Die Gewichtsformel

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 08.07.09

Chantal Höller

Ziel dieser Kapitel ist der Beweis der Gewichtsformel. Ist ihr Gewicht bekannt, lässt sich dann genaueres zu den Null- und Polstellen der Modulform sagen. Zunächst gilt es jedoch, näheres über Modulformen zu erfahren. Im weiteren Verlauf werden die Bezeichnungen aus den vorherigen Vorträgen [2] bis [7] und dem zugrundeliegenden Buch [1] verwendet.

§1 Ordnungen von Modulformen

In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie man Ordnungen von Null- bzw. Polstellen in Beziehung setzen kann. Dies wird im späteren Beweis der Gewichtsformel höheren Aufwand ersparen.

— *Modulformen und ihr Gewicht* —

Betrachtet wird hier die Modulform $f \not\equiv 0$ vom Gewicht k mit k gerade (da sonst $f \equiv 0$ folgt (wie bereits in [7] gezeigt wurde)), für die gilt nach [6] (3.1) und (2.9):

(1.1) Erinnerung (Modulform vom Gewicht k)
Ist f eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(M1) f ist meromorph

(M2) $f|_k M = f$

(M3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol

wobei dies äquivalent ist zu

(*M3) f besitzt die Fourier-Entwicklung

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m \tau} \tag{1}$$

(die bei geeignetem $\gamma > 0$, $Im(\tau) \geq \gamma$ absolut und kompakt-gleichmäßig konvergiert) mit den Koeffizienten

$$\alpha_f(m) = \int_{\omega}^{\omega+1} f(\tau) e^{-2\pi i m \tau} d\tau. \tag{2}$$

dann heißt sie Modulform vom Gewicht k. ◇

Aus dieser Definition folgt dann $f(\tau) = f(\tau + 1)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ nach [6].

Wie in [6] schon gezeigt wurde, bildet die Menge der Modulformen vom Gewicht k einen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{V}_k$.

Wegen (M1) existiert für f dann eine Laurent-Entwicklung

$$f(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma(m)(\tau - \omega)^m \tag{3}$$

um $\omega \in \mathbb{H}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(r) \neq 0$ sowie $\gamma(n) = 0$ für alle $n < r$ mit endlichem Hauptteil und einem auf einer punktierten Umgebung von ω absolut und kompakt-gleichmäßig konvergentem Nebenteil. Dieses r wird Ordnung der Modulform f an der Stelle ω genannt und es gilt

- ω ist Nullstelle von f, falls $r > 0$ *und*
- ω ist Polstelle von f, falls $r < 0$.

— *Ordnungen an transformierten Stellen* —

Für den späteren Hauptsatz dieser Arbeit, den Beweis der Gewichtsformel, wird folgender Hilfssatz benötigt:

(1.2) Lemma
Ist f meromorph auf $\mathbb{H}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{H}$ und $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$:

$$\mathrm{ord}_z\, f|_k M = \mathrm{ord}_{Mz}\, f$$

. ◇

Beweis
Nach der Definition des Strichoperators gilt bei der Anwendung auf die Funktion f nach [6] (1.1)

$$(f|_k M)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(M\tau). \tag{*}$$

Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig und $\omega := Mz$ mit $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Da f eine meromorphe Funktion mit Polen bzw. Nullstellen in ω der Ordnung $r \in \mathbb{Z}$ ist, lässt sie sich nach [0](III(3.8)) mit Hilfe einer Funktion g, die holomorph auf einer Umgebung von ω ist, ausdrücken:

$$f(\tau) = (\tau - Mz)^r g(\tau) \text{ mit } g(Mz) \neq 0. \tag{**}$$

Sei nun eine Umgebung U von z so klein gewählt, dass MU ganz in der Umgebung von ω liegt. Dies ist möglich, da $\tau \mapsto M\tau$ stetig auf $\mathbb{H}$ ist. Damit ist $g(M\tau)$ auch holomorph auf U. Also lässt sich in (*) $f(M\tau)$ durch $(M\tau - Mz)^r g(M\tau)$ ersetzen und daraus folgt

$$(f|_k M)(\tau) = (c\tau + d)^{-k}(M\tau - Mz)^r g(M\tau) \text{ für alle } \tau \in U\backslash\{z\}$$

mit $g(Mz) \neq 0$. Durch den Zusammenhang $(M\tau' - M\tau) = \frac{det(M)}{(c\tau'+d)(c\tau+d)}(\tau' - \tau)$, der aus [2] bekannt ist und weil $M \in \Gamma$ impliziert, dass $\det(M) = 1$ ist, sieht man leicht, dass

$$(f|_k M)(\tau) = (c\tau + d)^{-k}(c\tau + d)^{-r}(cz + d)^{-r}(\tau - z)^r g(M\tau)$$

gilt.
Man benennt $h(\tau) := (c\tau + d)^{-k-r}(cz + d)^{-r} g(M\tau)$. Als Komposition von Funktionen, die auf einer Umgebung von z holomorph sind ist h auch holomorph auf einer Umgebung von $z \in \mathbb{H}$ und man sieht $h(z) \neq 0$ durch Einsetzen. Weil man nun

$$(f|_k M)(\tau) = (\tau - z)^r h(\tau)$$

schreiben kann, folgt, dass $\mathrm{ord}_z\, f|_k M = r$.
Nach (**) gilt $\mathrm{ord}_{Mz}\, f = r$ und damit

$$\mathrm{ord}_z\, f|_k M = \mathrm{ord}_{Mz}\, f.$$

□

(1.3) Bemerkung
Nun sei die meromorphe Funktion aus Lemma 1.2 eine Modulform vom Gewicht k. Daraus folgt der Spezialfall mit

$$\mathrm{ord}_z\, f = \mathrm{ord}_{Mz}\, f$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma = \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, weil aus Erinnerung 1.1 (M1) mit Lemma 1.2 folgt, dass

$$\mathrm{ord}_z\, f|_k M = \mathrm{ord}_z\, f = \mathrm{ord}_{Mz}\, f.$$

Nach [3] erhält man dadurch insbesondere:

Ist $\operatorname{ord}_z f$ bekannt für alle $z \in \mathbb{F}$, so auch für alle $z \in \mathbb{H}$. $\diamond$

Nun sei $\omega \in \mathbb{F}^*$ mit $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ und aus [6](2.8) übernehmen wir $\operatorname{ord}_\infty f := m_0$, wobei m_0 minimal gewählt ist mit $\alpha_f(m_0) \neq 0$ (vgl. (1.1)).
Analog zu der Ordnung der Fixgruppe von $\omega \in \mathbb{F}$, also $\Gamma_\omega = \{M \in \Gamma : M\omega = \omega\}$ definiert man die Ordnung von $\omega \in \mathbb{F}^*$.
Weil

$$\begin{aligned}
&\Gamma_i = \{\pm E; \pm J\};\ \operatorname{ord}\Gamma_i = 4\\
&\Gamma_\rho = \{\pm E; \pm U; \pm U^2\};\ \operatorname{ord}\Gamma_\rho = 6\\
&\Gamma_\omega = \{\pm E\};\ \operatorname{ord}\Gamma_\omega = 2 \text{ für alle } \omega \in \mathbb{F}^* \text{ mit } \omega \neq i, \rho
\end{aligned}$$

gilt, folgt

$$\operatorname{ord}(\omega) := \begin{cases} 4/2 = 2 & \text{für } \omega = i \\ 6/2 = 3 & \text{für } \omega = \rho \\ 2/2 = 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

§2 Die Gewichtsformel

In diesem Hauptabschnitt des Vortrags wird die Gewichtsformel bewiesen. Die Idee dafür besteht daraus, das Null- und Polstellen zählende Integral der Modulform f vom Gewicht k über einem leicht veränderten Weg des Randes des exakten Fundamentalbereichs zu berechnen. Dazu werden jedoch noch viele kleine Hilfsmittel benötigt, die aus der Funktionentheorie bekannt sind oder sich aus dieser herleiten lassen.

(2.1) Satz (Die Gewichtsformel)
Für eine Modulform $f \neq 0$ vom Gewicht k gilt:

$$\sum_{\omega \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord}\omega} \cdot \operatorname{ord}_\omega f = \frac{k}{12}. \qquad \diamond$$

Dieser Satz soll nun im restlichen Teil des Kapitels bewiesen werden.

— *Folgerungen und Erinnerungen aus der Funktionentheorie* —

Für die Verwendung des Null- und Polstellen zählende Integral ist folgendes Lemma sehr nützlich:

(2.2) Lemma

Für das Residuum der logarithmischen Ableitung $F = \frac{f'}{f}$ mit einer auf $\mathbb{H}$ meromorphen Funktion f folgt

$$\mathrm{res}_\omega F = \mathrm{ord}_\omega f \text{ für alle } \omega \in \mathbb{H},$$

wobei ω auch Null- oder Polstelle von f sein kann. ◇

Beweis

$F(\tau) = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$ ist meromorph auf $\mathbb{H}$. Bis auf die Null- bzw. Polstellen von f ist F also holomorph auf $\mathbb{H}$. Für jede Null- bzw. Polstelle $\omega \in \mathbb{H}$ von f kann man nun den Ausdruck $f(\tau) = (\tau - \omega)^{\mathrm{ord}_\omega f} \cdot g(\tau)$ verwenden, wobei g wieder holomorph in einer Umgebung von ω ist und $g(\omega) \neq 0$ gilt nach [0](III(3.8)). Dann folgt auf dieser Umgebung

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= \frac{(\tau-\omega)^{(\mathrm{ord}_\omega f)-1} \cdot \mathrm{ord}_\omega f \cdot g(\tau) + (\tau-\omega)^{\mathrm{ord}_\omega f} \cdot g'(\tau)}{(\tau-\omega)^{\mathrm{ord}_\omega f} \cdot g(\tau)} \\ &= \frac{\mathrm{ord}_\omega f}{(\tau-\omega)} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)}. \end{aligned}$$

Und daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_\omega F &= \mathrm{res}_\omega \left(\frac{\mathrm{ord}_\omega f}{(\tau-\omega)} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \right) \\ &= \mathrm{res}_\omega \left(\frac{\mathrm{ord}_\omega f}{(\tau-\omega)} \right) + \mathrm{res}_\omega \left(\frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \right) \end{aligned}$$

mit der Linearität des Residuums. Weil nun g holomorph auf einer Umgebung von ω ist, folgt dies auch für g' und letztendlich auch für $\frac{g'}{g}$ da $g(\omega) \neq 0$. Das Residuum einer holomorphen Funktion ist an jeder Stelle 0, also gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_\omega F &= \mathrm{res}_\omega \left(\mathrm{ord}_\omega f \left(\frac{1}{(\tau-\omega)} \right) \right) \\ &= \mathrm{ord}_\omega f \cdot \underbrace{\mathrm{res}_\omega \left((\tau-\omega)^{-1} \right)}_{=1} \\ &= \mathrm{ord}_\omega f. \end{aligned}$$

□

Nun beschäftigt man sich mit der Fourierentwicklung von $F = \frac{f'}{f}$ im folgenden Lemma:

(2.3) Lemma
Die Fourierentwicklung von $F = \frac{f'}{f}$ mit einer Modulform f vom Gewicht k lautet

$$F(\tau) = 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty f + \sum_{m \geq 1} \alpha_F(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

◇

Beweis
Nach Erinnerung 1.1 (M.3*) lässt sich jede Modulform vom Gewicht k schreiben als

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m \tau}$$

und ist absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent mit $\alpha_f(m_0) \neq 0$. Nach dem Satz von Weierstraß aus [0] kann diese Fourierreihe nun gliedweise differenziert werden:

$$f'(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot 2\pi i m \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Durch [6] ist bekannt, dass die Modulform f vom Gewicht k eins-periodisch ist, also gilt $f(\tau) = f(\tau + 1)$ und es folgt $f'(\tau) = f'(\tau + 1)$. Da $F = \frac{f'}{f}$ muss auch $F(\tau) = F(\tau + 1)$ gelten (siehe auch später im Beweis zu 6), also lässt sich F auch als Fourierreihe schreiben mit

$$F(\tau) = \sum_{j \geq n} \beta_F(j) e^{2\pi i m \tau}$$

mit einem geeigneten Startwert $n \in \mathbb{Z}$ und $\beta_F(n) \neq 0$. Wir werden sehen, dass dieser sogar nur aus $\mathbb{N}_0$ gewählt werden kann. Dazu muss man den Quotienten aus den beiden Fourierreihen von f und f' berechnen:

$$F(\tau) = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \Leftrightarrow F(\tau) f(\tau) = f'(\tau)$$

Dies reduziert das Problem auf die Berechnung des Cauchy-Produktes $F(\tau)f(\tau)$ mit anschließendem Koeffizientenvergleich mit der Fourierreihe von f'. Also folgt

$$\begin{aligned} & F(\tau) f(\tau) = f'(\tau) \\ \Leftrightarrow & \sum_{j \geq n} \beta_F(j) e^{2\pi i j \tau} \cdot \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m \tau} = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) 2\pi i m e^{2\pi i m \tau} \end{aligned}$$

Mit einer Indexverschiebung in beiden Reihen folgt

$$\begin{aligned} F(\tau)f(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_F(j+n)e^{2\pi i(j+n)\tau} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m+m_0)e^{2\pi i(m+m_0)\tau} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k} \beta_F(t+n)e^{2\pi i(t+n)\tau} \cdot \alpha_f(k-t+m_0)e^{2\pi i(k-t+m_0)\tau}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt mit Bildung des Cauchy-Produkts. Durch Ausklammern erhält man schließlich

$$\begin{aligned} F(\tau)f(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{k} \beta_F(t+n) \cdot \alpha_f(k-t+m_0) \right] e^{2\pi i(k+n+m_0)\tau} \\ &= \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) 2\pi i m \cdot e^{2\pi i m \tau} \qquad = f'(\tau) \end{aligned}$$

Nun folgt der Koeffizientenvergleich mit der Fourierentwicklung von f'. Für den ersten Summanden $k=0$ ergibt sich beim Vergleich der Faktoren der Potenzen von e:

$$\begin{aligned} & e^{2\pi i\tau(n+k+m_0)} &&= e^{2\pi i m_0 \tau} \\ \Leftrightarrow\ & e^{2\pi i\tau(n+m_0)} &&= e^{2\pi i m_0 \tau} \\ \Leftrightarrow\ & n &&= 0 \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten folgt dann mit $k=0$

$$\begin{aligned} & 2\pi i(k+m_0) \cdot \alpha_f(k+m_0) &&= \sum_{t=0}^{k} \beta_F(t) \cdot \alpha_f(k-t+m_0) \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi i m_0 \cdot \alpha_f(m_0) &&= \beta_F(0)\alpha_f(m_0) \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi i m_0 &&= \beta_F(0). \end{aligned}$$

Diesen ($k=0$)-Summanden zieht man nun gesondert aus der Fourierreihenentwicklung von F heraus und nun folgt(mit Anfangswert $n=0$ und der allgemeinen Darstellung vom Fourierkoeffizient), dass

$$\begin{aligned} F(\tau) &= 2\pi i m_0 e^{2\pi i 0\cdot\tau} + \textstyle\sum_{m\geq 1} \alpha_F(m)e^{2\pi i m\tau} \\ &= 2\pi i \operatorname{ord}_\infty f + \textstyle\sum_{m\geq 1} \alpha_F(m)e^{2\pi i m\tau}. \end{aligned}$$ □

Später wird folgender Satz aus der Funktionentheorie benötigt:

(2.4) Erinnerung
Laut [0] II ((1.10) b) gilt folgende Abschätzung für einen Weg in $\mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : \mathrm{Sp}(\sigma) \mapsto \mathbb{C}$:

$$\left| \int_\sigma f(z)dz \right| \leq L(\sigma) \cdot \max\{|f(z)|; z \in \mathrm{Sp}\,\sigma\}$$

wobei $L(\sigma)$ die Länge des Weges σ und $\mathrm{Sp}(\sigma)$ dessen Spur meint. Da f stetig gefordert wurde und die Spur eines Weges nur kompakt sein kann, existiert somit immer ein eindeutiges Maximum von f. ◇

— *Das Null- und Polstellen zählende Integral der Modulform f* —

Die Hauptaufgabe des Beweises ist die Bestimmung des Null- und Polstellen zählenden Integrals der Modulform f über dem Weg γ:

$$\int_\gamma F(\tau)d\tau \quad \text{für} \quad F := \frac{f'}{f}.$$

Aus dem Residuensatz aus [0] ist bekannt, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{\omega \in N \cup P} n_\gamma(\omega) \mathrm{res}_\omega f \tag{4}$$

folgt und zwar mit

- N $\widehat{=}$ Nullstellenmenge von f
- P $\widehat{=}$ Polstellenmenge von f

mit $N \cup P \subseteq \mathbb{F}$ und $n_\gamma(\omega)$ ist die Windungszahl von der jeweiligen Stelle ω von γ, die für alle $\omega \in \mathring{\mathbb{F}}$ den Wert eins annimmt. Das Ziel des Restes dieses Kapitels wird sein, das Integral auf dem Rand des Weges zu berechnen um damit und aus (4) die Gewichtsformel herzuleiten. Dafür betrachtet man den zu behandelnden Weg näher.

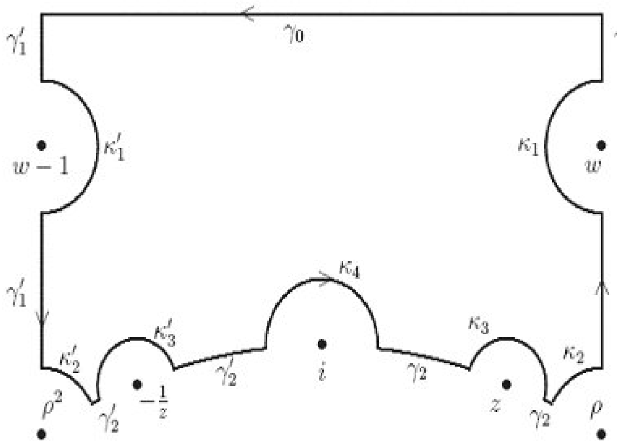

Abbildung 1: Integrationsweg aus [1]

— *Wahl des Weges* γ —

Aus [2] ist die Definition des exakten Fundamentalbereichs der Modulgruppe Γ

$$\mathbb{F} = \{\tau \in \mathbb{H}; -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{2}; |\tau| \geq \text{ und } |\tau| < 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau < 0\}$$

bekannt. Auf dessen Rand liegen nun die Fixpunkte zur Modulgruppe Γ, nämlich i und $\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ und eventuell auch Null- bzw. Polstellen der Modulform f, hier gekennzeichnet mit ω und z. Um diese besonderen Punkte bei der Integration zu umgehen, werden Kreisbögen κ_ν mit $\nu \in \{1,2,3,4\}$ mit dem Radius ϵ ins Innere von $\mathbb{F}$ gesetzt. Da die Null- und die Polstellenmenge diskret in $\mathbb{H}$ sind, wird der Radius genügend klein gewählt, sodass der Kreis keine weiteren Null- bzw. Polstellen enthält ausser evtl. dem Mittelpunkt. Verbunden werden diese Kreisbögen durch Geraden bzw. Kreisbogenstücke γ_μ mit $\mu \in \{0,1,2\}$, die bei $\epsilon \to 0$ auch gegen Geraden konvergieren.

Der Weg γ_0 wird weit nach oben verschoben, sodass alle Null- bzw. Polstellen die Windungszahl eins über γ haben, sofern sie natürlich nicht zu denen gehören, die von den Kreisbögen mit Radius ϵ umgangen werden, niemals aber auf γ_0 liegen. Somit wählt man γ so, dass kein $\omega \in N \cup P$ auf dem Weg γ liegt. Dies ist immer möglich wegen folgender Erklärung: Man nehme an, dass es kein solches $y_0 > 0$ gibt mit $f(x+iy) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y > y_0$, d.h. dass eine Folge $x_n + iy_n$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $f(x_n + iy_n) = 0$ existiert. Aus [6] weiß man, dass dann
$f(x_n + iy_n) = \widehat{f}(e^{2\pi i(x_n + iy_n)}) = 0$ und $\widehat{f}$ somit einen Häufungspunkt von Nullstellen

in 0 hat. Nach dem Identitätssatz aus [0] sind beide Funktionen dann konstant 0. Dies ist natürlich ein Widerspruch zur Voraussetzung und ein solches y_0 existiert immer und somit auch ein γ_0.
Da alle $\omega \in N \cup P$, die in $\mathring{\mathbb{F}}$ liegen, nach dem Residuensatz aus [0] berücksichtigt werden, kümmert man sich im Weiteren nur noch um die $\omega \in N \cup P$, die der Weg umgeht. Es gilt

$$\int_\gamma F(\tau)d\tau = 2\pi i \sum_{\omega\in(N\cup P)\cap\mathring{\mathbb{F}}} \operatorname{res}_\omega(F) \overset{Lemma 2.2}{=} 2\pi i \sum_{\omega\in(N\cup P)\cap\mathring{\mathbb{F}}} \operatorname{ord}_\omega(f).$$

Die Darstellung der rechten Seite ist nun von der Wahl des Radius ϵ der Kreise um die Null- bzw. Polstellen unabhängig geworden. Jedoch muss man bei der Berechnung der linken Seite, die ja durchgeführt werden soll, $\epsilon \to 0$ beachten.

— *γ als zusammengesetzter Weg* —

So wie γ definiert wurde, setzt sich dieser Weg aus $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1^{'}, \gamma_2, \gamma_2^{'}$ und $\kappa_1, \kappa_1^{'}, ...\kappa_4, \kappa_4^{'}$ zusammen. An der Abbildung „Integrationsweg“ erkennt man bereits, dass sich gewisse Teilwege durch Modulsubstitutionen aufeinander beziehen lassen. Hilfreich zur Aufschlüsselung des Verhaltens von der betrachteten Funktion $F = \frac{f^{'}}{f}$ bei Modulsubstitutionen ist folgendes Lemma:

(2.5) Lemma
Sei $f \not\equiv 0$ eine Modulform vom Gewicht k und $M \in \Gamma$. Dann gilt

$$\left(\frac{f^{'}}{f}\right)(M\tau) \cdot \left(\frac{dM\tau}{d\tau}\right) = \frac{kc}{c\tau + d} + \left(\frac{f^{'}}{f}\right)(\tau) \qquad \diamond$$

Beweis
Wenn man $f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ mit $M \in \Gamma$ nach der Produktregel ableitet ergibt sich:

$$f'(M\tau)\frac{dM\tau}{d\tau} = kc(c\tau + d)^{k-1} f(\tau) + f'(\tau)(c\tau + d)^k.$$

Letztendlich erhält man dann für $F = \frac{f'}{f}$:

$$\begin{aligned} F(M\tau)\frac{dM\tau}{d\tau} &= \frac{kc(c\tau+d)^{k-1}f(\tau) + f'(\tau)(c\tau+d)^k}{(c\tau+d)^k f(\tau)} \\ &= kc\frac{(c\tau+d)^{k-1}}{(c\tau+d)^k}\frac{f(\tau)}{f(\tau)} + \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\frac{kc(c\tau+d)^k}{(c\tau+d)^k} \\ &= \frac{kc}{c\tau+d} + F(\tau). \end{aligned}$$

□

Außerdem gilt nach [2]

$$\frac{dM\tau}{d\tau} = (c\tau+d)^{-2}. \tag{5}$$

— *Die Berechnung der Integrale über den γ-Wegen* —

Nun wird mit der konkreten Berechnung der Integrale über den einzelnen Wegen begonnen, die später gemeinsam betrachtet das Integral über dem zusammengesetzten Weg γ ergeben:

1. Die γ_ν-Wege

   - γ_0: Man beginnt mit der Berechnung von

     $$\int_{\gamma_0} F(\tau)d\tau.$$

     Nach der Fourierreihenentwicklung von F nach Lemma (2.3) gilt

     $$\int_{\gamma_0} F(\tau)d\tau = \int_{\gamma_0} 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty f d\tau + \int_{\gamma_0} \sum_{m\geq 1} \alpha_F(m)e^{2\pi i\tau m}d\tau$$

     Aus [0] II.(3.3) ist bekannt, dass Summation und Integration vertauscht werden kann wenn die Funktionenreihe gleichmäßig konvergiert und die einzelnen Funktionen stetig sind für alle $m \in M$. Die erste Forderung wird sofort erfüllt, weil im Argument des zweiten Summanden eine Fourierreihe steht. Die Stetigkeit des Integranden folgt sofort. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_0} F(\tau)d\tau &= \int\limits_{\gamma_0} 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty f d\tau + \sum_{m\geq 1} \int\limits_{\gamma_0} \alpha_F(m) e^{2\pi i \tau m} d\tau \\ &= \int\limits_{\frac{1}{2}+\lambda i}^{-\frac{1}{2}+\lambda i} 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty f d\tau + \sum_{m\geq 1} \int\limits_{\frac{1}{2}+\lambda i}^{-\frac{1}{2}+\lambda i} \alpha_F(m) e^{2\pi i \tau m} d\tau\end{aligned}$$

wobei $\lambda < \infty$ die Stelle der imaginären Achse ist, auf der der Weg γ_0 diese schneidet.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_0} F(\tau)d\tau &= \Big[2\pi i\tau \,\mathrm{ord}_\infty f\Big]_{\frac{1}{2}+\lambda i}^{-\frac{1}{2}+\lambda i} + \sum_{m\geq 1} \alpha_F(m) \left[\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m\tau}\right]_{\frac{1}{2}+\lambda i}^{-\frac{1}{2}+\lambda} \\ &= 2\pi i \,\mathrm{ord}_\infty f + \sum_{m\geq 1} \frac{\alpha_F(m)}{2\pi i m}\left(-e^{2\pi i m(\frac{1}{2}+\lambda i)} + e^{2\pi i m(-\frac{1}{2}+\lambda i)}\right) \\ &= -2\pi i \,\mathrm{ord}_\infty f + \sum_{m\geq 1} \frac{\alpha_F(m)}{2\pi i m} \cdot e^{2\pi i m\lambda i}\left(-e^{\pi i m} + e^{-\pi i m}\right) \\ &= -2\pi i \,\mathrm{ord}_\infty f + \sum_{m\geq 1} \frac{\alpha_F(m)}{2\pi i m} \cdot e^{-2\pi m\lambda}\left(\cos(-\pi m) - \cos(\pi m) + i\cdot 0 - i \cdot 0\right) \\ &= -2\pi i \,\mathrm{ord}_\infty f\end{aligned}$$

Also folgt das Resultat für den Weg γ_0 als

$$\int\limits_{\gamma_0} F(\tau)d\tau = -2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty f. \tag{6}$$

- γ_1, γ_1': Aufgrund der Symmetrie des exakten Fundamentalbereichs zur imaginären Achse ergibt sich

$$\int\limits_{\gamma_1} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau = 0 \tag{7}$$

wie im Folgenden erklärt wird:
Es ergibt sich mit $M = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$, dass

$$F(\tau+1) = F(T\tau) \overset{Lemma(2.5)}{=} (\frac{k \cdot 0}{0 \cdot \tau + 1} + F(\tau)) \left(\frac{dM\tau}{d\tau}\right)^{-1} \overset{(5)}{=} F(\tau)(0 \cdot \tau + 1)^{-2} = F(\tau)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_1} F(\tau+1)d\tau + \int\limits_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau$$

Aus der Abbildung „Integrationswege" erkennt man, dass man durch eine Umparametrisierung des Weges γ_1 mit $\tau \mapsto \tau + 1$ auf den Weg γ_1' schliessen kann:

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_1} F(\tau+1)d\tau + \int\limits_{-\gamma_1} F(\tau+1)d\tau = 0$$

- γ_2, γ_2': Anhand der Abbildung „Integrationswege" lässt sich erkennen, dass sich γ_2 auf γ_2' durch $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ abbilden lässt. Dies entspricht der Modulsubstitution mit $M = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Es gilt $\gamma_2 = -(J\gamma_2')$. Nach Lemma (5) folgt also, dass

$$F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} = \frac{k \cdot 1}{1 \cdot \tau + 0} + F(\tau) = \frac{k}{\tau} + F(\tau).$$

Nun ergibt sich beim Integrieren die äquivalente Gleichung

$$\Rightarrow \int\limits_{\sigma} F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} d\tau = \int\limits_{\sigma} \frac{k}{\tau} d\tau + \int\limits_{\sigma} F(\tau)d\tau \tag{8}$$

über einem beliebigen Weg $\sigma \subset \mathbb{H}$, auf dem keine Pole von F liegen. Rücktransformiert ergibt dies gerade das Integral über dem Weg σ, auf dem die Modulsubstitution mit $J \in \Gamma$ angewendet wird:

$$\int\limits_{\sigma} F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} d\tau = \int\limits_{J\sigma} F(\tau)d\tau.$$

Dies gilt nach der Definition eines Wegintegrals. Dieser Umstand ist nun sehr hilfreich bei der Berechnung der Integrale über den Wegen γ_2 und $\gamma_2^{'}$:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_2 \oplus \gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau &= \int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \\
&= \int\limits_{-(J\gamma_2^{'})} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \\
&= \int\limits_{-\gamma_2^{'}} F(J\tau)\frac{dJ\tau}{d\tau}d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \\
&\overset{(8)}{=} \int\limits_{-\gamma_2^{'}} \frac{k}{\tau}d\tau + \int\limits_{-\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \\
&= -\int\limits_{\gamma_2^{'}} \frac{k}{\tau}d\tau - \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \\
&= -\int\limits_{\gamma_2^{'}} \frac{k}{\tau}d\tau.
\end{aligned}
$$

Da der Weg auch von der Wahl von ϵ abhängt, kann man dies wie folgt schreiben:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2^{'}} F(\tau)d\tau \right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\int\limits_{\gamma_2^{'}} \frac{k}{\tau}d\tau \right) \\
&= -\int\limits_{i}^{\rho} \frac{k}{\tau}d\tau \\
&= -k\,[\mathrm{Log}(\tau)]_i^{\rho} \\
&= -k\,[\mathrm{Log}(\rho) - \mathrm{Log}(i)] \\
&= -k\left[\mathrm{Log}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) - \mathrm{Log}(i)\right] \\
&= -k\left[+\ln(|1|) + i\arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) - \ln(|1|) - i\arg(i)\right] \\
&= -k\left(\frac{\pi i}{3} - \frac{\pi i}{2}\right) \\
&= k \cdot \frac{\pi i}{6},
\end{aligned}
$$

wobei hier das Wegintegral über dem Kreisbogen von i nach ρ berechnet wird.
Also ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int\limits_{\gamma_2} F(\tau) d\tau + \int\limits_{\gamma_2'} F(\tau) d\tau \right) = 2\pi i \cdot \frac{k}{12}. \tag{9}$$

— Die Berechnung der Integrale über den κ-Wegen —

2. Die κ_μ-Wege Zu Beginn der Betrachtung dieser Wege nun ein Lemma, das die Berechnung der Integrale über diesen Wegen verallgemeinert:

(2.6) Lemma
Für die oben definierten Wege κ_μ mit $\mu = \{1, 2, 4\}$ kann man statt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} F(\tau) d\tau$$

auch

$$\operatorname{res}_x F \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{1}{\tau - x} d\tau.$$

schreiben. x ist hier der Mittelpunkt des Kreises von denen jeweils κ_μ mit einem $\mu = \{1, 2, 4\}$ Teil des Kreisrandes ist. ◇

Beweis
Man betrachtet die Bogenlängen als Wege κ_μ mit Mittelpunkten $x \in N \cup P$ oder Fixpunkten dieser Kreise. Da diese $x \in N \cup P$ diskret in $\mathbb{H}$ liegen, gilt nun, dass die Modulform f holomorph in einer Umgebung von x ist und sie lässt sich wegen [0] III (3.8) schreiben als $f(\tau) = (\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f} \cdot g(\tau)$ mit $g(x) \neq 0$ und g holomorph in der Umgebung von x. Diese Darstellung lässt sich ableiten und man erhält

$$f'(\tau) = (\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f - 1} \operatorname{ord}_x f \cdot g(\tau) + (\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f} g'(\tau)$$

Für $F = \frac{f'}{f}$ ergibt sich

$$F = \frac{(\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f - 1} \operatorname{ord}_x f \cdot g(\tau) + (\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f} g'(\tau)}{(\tau - x)^{\operatorname{ord}_x f} g(\tau)} = \operatorname{ord}_x f \cdot (\tau - x)^{-1} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)}$$

Dabei ist $\frac{g'(\tau)}{g(\tau)}$ eine holomorphe Funktion in der Umgebung von x da $g(x) \neq 0$. Nun interessiert man sich wieder für

$$\int\limits_{\kappa_\mu} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\kappa_\mu} \left(\frac{\operatorname{ord}_x f}{(\tau - x)} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \right) d\tau.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int\limits_{\kappa_\mu} F(\tau)d\tau \right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{\operatorname{ord}_x f}{\tau - x} d\tau + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} d\tau.$$

Nach Erinnerung (2.4) und weil κ_μ ein Weg und $\frac{g'}{g}$ stetig ist folgt wieder

$$\left| \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} d\tau \right| \leq L(\kappa_\mu) \cdot \max\{ \left| \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \right| ; \tau \in \operatorname{Sp}\kappa_\mu \} \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0,$$

also folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} d\tau \right| = 0.$$

Es bleibt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int\limits_{\kappa_\mu} F(\tau)d\tau \right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{\operatorname{ord}_x f}{\tau - x} d\tau \\ &= \operatorname{res}_x F \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_\mu} \frac{1}{\tau - x} d\tau. \end{aligned}$$ □

- $\kappa_1, \kappa_1^{'}$:
  Aufgrund der Periodizität von F kann man statt des Weges $\kappa_1^{'}$ auch über $T\kappa_1^{'}$ integrieren, also folgt:

$$\int\limits_{\kappa_1^{'}} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_1} F(\tau)d\tau = \int\limits_{T\kappa_1^{'}} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_1} F(\tau)d\tau.$$

Anschaulich entspricht der Weg $T\kappa_1' + \kappa_1$ genau $-\partial K_\epsilon(\omega)$. Wegen Lemma (2.6) kann man das Integral dann umschreiben als

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\partial K_\epsilon(\omega)} F(\tau)d\tau &= \operatorname{res}_\omega F \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\partial K_\epsilon(\omega)} \frac{1}{\tau-\omega}d\tau \\ &= -\operatorname{res}_\omega F \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}}\epsilon i e^{it} dt.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt wird durch die Substitution $\tau = \omega + \epsilon e^{it}$ erreicht. Die Grenzen des Integrals sind klar, weil $-\partial K_\epsilon(\omega)$ ein Vollkreis ist. Die Berechnung dieses Integrals ist vollkommen unabhängig vom Grenzwert $\epsilon \to 0$ und ergibt

$$\begin{aligned}-\operatorname{res}_\omega F \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} i\, dt &= -\operatorname{res}_\omega F\, [i\tau]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi i \operatorname{res}_\omega F\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\lim_{\epsilon\to\infty} \left(\int\limits_{\kappa_1'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_1} F(\tau)d\tau \right) = -2\pi i \operatorname{res}_\omega F. \tag{10}$$

- κ_2, κ_2':
  Zu Beginn der Betrachtung der Wege κ_2 und κ_2' soll erwähnt werden, dass die Rechnung für κ_2 durchgeführt, diese aber leicht durch Ersetzung von ρ duch ρ^2 und durch Spiegelung der im Folgenden betrachteten Winkel zur Rechnung mit κ_2' komplettiert werden kann. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 2.

  Zunächst folgt mit Lemma (2.6) wieder

  $$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\kappa_2} F(\tau)d\tau = \operatorname{res}_\rho F \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\kappa_2} \frac{1}{\tau-\rho}d\tau.$$

  Nun will man eine ähnliche Substitution wie bei den Wegen κ_1 und κ_1' durchführen mit dem Unterschied, dass hier der Winkel, den man bei der Substitution benötigt, durch den Grenzwert $\epsilon \to 0$ verändert wird. Man

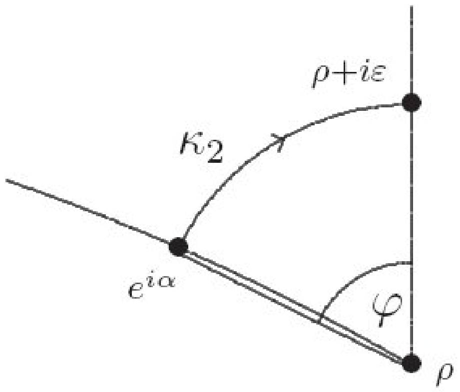

Abbildung 2: Der Weg κ_2 aus [1]

integriert über den Winkel φ, der, wie man in Abbildung 2 erkennt, für $\epsilon \to 0$ gegen $\frac{\pi}{3}$ strebt. Da jedoch nur ein Sechstel des Kreisrandes $\partial K_\epsilon(\rho)$ berechnet werden soll, ist der Anfangswert genau $\frac{\pi}{2}$ und es ergibt sich mit der Substitution $\tau = \rho + \epsilon e^{it}$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_\rho F \lim_{\epsilon \to \infty} \int_{\kappa_2} \frac{1}{\tau - \rho} d\tau &= \operatorname{res}_\rho F \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it} dt \\ &= \operatorname{res}_\rho F \lim_{\epsilon \to 0} [i\tau]_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \operatorname{res}_\rho F \lim_{\epsilon \to 0} (-i\varphi) \\ &= -\operatorname{res}_\rho F \cdot i\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \to \infty} \int_{\kappa_2} F(\tau) d\tau = -\frac{2\pi i}{6} \operatorname{res}_\rho F. \tag{11}$$

- $\kappa_3, \kappa_3^{'}$:
  Es ergibt sich

$$\int\limits_{J\sigma} F(\tau)d\tau = k\int\limits_{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{\sigma} F(\tau)d\tau$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_{\sigma} F(\tau)d\tau = \int\limits_{J\sigma} F(\tau)d\tau - k\int\limits_{\sigma} \frac{d\tau}{\tau}$$

der Ausdruck

$$\int\limits_{\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau = \int\limits_{J\kappa_3'} F(\tau)d\tau - k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau$$
$$= \int\limits_{J\kappa_3'+\kappa_3} F(\tau)d\tau - k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Da nun Anfangs- und Endpunkt von dem Weg κ_3' durch die Modulsubstitution mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ auf den Anfangs- und Endpunkt von κ_3 abgebildet werden, ergibt sich, dass $J\kappa_3' + \kappa_3$ ein geschlossener Weg ist. Damit ist dieser Weg homolog zu $-\partial K_\epsilon(z)$ auf einer punktierten Umgebung von z, auf der F holomorph ist, falls ϵ klein genug gewählt wird. Mit dem Residuensatz folgt, weil Kreise nullhomologe Zyklen darstellen:

$$\int\limits_{\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau = \int\limits_{-\partial K_\epsilon(z)} F(\tau)d\tau - k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau} = -\int\limits_{\partial K_\epsilon(z)} F(\tau)d\tau - k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau}$$
$$= -2\pi i \operatorname{res}_z F - k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Nun soll wieder der Radius um die Pol- oder Nullstelle so klein wie möglich sein, also sucht man

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_{\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-2\pi i \operatorname{res}_z F\right) - \lim_{\epsilon\to 0} k\int\limits_{\kappa_3'} \frac{d\tau}{\tau}$$

Aus Erinnerung (2.4) folgt

$$\left| \int\limits_{\kappa_3'} \frac{1}{\tau} d\tau \right| \leq L(\kappa_3') \max \left\{ \left| \frac{1}{\tau} \right| ; \tau \in \kappa_3' \right\}.$$

In diesem speziellen Fall ist die Länge von κ_3' der halbe Kreisbogen vom Kreis mit dem Radius ϵ. Das Maximum ist nach Erinnerung (2.4) endlich sagen wir genau $M \in \mathbb{R}^+$, also folgt

$$\left| \int\limits_{\kappa_3'} \frac{1}{\tau} d\tau \right| \leq \pi i \epsilon \cdot M.$$

$$\text{Mit } \epsilon \to 0 \text{ gilt } \lim_{\epsilon \to 0} \left| \int\limits_{\kappa_3'} \frac{1}{\tau} d\tau \right| \leq 0.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int\limits_{\kappa_3'} F(\tau) d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau) d\tau \right) = -2\pi i \operatorname{ord}_z f. \tag{12}$$

- κ_4:
  Die Überlegungen zur Berechnung des Integrals über dem Weg κ_4 sind ähnlich denen von κ_2. Mit der Betrachtung des Grenzwertes $\epsilon \to 0$ nähert sich der Integrationsweg immer mehr dem Halbkreisbogen an, der Teil von $\partial K_\epsilon(i)$ ist. φ geht somit gegen $\frac{\pi}{2}$ für $\epsilon \to 0$. Die Integrationsgrenzen nach der Substitution mit $\tau = i + \epsilon e^{it}$ ergeben sich somit wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_4} F(\tau) d\tau &= \operatorname{res}_i F \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_4} \frac{1}{\tau - i} d\tau \\ &= \operatorname{res}_i F \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} i \, dt \\ &= \operatorname{res}_i F \lim_{\epsilon \to 0} (-2i\varphi) \\ &= -\operatorname{res}_i F \cdot \pi i \end{aligned}$$

Hier wird zudem Lemma (2.6) verwendet. Also ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_4} F(\tau) d\tau = -\frac{2\pi i}{2} \operatorname{res}_i F. \tag{13}$$

— Zusammensetzen des Weges γ —

Die Ergebnisse aus (6),(7),(9),(10),(11),(12) und (13) werden nun zusammengefasst: Man sieht, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} F(\tau) d\tau &= \int\limits_{\gamma_\nu} F(\tau) d\tau + \int\limits_{\kappa_\mu} F(\tau) d\tau \\
&= 2\pi i \left(\underbrace{-\operatorname{ord}_\infty f + 0 + \frac{k}{12}}_{\gamma_\nu} \underbrace{-\operatorname{ord}_z f - \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i f - \frac{1}{3} \operatorname{ord}_\rho f - \operatorname{ord}_\omega f}_{\kappa_\mu} \right) \\
&= 2\pi i \left(-\operatorname{ord}_\infty f + \frac{k}{12} - \operatorname{ord}_z f - \operatorname{ord} i \cdot \operatorname{ord}_i f - \operatorname{ord} \rho \cdot \operatorname{ord}_\rho f - \operatorname{ord}_\omega f \right)
\end{aligned}$$

für die Fixpunkte und die Pol- und Nullstellen auf dem Weg γ gilt. Hierbei standen z und ω stellvertretend für die auf dem Rand auftauchenden Null- bzw. Polstellen. Zusammen mit der Darstellung über den Residuensatz für alle Pole und Nullstellen im Inneren von $\mathbb{F}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{\omega \in \mathring{\mathbb{F}}} \operatorname{ord}_\omega f &= \int\limits_{\gamma} F(\tau) d\tau \\
&= 2\pi i \left(-\operatorname{ord}_\infty f + \frac{k}{12} - \operatorname{ord}_z f - \operatorname{ord} i \cdot \operatorname{ord}_i f - \operatorname{ord} \rho \cdot \operatorname{ord}_\rho f - \operatorname{ord}_\omega f \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \sum_{\omega \in \mathring{\mathbb{F}}} \operatorname{ord}_\omega f &= \left(-\operatorname{ord}_\infty f + \frac{k}{12} - \operatorname{ord}_z f - \operatorname{ord} i \cdot \operatorname{ord}_i f - \operatorname{ord} \rho \cdot \operatorname{ord}_\rho f - \operatorname{ord}_\omega f \right) \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{\omega \in \mathbb{F}} \frac{1}{\operatorname{ord} \omega} \operatorname{ord}_\omega f &= -\operatorname{ord}_\infty f + \frac{k}{12} \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{\omega \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord} \omega} \operatorname{ord}_\omega f &= \frac{k}{12}.
\end{aligned}$$

§3 Anhang

Literatur

[0] A.Krieg, Funktionentheorie I (Skript zur Vorlesung), 2008

[1] M.Koecher, A.Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2.Aufl, Springer 2007

[2] Vortrag „Die obere Halbebene“ von Tom Rihm

[3] Vortrag „Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe“ von Kerstin Küpper

[4] Vortrag „Fixpunkte“ von Alexander Hagen

[5] Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe“ von Laura Neisius und Florian Drescher

[6] Vortrag „Modulformen“ von Dominik Hohmann

[7] Vortrag „Beispiele ganzer Modulformen“ von Andreas Freh