für $k \geq 4$ gerade und $\tau \in \mathbb{H}$ ist

$$G_k^*(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k}.$$

◇

Beweis
Jedes Paar $(r,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ besitzt einen eindeutigen positiven größten gemeinsamen Teiler $t \in \mathbb{N}$ und die Darstellung $(r,q) = (t \cdot m, t \cdot n)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. Es folgt also mit 2.1

$$\begin{aligned}
G_k^*(\tau) &= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k(\tau) \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \sum_{r,q}{}' (r\tau + q)^{-k} \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\mathrm{ggT}(r,q)=t} (r\tau + q)^{-k} \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (tm\tau + tn)^{-k} \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(t^{-k} \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k} \right) \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \left(\sum_{t=1}^{\infty} t^{-k} \right) \cdot \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k} \\
&= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \zeta(k) \cdot \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k}.
\end{aligned}$$

□

Für eine weitere Darstellung verwenden wir eine Untergruppe von Γ.

(2.13) Bezeichnung
Es sei

$$\begin{aligned}\Gamma_\infty := \{\pm T^n;\, n \in \mathbb{Z}\} &= \{M \in \Gamma;\, c = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix};\, n \in \mathbb{Z} \right\}.\end{aligned}$$

◇

Nun bedeutet „$M : \Gamma_\infty \backslash \Gamma$“, dass M ein Vertretersystem $\mathcal{V}$ der Rechtsnebenklassen von Γ nach Γ_∞ durchläut, also

$$\bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma_\infty M = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_\infty M \neq \Gamma_\infty N \quad \text{für} \quad M, N \in \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad M \neq N.$$

Die Existenz eines solchen Vertretersystems ergibt sich daraus, dass Γ_∞ eine Gruppe bezüglich Multiplikation ist, nämlich eine Untergruppe von Γ. Lässt man diese nun auf Γ durch

$$\Gamma_\infty \times \Gamma \to \Gamma \,,\, (G, M) \mapsto G \cdot M$$

operieren, so sind die Bahnen dieser Operation die Äquivalenzklassen, aus denen jeweils ein Element zu $\mathcal{V}$ gehört, dadurch ist die Bedingung $\Gamma_\infty M \neq \Gamma_\infty N$ für $M \neq N$ äquivalent zu $\Gamma_\infty M \cap \Gamma_\infty N = \emptyset$ für $M \neq N$.

Der Zusammenhang zu den Eisenstein-Reihen wird in folgendem Satz ersichtlich.

(2.14) Lemma
Es ist für jedes $M : \Gamma_\infty \backslash \Gamma$ und gerades $k \geq 4$

$$G_k^*(\tau) = \sum_{M:\Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k M(\tau) = \sum_{M:\Gamma_\infty \backslash \Gamma} (c\tau + d)^{-k}.$$

◇

Beweis
Mit dem aus dem zweiten Vortrag bekannten Ergänzungs-Lemma (1.3) folgt, dass in einer Äquivalenzklasse alle $M \in \Gamma$ liegen, die die Form

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \pm c & \pm d \end{pmatrix}$$

haben. Wobei c und d teilerfremd sind.

Für jedes beliebige M in dieser Bahn gilt dann

$$1|_k M(\tau) = (\pm c\tau \pm d)^{-k} = (c\tau + d)^{-k}.$$

Betrachtet man nun

$$\sum_{\mathrm{ggT}(c,d)=1} (c\tau + d)^{-k},$$

so wurde aus jeder Äquivalenzklasse über 2 Vertreter summiert. Damit ist

$$\sum_{M:\Gamma_\infty \backslash \Gamma} (c\tau + d)^{-k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathrm{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k} \overset{(2.12)}{=} G_k^*(\tau).$$

□

Für den nächsten Satz benötigen wir die aus der Funktionentheorie I [1], Kapitel 6 (4.3) bekannten BERNOULLI-Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die n-te BERNOULLI-Zahl mit B_n und es gilt $2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \cdot B_k$ für gerades k, vgl. [1] §6 (4.5).

(2.15) Satz
Für gerades $k \geq 4$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$G_k^*(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

◇

Beweis
Es ist

$$\begin{aligned}
G_k^*(\tau) &= \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k(\tau) \\
&\overset{(2.10)}{=} \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot \left(2\zeta(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \right) \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)! \cdot 2\zeta(k)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k \cdot k!}{-(k-1)! \cdot (2\pi i)^k \cdot B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \\
&= 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.
\end{aligned}$$

□

Mit $B_4 = -\frac{1}{30}$ und somit $\frac{8}{B_4} = -240$ sowie $B_6 = \frac{1}{42}$ und $\frac{10}{B_6} = 504$ folgt

(2.16) Beispiel
a) $G_4^*(\tau) = 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$

b) $G_6^*(\tau) = 1 - 504 \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}$. ◇

Damit können wir nachweisen, dass die EISENSTEIN-Reihen ganze Modulformen sind.

(2.17) Satz
Für gerades $k \geq 4$ gilt:

a) $G_k \in \mathbb{M}_k$.

b) $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k \oplus \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k$. ◇

Beweis

a) Aus 2.5 folgt die Holomorphie von G_k und damit (M.1′).
(M.2′) folgt aus dem Transformations-Lemma 2.6.
In 2.10 ist die FOURIER-Entwicklung von G_k gegeben, aus der (M.3″) folgt.

b) Nach 2.10 ist $\alpha_{G_k}(0) = 2\zeta(k)$, damit ergibt sich

$$\alpha_{G_k^*}(0) = \frac{\alpha_{G_k}(0)}{2\zeta(k)} = \frac{2\zeta(k)}{2\zeta(k)} = 1.$$

Daraus folgt $G_k^* \notin \mathbb{S}_k$ und somit $\mathbb{C} \cdot G_k \cap \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \cap \mathbb{S}_k = \{0\}$.

Sei nun $f \in \mathbb{M}_k$. Setze nun $g := f - \alpha_f(0) \cdot G_k^*$. Dann ist g eine Spitzenform und damit auch eine Modulform vom Gewicht k, denn mit 1.1 folgt

$$\begin{aligned}\alpha_g(0) &= \alpha_{(f-\alpha_f(0)\cdot G_k^*)}(0)\\ &= \alpha_f(0) - \alpha_{(\alpha_f(0)\cdot G_k^*)}(0)\\ &= \alpha_f(0) - \alpha_f(0) \cdot \alpha_{G_k^*}(0) = 0,\end{aligned}$$

also ist $f = g + \alpha_f(0) \cdot G_k^*$ und damit $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k + \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* + \mathbb{S}_k$.
Daraus folgt die Behauptung. □

Teil a) des Satzes ist auch für alle $k \geq 3$ richtig, Teil b) bleibt richtig, falls man die G_k^* auch für ungerades $k \geq 3$ definiert.

Nun können wir auch das Wachstumsverhalten der FOURIER-Koeffizienten einer allgemeinen ganzen Modulform beschreiben.

(2.18) Korollar
Für $m \in \mathbb{N}$, gerades $k \geq 4$ und $f \in \mathbb{M}_k$ gilt:

a) $\alpha_f(m) = -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) + \mathcal{O}(m^{k/2})$.

b) $\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k-1})$.
Für $f \notin \mathbb{S}_k$ kann die Abschätzung nicht verbessert werden. ◇

Beweis

a) Aus dem Beweis von 2.17 ergibt sich, dass man f darstellen kann als

$$f = \alpha_f(0) \cdot G_k^* + g \quad \text{mit einer Spitzenform } g.$$

Aus 1.1 folgt $\alpha_f(m) = \alpha_f(0) \cdot \alpha_{G_k^*}(m) + \alpha_g(m)$. Wendet man nun 2.15 an, ergibt sich $\alpha_{G_k^*}(m) = -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}$ und aus 1.2 kann man $\alpha_g(m) = \mathcal{O}(m^{k/2})$ entnehmen. Es folgt die Behauptung.

b) Für alle $r > 1$ gilt, da für $m \neq 0$ gilt $d|m$ genau dann wenn $\frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ und somit auch $\frac{m}{d}|m$ folgt

$$\begin{aligned} m^r \leq \sigma_r(m) &= \sum_{d|m} d^r \\ &= \sum_{d|m} \frac{m}{d}^r = m^r \sum_{d|m} d^{-r} \leq m^r \cdot \zeta(r). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1} \right| \leq \left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \zeta(k-1) \right| \cdot m^{k-1}.$$

Da der Faktor von m^{k-1} nicht von m abhängt, ergibt sich

$$-\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1} = \mathcal{O}(m^{k-1}).$$

Aus $k - 1 \geq \frac{k}{2}$ folgt somit auch $\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k-1})$.

Sei nun $f \notin \mathbb{S}_k$.
Nach a) existiert ein $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |\alpha_f(m)| &\geq \left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \right| \cdot m^{k-1} - C \cdot m^{k/2} \\ &= m^{k-1} \cdot \left(\left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \right| - C \cdot m^{\frac{-k+2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Da $\frac{-k+2}{2} < 0$ folgt

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \right| - C \cdot m^{\frac{-k+2}{2}} \\ &= \left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \right| > 0.\end{aligned}$$

Somit existiert ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m > N$ gilt

$$\left| -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \right| - C \cdot m^{\frac{-k+2}{2}} \geq \epsilon$$

und damit auch $|\alpha_f(m)| \geq \epsilon \cdot m^{k-1}$. Damit kann die Abschätzung nicht verbessert werden. □

Bei den Eisenstein-Reihen treten gewisse „Zwangsnullstellen" auf.

(2.19) Lemma (Nullstellen-Lemma)

a) Es gilt $G_k(i) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod 4$.

b) Für $\rho := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ist $G_k(\rho) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod 6$. ◇

Beweis

a) Setze $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Dann ist $Mi = \frac{-1}{i} = i$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} G_k(i) &= G_k(Mi) \\ &= i^{-k} \cdot G_k(i). \end{aligned}$$

Da $i^{-k} \neq 1$ für $k \not\equiv 0 \pmod 4$ folgt $G_k(i) = 0$.

b) Es ist $\rho^2 = \rho - 1$.

Setze nun $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Dann ist $M\rho = \frac{\rho-1}{\rho} = \frac{\rho^2}{\rho} = \rho$. Damit ist

$$\begin{aligned} G_k(\rho) &= G_k(M\rho) \\ &= \rho^{-k} G_k(\rho). \end{aligned}$$

Da wieder $\rho^{-k} \neq 1$ für $k \not\equiv 0 \pmod 6$ folgt $G_k(\rho) = 0$. □

Speziell gilt also $G_6(i) = 0$ und $G_4(\rho) = 0$.

Da im Beweis nur das Transformationsverhalten einer allgemeinen ganzen Modulform genutzt wurde, kann man den Satz auch verschärfen zu

(2.20) Korollar
Ist $f \in \mathbb{M}_k$, so folgt

a) $f(i) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod 4$.

b) $f(\rho) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod 6$. ◇

§ 3 Die Diskriminante

In diesem Abschnitt wollen wir auch noch eine von der Nullfunktion verschiede Spitzenform angeben und somit auch die Existenz einer solchen zeigen.

(3.1) Definition (Diskriminante)
Die Diskriminante Δ ist gegeben durch

$$\Delta := (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2.$$ ◇

(3.2) Satz
Für alle $M \in \Gamma$ und $\tau \in \mathbb{H}$ ist

$$\Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau).$$ ◇

Beweis
Sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma$. Dann ist

$$\Delta(M\tau) = (60G_4(M\tau))^3 - 27(140G_6(M\tau))^2.$$

Wendet man hierrauf nun das Transformations-Lemma 2.6 an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&(60G_4(M\tau))^3 - 27(140G_6(M\tau))^2 \\
&= (60 \cdot (c\tau + d)^4 \cdot G_4(\tau))^3 - 27(140 \cdot (c\tau + d)^6 \cdot G_6(\tau))^2 \\
&= (c\tau + d)^{12} \cdot (60G_4(\tau))^3 - (c\tau + d)^{12} \cdot 27(140G_6(\tau))^2 \\
&= (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau).
\end{aligned}$$ □

(3.3) Hilfssatz
Es ist $d^5 \equiv d^3 \pmod{12}$ für alle $d \in \mathbb{Z}$ und somit insbesondere
$\sigma_5(m) \equiv \sigma_3(m) \pmod{12}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. ◇

Beweis
Betrachte $d^5 - d^3 = d^3 \cdot (d^2 - 1) = d^2 \cdot (d-1) \cdot (d+1) \cdot d$.
Ist nun d gerade, so folgt $4|d^2$ und somit $4|d^5 - d^3$.
Falls d ungerade, so gilt $2|d-1$ und $2|d+1$ woraus $4|d^5 - d^3$ folgt.
Ebenso teilt 3 entweder $d-1$ oder d oder $d+1$ und es folgt $3|d^5 - d^3$.
Da 4 und 3 teilerfremd gilt also auch $3 \cdot 4 = 12|d^5 - d^3$.
Das ist äquivalent zu $d^5 - d^3 \equiv 0 \pmod{12}$ und somit $d^5 \equiv d^3 \pmod{12}$.

Es ergibt sich nun für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma_3(m) = \sum_{d|m} d^3 \equiv \sum_{d|m} d^5 = \sigma_5(m) \pmod{12}$$

aufgrund der Ringeigenschaft von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. □

Auch bei der Diskriminante bekommt man einige Eigenschaften schneller, wenn man eine normierte Version betrachtet.

(3.4) Definition (normierte Diskriminante)
Die normierte Diskriminante Δ^* ist für $\tau \in \mathbb{H}$ gegeben durch

$$\Delta^*(\tau) := (2\pi)^{-12}\Delta(\tau).$$ ◇

Nun wollen wir einen einfachen Zusammenhang zwischen der normierten Diskriminante und der normierten Eisenstein-Reihe herstellen.

(3.5) Satz
Es gilt

$$\Delta^* = \frac{1}{1728}\left((G_4^*)^3 - (G_6^*)^2\right).$$ ◇

Beweis
Wendet man die Eulersche Formel $2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \cdot B_k$ auf $k = 4$ und $k = 6$ an, ergibt

sich für alle $\tau \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
&\Delta^*(\tau)\\
&= (2\pi)^{-12}\Delta(\tau)\\
&= (2\pi)^{-12}\left((60G_4(\tau))^3 - 27(140G_6(\tau))^2\right)\\
&= (2\pi)^{-12}\left((60\cdot 2\zeta(4)\cdot G_4^*(\tau))^3 - 27(140\cdot 2\zeta(6)\cdot G_6^*(\tau))^2\right)\\
&= (2\pi)^{-12}\left(\left(60\cdot\left(-\frac{(2\pi i)^4}{4!}\cdot B_4\right)\cdot G_4^*(\tau)\right)^3 - 27\left(140\cdot\left(-\frac{(2\pi i)^6}{6!}\cdot B_6\right)\cdot G_6^*(\tau)\right)^2\right)\\
&= \left(\left(60\cdot\left(-\frac{-1}{4!\cdot 30}\right)\cdot G_4^*(\tau)\right)^3 - 27\left(140\cdot\left(-\frac{-1}{6!\cdot 42}\right)\cdot G_6^*(\tau)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{1728}\left((G_4^*(\tau))^3 - (G_6^*(\tau))^2\right).
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Satz kann man nun eine Fourier-Entwicklung der normierten Diskriminante angeben.

(3.6) Satz
Es ist

$$\Delta^*(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m)\cdot e^{2\pi i m\tau},$$

wobei $\tau(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist. ◇

Man beachte hierbei, dass die Bezeichnung $\tau(m)$ für die Koeffizienten historische Gründe hat und $\tau(m)$ unabhängig von τ ist.

Beweis
Nach 2.16 sind die Fourier-Entwicklungen von G_4^* und G_6^* egegeben durch

$$G_4^*(\tau) = 1 + 240\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_3(m)\cdot e^{2\pi i m\tau} \quad \text{und}$$

$$G_6^*(\tau) = 1 - 504\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_5(m)\cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Setzt man nun im weiteren

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \quad \text{und}$$

$$B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

so ist

$$\begin{aligned}
\Delta^* &= \frac{1}{1728}\Big((1+240A)^3 - ((1-540B)^2\Big) \\
&= \frac{1}{1728}\Big(1 + 3\cdot 240A + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 - 1 + 2\cdot 540B - (540B^2)\Big) \\
&= \frac{1}{1728}\Big(3\cdot 240A + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 + 2\cdot 540B - (540B^2)\Big).
\end{aligned}$$

Bildet man das Cauchy-Produkt von A^2, A^3 und B^2, so ergibt sich, dass alle drei Fourier-Reihen sind und für den n-ten Koeffizienten gilt

$$\alpha_{A^2}(n) = \sum_{\substack{(r,s)\\ r+s=n}} \sigma_3(r)\cdot\sigma_3(s) \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_{A^3}(n) = \sum_{\substack{(r,s,t)\\ r+s+t=n}} \sigma_3(r)\cdot\sigma_3(s)\cdot\sigma_3(t) \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_{B^2}(n) = \sum_{\substack{(r,s)\\ r+s=n}} \sigma_5(r)\cdot\sigma_5(s) \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei wird über alle solche Tupel (r,s) aus $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ beziehungsweise (r,s,t) aus $\mathbb{N}^3$ summiert. Daraus folgt nun $\tau(0) = 0$. Weiter ist $1728 = 12^3$. Damit ist für $m \in \mathbb{N}$ die Aussage $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ äquivalent zu der Aussage

$$\alpha_{(3\cdot 240A + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 + 2\cdot 540B - (540B^2))}(m) \equiv 0 \pmod{12^3}.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
&\alpha_{(3\cdot 240A + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 + 2\cdot 540B - (540B^2))}(m) \\
\overset{(1.1)}{=}\; & 3\cdot 240\alpha_A(m) + 3\cdot 240^2\alpha_{A^2}(m) + 240^3\alpha_{A^3}(m) + 2\cdot 540\alpha_B(m) - 540^2\alpha_{B^2}(m) \\
\equiv\; & 12^2\cdot(5\alpha_A(m) + 0\alpha_{A^2}(m) + 0\alpha_{A^3}(m) + 7\alpha_B(m) - 0\alpha_{B^2}(m)) \\
=\; & 12^2\cdot(5\alpha_A(m) + 7\alpha_B(m)) \pmod{12^3}.
\end{aligned}$$

Mit 3.3 folgt, dass $\alpha_A(m) \equiv \alpha_B(m) \pmod{12}$ und somit
$12^2\alpha_A(m) \equiv 12^2\alpha_B(m) \pmod{12^3}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&12^2 \cdot (5\alpha_A(m) + 7\alpha_B(m)) \\
\equiv\ &12^2 \cdot (5\alpha_A(m) + 7\alpha_A(m)) \\
=\ &12^3\alpha_A(m) \\
\equiv\ &0 \pmod{12^3}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Damit ergibt sich sofort die FOURIER-Entwicklung der Diskriminante.

(3.7) Korollar
Es ist

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

◇

Nun haben wir alles benötigte, um zu zeigen, dass die Diskriminante eine Spitzenform ist.

(3.8) Satz
Es gilt $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$ und damit auch $\Delta \in \mathbb{M}_{12}$. ◇

Beweis
Da die holomorphen Funktionen eine $\mathbb{C} - Algebra$ bilden und G_4 und G_6 holomorph sind, folgt die Holomorphie von Δ direkt aus der Definition.
Nach 3.2 ist

$$(\Delta|_{12}M)(\tau) = (c\tau + d)^{-12} \cdot \Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{-12} \cdot (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) = \Delta(\tau).$$

Eine FOURIER-Entwicklung von Δ ist in 3.7 gegeben, wobei $\alpha_\Delta(0) = 0$ ist.
Damit ist $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$. □

§ 4 Literaturverzeichnis

[1] *Funktionentheorie I*, Skript zur Vorlesung von *Aloys Krieg*

[2] *Elliptische Funktionen und Modulformen*, 2. Auflage, Springer Verlag von *Max Koecher* und *Aloys Krieg*

[3] *Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe* von *Kerstin Küpper*

[4] *Modulformen* von *Dominik Hohmann*

[5] *Die obere Halbebene* von *Tom Rihm*