Basen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 15.07.2009

Benjamin Laumen

Diese Ausarbeitung beruht auf Kapitel III, Paragraph 4 Unterpunkt 1–3 aus dem Buch: Elliptische Funktionen und Modulformen von M. Koecher und A. Krieg. Der Schwerpunkt dieser Ausarbeitung liegt auf den ganzen Modulformen. Es werden die Bezeichnungen aus den bisherigen Vorträgen 1–8 übernommen.

Inhaltsverzeichnis

§1 Die Dimensionsformel

In diesem Abschnitt werden erste Anwendungen der Gewichtsformel aus [4] gezeigt. Die Dimensionsformel wird ohne Bezugnahme auf die Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen. Darüber hinaus werden zentrale Ergebnisse über die Diskriminante, insbesondere ihr Nichtverschwinden in $\mathbb{H}$, bewiesen.

— Erste Anwendungen der Gewichtsformel —

Wie bereits in Satz 1.4 aus [2] gezeigt wurde, gilt:

$$\mathbb{M}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades } k.$$

Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ stehen in der ausführlich geschriebenen Gewichtsformel aus [4],

$$\frac{1}{2}\operatorname{ord}_i f + \frac{1}{3}\operatorname{ord}_\rho f + \operatorname{ord}_\infty f + \sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f = \frac{k}{12}\,, \tag{1}$$

nur nicht-negative Terme auf der linken Seite.

Als erste Anwendung der Gewichtsformel in (1) kann man für die Gewichte $k = 4$, 6, 8 und 10 die Ordnungen in $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ eindeutig angeben, zusammengefasst in der

(1.1) Folgerung
Für $k = 4, 6, 8$ und 10 ist (1) für $f \in \mathbb{M}_k$ nur lösbar in den Fällen

k	$\frac{k}{12}$	$\operatorname{ord}_\infty f$	$\operatorname{ord}_i f$	$\operatorname{ord}_\rho f$	f hat Nullstellen bei	der Ordnung
4	1/3	0	0	1	ρ	1
6	1/2	0	1	0	i	1
8	2/3	0	0	2	ρ	2
10	5/6	0	1	1	i und ρ	1

(2)

und $\operatorname{ord}_z f = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}$. ◇

Beweis
Um die Werte in der Tabelle (2) zu erhalten, setzt man $k = 4, 6, 8$ und 10 in (1) ein.
1. Fall: $k = 4 \quad \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{1}{3}$. Da $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$, muss also gelten

$$\frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{ord}_i f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \frac{1}{3}\underbrace{\operatorname{ord}_\rho f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \underbrace{\operatorname{ord}_\infty f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \underbrace{\sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \underbrace{\operatorname{ord}_\omega f}_{\in\,\mathbb{N}_0}}_{\in\,\mathbb{N}_0} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f = 0,\ \operatorname{ord}_i f = 0,\ \sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f = 0 \quad \text{und} \ \operatorname{ord}_\rho f = 1.$$

2. Fall: $k = 6, 8$ und 10. Analog zum 1. Fall gilt
für $k = 6 \quad \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f = 0,\ \operatorname{ord}_\rho f = 0,\ \sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f = 0 \quad \text{und} \ \operatorname{ord}_i f = 1,$$

für $k = 8 \quad \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f = 0,\ \operatorname{ord}_i f = 0,\ \sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f = 0 \quad \text{und} \ \operatorname{ord}_\rho f = 2,$$

für $k = 10 \quad \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f = 0,\ \sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f = 0 \quad \text{und} \ \operatorname{ord}_i f = 1,\ \operatorname{ord}_\rho f = 1.$$

Für gerades $k \geq 12$ ist (1) nicht eindeutig lösbar. □

Eine Aussage aus [4] wird hier noch einmal neu formuliert.

(1.2) Lemma
Für jedes $f \in \mathbb{M}_k$ gilt:
die Nullstellen von f in $\mathbb{H}$, sind eindeutig charakterisiert durch die Nullstellen von f in $\mathbb{F}$. ◇

Beweis
Man weiß aus [4], dass für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ gilt

$$\operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_{Mz} f \quad \forall\, z \in \mathbb{H} \text{ und } M \in \Gamma.$$

□

Damit folgt insbesondere für $f,\ g \in \mathbb{M}_k$ mit $\operatorname{ord}_z f \leq \operatorname{ord}_z g \quad \forall\, z \in \mathbb{F}$:

$$\operatorname{ord}_z f \leq \operatorname{ord}_z g \quad \forall\, z \in \mathbb{H}.$$

Nun kann man für $0 \leq k \leq 10$ die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ beschreiben.

(1.3) Satz
Es gilt:

a) $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$.

b) $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ und $\mathbb{S}_0 = \{0\}$.

c) $\mathbb{M}_2 = \{0\}$.

d) $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k = \mathbb{C} \cdot G_k^*$ und $\mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k = 4, 6, 8$ und 10. ◇

Beweis

Zu a): Für $k < 0$ ist die rechte Seite in (1) negativ. Also müsste die linke Seite auch negativ sein. Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ sind aber $\operatorname{ord}_i f$, $\operatorname{ord}_\rho f$, $\operatorname{ord}_\infty f$ und $\sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f$ nicht-negative Zahlen. Das ist ein Widerspruch, womit folgt: $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$.

Zu b): Angenommen $0 \neq f \in \mathbb{M}_0$ ist nicht konstant.
Dann definiert man $g := f - f(i) \in \mathbb{M}_0$. $g \in \mathbb{M}_0$ gilt, da auch für alle Konstanten $c \in \mathbb{C}$ gilt $c \in \mathbb{M}_0$. Es ist $g \not\equiv 0$, da f nicht konstant ist. Wendet man nun (1) auf g an, erhält man

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{ord}_i g}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{ord}_\rho g + \operatorname{ord}_\infty g + \sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega g}_{\geq 0}}_{\geq \frac{1}{2}} = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ und damit $\mathbb{S}_0 = \{0\}$.

Zu c): Angenommen $\mathbb{M}_2 \neq \{0\}$. Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_2$ setzt man $k = 2$ in (1) ein, und definiert

$$\alpha := \operatorname{ord}_\infty g + \sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f, \quad \beta := \operatorname{ord}_i f, \quad \gamma := \operatorname{ord}_\rho f.$$

Damit erhält man

$$\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{3}\,\gamma = \frac{1}{6}.$$

Für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist das ein Widerspruch, da $0 \neq \frac{1}{6}$ ist.

Für $\alpha > 0$ und $\beta,\ \gamma$ beliebig $\Rightarrow$ $\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{3}\,\gamma \geq 1$.
Für $\beta > 0$ und $\alpha,\ \gamma$ beliebig $\Rightarrow$ $\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{3}\,\gamma \geq \frac{1}{2}$.
Für $\gamma > 0$ und $\alpha,\ \beta$ beliebig $\Rightarrow$ $\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{3}\,\gamma \geq \frac{1}{3}$.

Und damit folgt
$$\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{3}\,\gamma > \frac{1}{6}.$$
Das ist auch ein Widerspruch. Also gilt $\mathbb{M}_2 = \{0\}$.

Zu d): Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ mit $k = 4, 6, 8$ und 10 ist $\mathrm{ord}_z f$ nach Folgerung (1.1) eindeutig bestimmt für $z \in \mathbb{F}$, ebenso ist für $G_k \in \mathbb{M}_k$, $\mathrm{ord}_z G_k$ eindeutig bestimmt.
$$\forall\ z \in \mathbb{F} : \mathrm{ord}_z\, f = \mathrm{ord}_z\, G_k.$$
Mit dem Lemma (1.2) folgt
$$\forall\ z \in \mathbb{H} : \mathrm{ord}_z\, f = \mathrm{ord}_z\, G_k. \tag{3}$$
Damit ist f/G_k eine Modulform vom Gewicht 0, da man aus [2] weiß, dass
$$\frac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \quad \text{für } 0 \neq f \in \mathbb{V}_k \quad \text{und} \quad \mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_l \subset \mathbb{V}_{k+l} \quad \text{gilt} \quad \frac{f}{G_k} \in \mathbb{V}_0.$$
Aus (3) folgt ebenfalls, dass f/G_k holomorph auf ganz $\mathbb{H}$ ist.
Außerdem gilt noch
$$\mathrm{ord}_\infty \left(\frac{f}{G_k}\right) = 0,$$
da für $0 \neq f,\ G_k \in \mathbb{M}_k$ mit $k = 4, 6, 8$ und 10 gilt
$$\mathrm{ord}_\infty \left(\frac{f}{G_k}\right) = \mathrm{ord}_\infty\, f - \mathrm{ord}_\infty\, G_k \overset{(1.1)}{=} 0 - 0 = 0.$$
Was noch zu zeigen ist.
Für $0 \neq f,\ g \in \mathbb{M}_k$ gilt
$$f = \alpha_{\mathrm{ord}_\infty f} \cdot e^{2\pi i\, \mathrm{ord}_\infty f \tau} + \ldots \quad \text{und} \quad g = \alpha_{\mathrm{ord}_\infty g} \cdot e^{2\pi i\, \mathrm{ord}_\infty g \tau} + \ldots$$
und dann mit
$$\frac{f}{g} = h = \alpha_{m_0} \cdot e^{2\pi i m_0 \tau} + \ldots$$
folgt
$$f = g \cdot h = \alpha_{\mathrm{ord}_\infty g} \cdot \alpha_{m_0} \cdot e^{2\pi i (\mathrm{ord}_\infty g + m_0)\tau} + \ldots\ .$$

Damit gilt

$$\operatorname{ord}_\infty f = \operatorname{ord}_\infty g + m_0$$
$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f - \operatorname{ord}_\infty g = m_0 = \operatorname{ord}_\infty h.$$

Also ist $f/G_k \in \mathbb{M}_0$. Mit Teil b) folgt

$$\frac{f}{G_k} = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow f = c \cdot G_k$$

Und somit ist $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k = \mathbb{C} \cdot G_k^*$ und $\mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k = 4, 6, 8$ und 10. □

Man betrachtet nun speziell zwei Fälle aus (2) für $G_k \in \mathbb{M}_k$ in dem

(1.4) Korollar

a) G_4 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle. Diese liegt bei ρ und ist von 1. Ordnung.

b) G_6 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle. Diese liegt bei i und ist von 1. Ordnung. ◇

Beweis

Da $G_k \in \mathbb{M}_k$ ist, kann man die Tabelle aus (2) anwenden.

Zu a): Für $k = 4$: G_4 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle bei ρ der Ordnung 1.

Zu b): Für $k = 6$: G_6 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle bei i der Ordnung 1. □

— *Beweis zentraler Ergebnisse der Diskriminante* —

Aus (1) erhält man den

(1.5) Satz

Es gilt $\Delta^*(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. ◇

Beweis

Aus Satz (3.8) in [3] weiß man, dass $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}$ ist, also $k = 12$.
Es gilt mit Satz (3.6) aus [3]

$$\Delta^*(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}, \ \tau \in \mathbb{H},$$

mit $\tau(1) = 1$ und $\mathrm{ord}_\infty \Delta^* = 1$.
Da $0 \neq \Delta^* \in \mathbb{S}_{12} \subset \mathbb{M}_{12}$ ist, kann man die Gewichtsformel aus (1) anwenden:

$$\frac{12}{12} = 1 = \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{ord}_i \Delta^*}_{\in \mathbb{N}_0} + \frac{1}{3}\underbrace{\mathrm{ord}_\rho \Delta^*}_{\in \mathbb{N}_0} + \underbrace{\mathrm{ord}_\infty \Delta^*}_{=1} + \underbrace{\sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \underbrace{\mathrm{ord}_\omega \Delta^*}_{\in \mathbb{N}_0}}_{\in \mathbb{N}_0}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{ord}_i \Delta^* + \frac{1}{3}\mathrm{ord}_\rho \Delta^* + \sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \mathrm{ord}_\omega \Delta^*}_{=0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_i \Delta^* = 0,\ \mathrm{ord}_\rho \Delta^* = 0,\ \sum_{\omega \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \mathrm{ord}_\omega \Delta^* = 0$$

$\Rightarrow \Delta^*$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{F}$.

Damit ist Δ^* nullstellenfrei auf $\mathbb{F}$.
Mit dem Lemma (1.2) ist $\Delta^*(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. □

Wie bereits in [2] gezeigt wurde, gilt

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{M}_{k+l} \quad \text{und} \quad \mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{S}_{k+l} \quad \text{für} \quad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Ein entscheidendes Hilfmittel ist nun das

(1.6) Lemma
Für gerades $k \geq 0$ gilt

$$\mathbb{S}_k = \Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12}.$$

◇

Beweis
Mit (4) und $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}$ hat man zunächst: $\Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12} \subset \mathbb{S}_k$.
Nach dem Satz (1.5) ist Δ^* in $\mathbb{H}$ nullstellenfrei.
Für $0 \neq f \in \mathbb{S}_k$ definiert man $g := f/\Delta^*$.

Beh.: $g \in \mathbb{M}_{k-12}$.
Bew.:

1. Δ^* nullstellenfrei in $\mathbb{H}$ nach Satz (1.5) $\quad \Rightarrow g$ holomorph auf $\mathbb{H}$.

2. $M \in \Gamma$ und $\tau \in \mathbb{H}$ beliebig:

$$\begin{aligned} g|_{k-12}M(\tau) &= (c\tau+d)^{-k+12} \cdot \; g(M\tau) \\ &= (c\tau+d)^{-k+12} \cdot \; \frac{f(M\tau)}{\Delta^*(M\tau)} \\ &= \frac{(c\tau+d)^{-k}\, f(M\tau)}{(c\tau+d)^{-12}\, \Delta^*(M\tau)} \\ &= \frac{f(\tau)}{\Delta^*(\tau)} \\ &= g(\tau). \end{aligned}$$

3. Es gilt $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}$ und $f \in \mathbb{S}_k$, also

$$\Delta^*(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \quad \text{und} \quad f(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Mit 2. gilt

$g(\tau+1) = g(\tau)$

$\Rightarrow g$ periodisch mit Periode 1 $\quad \Rightarrow g$ besitzt eindeutige Fourier-Entwicklung

$\Rightarrow g(\tau) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \alpha_g(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}.$

Mit $\Delta^* \cdot g = f$ kann man schreiben

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} = \sum_{m=m_0}^{\infty} \alpha_g(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \tag{5}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m-m_0} \tau(n) \cdot \alpha_g(m-n) \right) \cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Man setzt nun $m_0 < 0$ und betrachtet für $m = m_0$ die Koeffizienten von $\mathrm{e}^{2\pi i(m_0+1)\tau}$

$$\Rightarrow \left(\tau(1) \cdot e^{2\pi i\tau} + \tau(2) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots\right) \cdot \left(\alpha_g(mo) \cdot e^{2\pi i m_0\tau} + \alpha_g(mo+1) \cdot e^{2\pi i(m_0+1)\tau} + \ldots\right)$$

$$= \underbrace{\tau(1) \cdot \alpha_g(m_0)}_{\neq 0} \cdot e^{2\pi i(m_0+1)\tau} + \ldots \quad \text{mit } m_0+1 \leq 0.$$

Die linke Seite in (5) beginnt erst mit $m = 1$, ist also von der Form

$$\alpha_f(1) \cdot e^{2\pi i \tau} + \alpha_f(2) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \alpha_f(3) \cdot e^{2\pi i 3\tau} + \dots .$$

Mit einem Koeffizientenvergleich ist das ein Widerspruch,
da die Fourier-Entwicklungen eindeutig sind.

$$\Rightarrow m_0 \geq 0 \quad \Rightarrow g(\tau) = \sum_{m \geq 0}^{\infty} \alpha_g(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Mit 1., 2. und 3. ist $g \in \mathbb{M}_{k-12}$. Also $\mathbb{S}_k \subset \Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12}$.
Und somit gilt für gerades $k \geq 0$: $\mathbb{S}_k = \Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12}$. □

Einen Spezialfall erhält man mit dem Satz (1.3).

(1.7) Korollar
Es gilt $\mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^*$. ◇

Beweis
Man weiß, dass $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}$ und $\mathbb{S}_k = \Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12}$ ist. Also gilt mit dem Satz (1.3)b)

$$\mathbb{S}_{12} = \mathbb{M}_0 \cdot \Delta^* = \mathbb{C} \cdot \Delta^*.$$ □

Damit ergibt sich nun eine hilfreiche Formel für die Dimension von $\mathbb{M}_k$.

(1.8) Satz (Dimensionsformel)
Für gerades $k \geq 0$ ist $\mathbb{M}_k$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$ ◇

Beweis
Lässt man zunächst die Dimension ∞ für $\mathbb{M}_k$ zu, dann ergibt Satz 2.17b) aus [3]

$$\dim \mathbb{M}_k = 1 + \dim \mathbb{S}_k \ , \ k \geq 4$$

und mit dem Lemma (1.6) folgt

$$\dim \mathbb{S}_k = \dim \mathbb{M}_{k-12} \ , \ k \geq 12.$$

Zusammen erhält man

$$\dim \mathbb{M}_k = 1 + \dim \mathbb{M}_{k-12}\ ,\ k \geq 12.$$

Die Behauptung für $k \geq 12$ zeigt man mit einer Induktion nach k.

(IA): Mit Satz (1.3) gilt die Dimensionsformel für gerades k, $0 \leq k < 12$.
(IV): Die Behauptung gilt für ein gerades $k \in \mathbb{N}_0$.
(IS): $k \to k + 12$:

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{M}_{k+12} &= 1 + \dim \mathbb{M}_k \\ &= \dim \mathbb{M}_k + 1.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(k+12) &\equiv 2 \pmod{12} &&\Rightarrow k \equiv 2 \pmod{12} \\ (k+12) &\not\equiv 2 \pmod{12} &&\Rightarrow k \not\equiv 2 \pmod{12}.\end{aligned}$$

Also erhält man
für $k \equiv 2$ (mod 12):

$$\dim \mathbb{M}_{k+12} = \dim \mathbb{M}_k + 1 \overset{IV}{=} \left[\frac{k}{12}\right] + 1 = \left[\frac{k+12}{12}\right].$$

Für $k \not\equiv 2$ (mod 12):

$$\dim \mathbb{M}_{k+12} = \dim \mathbb{M}_k + 1 + 1 \overset{IV}{=} \left[\frac{k}{12}\right] + 1 + 1 = \left[\frac{k+12}{12}\right] + 1.$$

Da die Behauptung für $0 \leq k < 12$ gezeigt wurde, folgt sie mit dem Induktionsprinzip für alle geraden k ebenso. □

Analog zu der Folgerung (1.1) erhält man aufgrund von (1) die

(1.9) Folgerung
Es gilt

$$6 \cdot \mathrm{ord}_i\, f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho\, f \equiv k \pmod{12} \quad \text{für } 0 \neq f \in \mathbb{M}_k$$

und damit

k (mod 12)	0	2	4	6	8	10
$\mathrm{ord}_i f$ (mod 2)	0	1	0	1	0	1
$\mathrm{ord}_\rho f$ (mod 3)	0	2	1	0	2	1

(6)

◇

Beweis
Aus (1) folgt

$$k = 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f + 12 \cdot \left(\operatorname{ord}_\infty f + \sum_{\omega \in \mathbb{F} \setminus \{i,\rho\}} \operatorname{ord}_\omega f \right) \quad \text{für } 0 \neq f \in \mathbb{M}_k$$

und mit (mod 12) folgt

$$k \pmod{12} \equiv 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f \quad \text{für } 0 \neq f \in \mathbb{M}_k.$$

Zunächst die möglichen Fälle allgemein

a) $\operatorname{ord}_\rho f = 3 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m$

i) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 12 \cdot n \in 12 \cdot \mathbb{Z}$

ii) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n + 6$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 12 \cdot n + 6 \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 6$

b) $\operatorname{ord}_\rho f = 3 \cdot m + 1$ mit $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 4$

i) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 4 + 12 \cdot n \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 4$

ii) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n + 6$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 12 \cdot n + 10 \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 10$

c) $\operatorname{ord}_\rho f = 3 \cdot m + 2$ mit $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 8$

i) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 8 + 12 \cdot n \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 8$

ii) $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f = 12 \cdot n + 6$
$\Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f = 12 \cdot m + 12 \cdot (n+1) + 2 \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 2$

1. Fall: $k = 12 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$k = \underbrace{12 \cdot m}_{\in 12 \cdot \mathbb{Z}} = 6 \cdot \underbrace{\operatorname{ord}_i f}_{\in \mathbb{Z}} + 4 \cdot \underbrace{\operatorname{ord}_\rho f}_{\in \mathbb{Z}} \quad \Rightarrow 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f \in 12 \cdot \mathbb{Z}.$$

Also gilt a) i): $\operatorname{ord}_\rho f = 3 \cdot r$ und $\operatorname{ord}_i f = 2 \cdot s$ mit $r,\ s \in \mathbb{Z}$.

2. Fall: $k = 12 \cdot m + 2$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$k = \underbrace{12 \cdot m + 2}_{\in\, 12\,\cdot\,\mathbb{Z}\,+\,2} = 6 \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_i\, f}_{\in\, \mathbb{Z}} + 4 \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_\rho\, f}_{\in\, \mathbb{Z}} \quad \Rightarrow 6 \cdot \mathrm{ord}_i\, f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho\, f \ \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 2.$$

Also gilt c) ii): $\mathrm{ord}_\rho f = 3 \cdot r + 2$ und $\mathrm{ord}_i f = 2 \cdot s + 1$ mit $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$.

3. Fall: $k = 12 \cdot m + 4$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$k = \underbrace{12 \cdot m + 4}_{\in\, 12\,\cdot\,\mathbb{Z}\,+\,4} = 6 \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_i\, f}_{\in\, \mathbb{Z}} + 4 \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_\rho\, f}_{\in\, \mathbb{Z}} \quad \Rightarrow 6 \cdot \mathrm{ord}_i\, f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho\, f \ \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 4.$$

Also gilt b) i): $\mathrm{ord}_\rho f = 3 \cdot r + 1$ und $\mathrm{ord}_i f = 2 \cdot s$ mit $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$.

4. Fall: $k = 12 \cdot m + 6$ mit $m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow 6 \cdot \mathrm{ord}_i f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho f\ \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 6$.
Also gilt a) ii): $\mathrm{ord}_\rho f = 3 \cdot r$ und $\mathrm{ord}_i f = 2 \cdot s + 1$ mit $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$.

5. Fall: $k = 12 \cdot m + 8$ mit $m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow 6 \cdot \mathrm{ord}_i f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho f\ \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 8$.
Also gilt c) i): $\mathrm{ord}_\rho f = 3 \cdot r + 2$ und $\mathrm{ord}_i f = 2 \cdot s$ mit $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$.

6. Fall: $k = 12 \cdot m + 10$ mit $m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow 6 \cdot \mathrm{ord}_i f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho f\ \in 12 \cdot \mathbb{Z} + 10$.
Also gilt b) ii): $\mathrm{ord}_\rho f = 3 \cdot r + 1$ und $\mathrm{ord}_i f = 2 \cdot s + 1$ mit $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$. □

Und damit erhält man das

(1.10) Korollar
Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ gilt $\mathrm{ord}_\infty f < \dim \mathbb{M}_k$. ◇

Beweis
Aus der Gewichtsformel ergibt sich mit (1) im Falle $f \neq 0$

$$\frac{k}{12} = \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{ord}_i\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0} + \frac{1}{3} \underbrace{\mathrm{ord}_\rho\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0} + \underbrace{\mathrm{ord}_\infty\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0} + \underbrace{\sum_{\omega \in \mathbb{F} \setminus \{i,\rho\}} \underbrace{\mathrm{ord}_\omega\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0}}_{\in\, \mathbb{N}_0}.$$

Mit (6) ergibt sich für $k \equiv 2 \pmod{12}$

$$\frac{k}{12} = \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{ord}_i\, f}_{\geq 1} + \frac{1}{3} \underbrace{\mathrm{ord}_\rho\, f}_{\geq 2} + \underbrace{\mathrm{ord}_\infty\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0} + \underbrace{\sum_{\omega \in \mathbb{F} \setminus \{i,\rho\}} \underbrace{\mathrm{ord}_\omega\, f}_{\in\, \mathbb{N}_0}}_{\in\, \mathbb{N}_0} \geq \mathrm{ord}_\infty\, f + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

und sonst

$$\frac{k}{12} = \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{ord}_i f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \frac{1}{3}\underbrace{\operatorname{ord}_\rho f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \underbrace{\operatorname{ord}_\infty f}_{\in\,\mathbb{N}_0} + \underbrace{\sum_{\omega\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \underbrace{\operatorname{ord}_\omega f}_{\in\,\mathbb{N}_0}}_{\in\,\mathbb{N}_0} \geq \operatorname{ord}_\infty f.$$

Insgesamt erhält man

$$\frac{k}{12} \geq \begin{cases} \operatorname{ord}_\infty f + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \operatorname{ord}_\infty f\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Mit der Dimensionsformel (1.8) folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{M}_k &= \left[\frac{k}{12}\right] \geq \left[\operatorname{ord}_\infty f + \frac{7}{6}\right] = \operatorname{ord}_\infty f + 1, \text{ falls } k \equiv 2 (\operatorname{mod} 12) \\ \dim \mathbb{M}_k &= \left[\frac{k}{12}\right] + 1 \geq [\operatorname{ord}_\infty f] + 1 = \operatorname{ord}_\infty f + 1, \text{ falls } k \not\equiv 2 (\operatorname{mod} 12). \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{ord}_\infty f < \dim \mathbb{M}_k$. □

Anders ausgedrückt besagt dieses Korollar, dass aus
$\alpha_f(m) = 0$ für $0 \leq m < \dim \mathbb{M}_k$ immer $f = 0$ folgt, denn

$$\begin{aligned} &\sum_{m\geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \\ &= \sum_{m \geq \dim \mathbb{M}_k} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \\ &\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f \geq \dim \mathbb{M}_k. \end{aligned}$$

Mit dem Korollar (1.10) ist das ein Widerspruch.

§2 Einfache Folgerungen

In diesem Abschnitt werden einige einfache Folgerungen mit den Ergebnissen aus §1 bewiesen. Man kann jetzt mithilfe des Lemmas (1.6) und der Dimensionsformel (1.8), die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ für $12 \leq k \leq 26$ beschreiben. Und damit die Ergebnisse in Satz (1.3) erweitern.

(2.1) Folgerung

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{12} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^*, & \mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^*, \\ \mathbb{M}_{14} = \mathbb{C} \cdot G_{14}^* \,, & \mathbb{S}_{14} = \{0\}, \\ \mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^* \cdot G_{k-12}^* \,, & \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot \Delta^* \cdot G_{k-12}^* \\ & \text{für } k = 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 26, \\ \mathbb{M}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{24}^* \oplus \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^{*2}, & \mathbb{S}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^{*2}. \end{cases}$$

◇

Beweis
Mit Satz 2.17b) aus [3]

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k \quad \text{für gerades } k \geq 4$$

folgt

für $k = 12$: $\dim \mathbb{M}_{12} = 2$.

$$\mathbb{M}_{12} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^* \quad \text{mit } \ \mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^* \ \text{ nach Korollar (1.7).}$$

Für $k = 14$: $\dim \mathbb{M}_{14} = 1$.

$$\mathbb{M}_{14} = \mathbb{C} \cdot G_{14}^* \quad \text{mit } \ \mathbb{S}_{14} = \{0\} \ \text{ nach Lemma (1.6) und Satz (1.3)c).}$$

Für $k = 16, 18, 20, 22, 26$: $\dim \mathbb{M}_k = 2$.

Weiter gilt für k = 16, 18, 20, 22:

$$\mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot \Delta^* \cdot G_{k-12}^* \ \text{ nach Lemma (1.6) und Satz (1.3)d).}$$

Und für $k = 26$:

$$\mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot \Delta^* \cdot G_{k-12}^* \ \text{ nach Lemma (1.6) und } \mathbb{M}_{14} = \mathbb{C} \cdot G_{14}^*.$$

Damit folgt insgesamt für $k = 16, 18, 20, 22, 26$:

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^* \cdot G_{k-12}^*.$$

Für $k = 24$: $\dim \mathbb{M}_{24} = 3$.

$$\mathbb{S}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^{*2} \quad \text{nach Lemma (1.6) und } \mathbb{M}_{12} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^*.$$

Also gilt für $k = 24$:

$$\mathbb{M}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{24}^* \oplus \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta^* \oplus \mathbb{C} \cdot \Delta^{*2}.$$

□

(2.2) Bemerkung
Natürlich bleiben diese Beziehungen gültig, wenn man jeweils die normierte Eisenstein-Reihe G_k^* durch die ursprüngliche Reihe G_k ersetzt. ◇

Daraus ergeben sich sofort einige Identitäten, zusammengefasst in der

(2.3) Folgerung

$$G_4^{*2} = G_8^* \,, \quad \text{d.h. aber auch} \quad 3 \cdot G_4^2 = 7 \cdot G_8 \,,$$

$$G_4^* \cdot G_6^* = G_{10}^* \,, \quad \text{also} \quad 5 \cdot G_4 \cdot G_6 = 11 \cdot G_{10} \,,$$

$$G_4^{*2} \cdot G_6^* = G_{14}^* \,, \quad \text{also} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot G_4^2 \cdot G_6 = 11 \cdot 13 \cdot G_{14}.$$

◇

Beweis
Nach (4) gilt

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{M}_{k+l} \quad \text{für } k,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Also gehört G_4^{*2} zu $\mathbb{M}_8 = \mathbb{C} \cdot G_8^*$, daher gilt

$$G_4^{*2} = \underbrace{c}_{\neq 0} \cdot G_8^*$$

$$\Rightarrow G_4^{*2}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{G_4^{*2}}(m) \cdot e^{2\pi m\tau} = c \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{G_8^*}(m) \cdot e^{2\pi m\tau} = G_8^*(\tau)$$

$$\overset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Rightarrow} 1 = \alpha_{G_4^{*2}}(0) = c \cdot \underbrace{\alpha_{G_8^*}(0)}_{=1}$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

Der konstante Koeffizient von G_4^{*2} folgt aus dem Cauchy-Produkt (vgl. Bew. zu (1.6)). Analog gehört $G_4^* \cdot G_6^*$ zu $\mathbb{M}_{10} = \mathbb{C} \cdot G_{10}^*$ und $G_4^{*2} \cdot G_6^*$ zu $\mathbb{M}_{14} = \mathbb{C} \cdot G_{14}^*$.

Nach Satz 2.10 aus [3] gilt

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^2}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \text{ , } k \geq 4 \text{ gerade.}$$

Und nach 2.11 aus [3] gilt

$$G_k^* := \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k \text{ , } k \geq 4 \text{ gerade}$$

und damit folgt laut Satz 2.15 aus [3]

$$\begin{aligned} G_k^*(\tau) &= 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \text{ , } k \geq 4 \text{ gerade} \\ &= 1 + \alpha_{G_k^*}(1) \cdot e^{2\pi i \tau} + \alpha_{G_k^*}(2) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \end{aligned}$$

Also erhält man

$$\begin{aligned} G_k^{*2}(\tau) &= 1 + \underbrace{2 \cdot \alpha_{G_k^*}(1)}_{=:\, \alpha_{G_k^{*2}(1)}} \cdot e^{2\pi i \tau} + \underbrace{\left(2 \cdot \alpha_{G_k^*}(2) + (\alpha_{G_k^*}(1))^2\right)}_{=:\, \alpha_{G_k^{*2}(2)}} \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\ G_k^*(\tau) \cdot G_l^*(\tau) &= 1 + \left(\alpha_{G_k^*}(1) + \alpha_{G_l^*}(1)\right) \cdot e^{2\pi i \tau} \\ &\quad + \left(\alpha_{G_k^*}(2) + \alpha_{G_l^*}(2) + \alpha_{G_k^*}(1) \cdot \alpha_{G_l^*}(1)\right) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\ G_k^{*2}(\tau) \cdot G_l^*(\tau) &= 1 + \left(\alpha_{G_k^{*2}}(1) + \alpha_{G_l^*}(1)\right) \cdot e^{2\pi i \tau} \\ &\quad + \left(\alpha_{G_k^{*2}}(2) + \alpha_{G_l^*}(2) + 2 \cdot \alpha_{G_k^*}(1) \cdot \alpha_{G_l^*}(1)\right) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \end{aligned}$$

Für die ersten drei Koeffizienten der eindeutigen Fourier-Entwicklungen von G_k und G_k^* für $k = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ gilt mit Korollar 2.18 aus [3]

$$\alpha_{G_k}(m) = -\alpha_{G_k}(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) \text{ , } k \geq 4 \text{ gerade.}$$

$$\alpha_{G_k^*}(m) = -\alpha_{G_k^*}(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) \text{ , } k \geq 4 \text{ gerade.}$$

k	$\alpha_{G_k^*}(0)$	$\alpha_{G_k^*}(1)$	$\alpha_{G_k^*}(2)$	$\alpha_{G_k}(0)$
4	1	240	$9 \cdot 240$	$\pi^4 \cdot \frac{1}{45}$
6	1	-504	$33 \cdot (-504)$	$\pi^6 \cdot \frac{2}{945}$
8	1	480	$129 \cdot 480$	$\pi^8 \cdot \frac{1}{4725}$
10	1	-264	$513 \cdot (-264)$	$\pi^{10} \cdot \frac{2}{93555}$
12	1	$\frac{65520}{691}$	$2049 \cdot \frac{65520}{691}$	$\pi^{12} \cdot \frac{1382}{638512875}$
14	1	-24	$8193 \cdot (-24)$	$\pi^{14} \cdot \frac{28}{127702575}$

(7)

Also gilt

$$\begin{aligned}
G_4^{*2} &= 1 + (2 \cdot 240) \cdot e^{2\pi i\tau} + \left(2 \cdot 9 \cdot 240 + 240^2\right) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 + 480 \cdot e^{2\pi i\tau} + (9 \cdot 480 + 120 \cdot 480) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 + 480 \cdot e^{2\pi i\tau} + 129 \cdot 480 \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= G_8^*. \\
G_4^* \cdot G_6^* &= 1 + (240 - 504) \cdot e^{2\pi i\tau} + (9 \cdot 240 - 33 \cdot 504 - 240 \cdot 504) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 - 264 \cdot e^{2\pi i\tau} + (-450 \cdot 264 - 63 \cdot 264) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 - 264 \cdot e^{2\pi i\tau} - 513 \cdot 264 \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= G_{10}^*. \\
G_4^{*2} \cdot G_6^* &= 1 + (480 - 504) \cdot e^{2\pi i\tau} + (129 \cdot 480 - 33 \cdot 504 - 2 \cdot 240 \cdot 504) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 - 24 \cdot e^{2\pi i\tau} + (2580 \cdot 24 - 693 \cdot 24 - 10080 \cdot 24) \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= 1 - 24 \cdot e^{2\pi i\tau} - 8193 \cdot 24 \cdot e^{2\pi i 2\tau} + \ldots \\
&= G_{14}^*.
\end{aligned}$$

Das heisst die Konstante c ist jeweils als 1 zu wählen.
Mit

$$G_k^* = \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k = \frac{1}{\alpha_{G_k}(0)} \cdot G_k$$

folgt aus der Tabelle in (7)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{45}{\pi^4}\right)^2 \cdot G_4^2 = \frac{4725}{\pi^8} \cdot G_8 \\
&\Rightarrow 3 \cdot 675 \cdot G_4^2 = 7 \cdot 675 \cdot G_8 \\
&\Rightarrow 3 \cdot G_4^2 = 7 \cdot G_8
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{45}{\pi^4} \cdot G_4 \cdot \frac{945}{2\pi^6} \cdot G_6 = \frac{93555}{2\pi^{10}} \cdot G_{10} \\
&\Rightarrow 5 \cdot 8505 \cdot G_4 \cdot G_6 = 11 \cdot 8505 \cdot G_{10} \\
&\Rightarrow 5 \cdot G_4 \cdot G_6 = 11 \cdot G_{10}
\end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{45}{\pi^4}\right)^2 \cdot G_4^2 \cdot \frac{945}{2\pi^6} \cdot G_6 = \frac{127702575}{28\pi^{14}} \cdot G_{14}$$
$$\Rightarrow 30 \cdot 893025 \cdot G_4^2 \cdot G_6 = 143 \cdot 893025 \cdot G_{14}$$
$$\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot G_4^2 \cdot G_6 = 11 \cdot 13 \cdot G_{14}. \qquad \square$$

(2.4) Lemma
Es gilt

$$\Delta^* = \frac{1}{1728}\left(G_4^{*3} - G_6^{*2}\right) = \frac{691}{762048}\left(G_{12}^* - G_6^{*2}\right) = \frac{691}{432000}\left(G_4^{*3} - G_{12}^*\right). \qquad \diamond$$

Beweis
Aus dem Beweis von Folgerung (2.3) folgt

$$G_k^{*3}(\tau) = 1 + 3 \cdot \alpha_{G_k^*}(1) \cdot e^{2\pi i \tau} + \ldots$$

Es gilt $G_4^{*3} - G_6^{*2} \in \mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^*$, also ein Vielfaches von Δ^*, da

$$\alpha_{G_4^{*3}}(0) = \alpha_{G_6^{*2}}(0) = 1.$$

Analog sind $G_{12}^* - G_6^{*2}$ und $G_4^{*3} - G_{12}^* \in \mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^*$, unterscheiden sich also von Δ^* nur um einen konstanten Vorfaktor. Also gilt, da $\Delta^*(\tau) = 1 \cdot e^{2\pi i \tau} + \ldots$, also $\alpha_{\Delta^*}(1) = 1$:

$$\alpha_{G_4^{*3} - G_6^{*2}}(1) = 3 \cdot \alpha_{G_4^*}(1) - 2 \cdot \alpha_{G_6^*}(1) = 3 \cdot 240 + 2 \cdot 504 = 1728$$
$$\Rightarrow \Delta^* = \frac{1}{1728}\left(G_4^{*3} - G_6^{*2}\right)$$
$$\alpha_{G_{12}^* - G_6^{*2}}(1) = \alpha_{G_{12}^*}(1) - 2 \cdot \alpha_{G_6^*}(1) = \frac{65520}{691} + 2 \cdot 504 = \frac{762048}{691}$$
$$\Rightarrow \Delta^* = \frac{691}{762048}\left(G_{12}^* - G_6^{*2}\right)$$
$$\alpha_{G_4^{*3} - G_{12}^*}(1) = 3 \cdot \alpha_{G_4^*}(1) - \alpha_{G_{12}^*}(1) = 3 \cdot 240 - \frac{65520}{691} = \frac{432000}{691}$$
$$\Rightarrow \Delta^* = \frac{691}{432000}\left(G_4^{*3} - G_{12}^*\right). \qquad \square$$

Aus diesem Lemma (2.4) kann man direkt folgern.

(2.5) Korollar (Ramanujan-Kongruenz)
Es gilt

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \qquad \diamond$$

Beweis
Nach Satz 3.6 aus [3] gilt

$$\Delta^*(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},\ \tau \in \mathbb{H},$$

und mit

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{11}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \quad \text{und} \quad B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

kann man schreiben

$$G_{12}^* = 1 + \frac{1008 \cdot 65}{691} \cdot A \quad \text{und} \quad G_6^* = 1 - 504 \cdot B.$$

Mit

$$G_6^{*2} = 1 - 1008 \cdot B + 254016 \cdot B^2$$

folgt

$$G_{12}^* - G_6^{*2} = \frac{1008 \cdot 65}{691} \cdot A + 1008 \cdot B - 254016 \cdot B^2.$$

Und dann folgt mit Lemma (2.4)

$$\begin{aligned}\Delta^* &= \frac{691}{762048} \cdot \left(\frac{1008 \cdot 65}{691} \cdot A + \frac{1008 \cdot 691}{691} \cdot B - \frac{254016 \cdot 691}{691} \cdot B^2 \right) \\ &= \frac{65}{756} \cdot A + \frac{691}{756} \cdot B - \frac{691}{3} \cdot B^2.\end{aligned}$$

Man multipliziert jetzt beide Seiten mit 756

$$\Rightarrow 756 \cdot \Delta^* = 65 \cdot A + 691 \cdot \underbrace{\left(B - 252 \cdot B^2\right)}_{=:\, F}$$

wobei F eine Fourier-Reihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ bezeichne. Aus dem Cauchy-Produkt und der Definition von B folgt, dass die Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen.
Und dann mit (mod 691) gilt

$$\begin{aligned}&65 \cdot \Delta^* \equiv 65 \cdot (A \pmod{691}) \\ &\Rightarrow \Delta^* \ \equiv A \pmod{691}, \text{ da } \operatorname{ggT}(65, 691) = 1.\end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich folgt

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691}. \qquad \square$$

§3 Basen von $\mathbb{M}_k$

In diesem Abschnitt werden mit den bisherigen Ergebnissen aus §1 und §2 Basen von $\mathbb{M}_k$ bestimmt. Jetzt kann man die Ergebnisse aus Folgerung (2.1) weiterführen und allgemein für gerades $k \geq 0$ die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ beschreiben. Um die Formeln etwas zu vereinfachen setzt man

$$G_0 := G_0^* := 1\ ,\ G_2 := G_2^* := 0$$

und es sei stets $k \geq 0$ gerade. Eine Iteration von Lemma (1.6) ergibt das

(3.1) Lemma
Es gilt

$$\mathbb{M}_k = \bigoplus_{0 \leq r \leq \left[\frac{k}{12}\right]} \mathbb{C} \cdot G^*_{k-12r} \cdot \Delta^{*r}. \tag{8}$$

◇

Beweis
Die Aussage in (8) wird durch eine Induktion nach k bewiesen. Es gilt

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \Delta^* \cdot \mathbb{M}_{k-12}.$$

(IA): (8) gilt mit Satz (1.3) und Folgerung (2.1) für gerades k, $0 \leq k \leq 26$.
(IV): Die Behauptung gilt für ein gerades $k \in \mathbb{N}_0$.
(IS): $k \to k+12$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{k+12} &= \mathbb{C} \cdot G^*_{k+12} \oplus \Delta^* \cdot \mathbb{M}_k \\
&\overset{IV}{=} \mathbb{C} \cdot G^*_{k+12} \oplus \Delta^* \cdot \left(\bigoplus_{0 \leq r \leq \left[\frac{k}{12}\right]} \mathbb{C} \cdot G^*_{k-12r} \cdot \Delta^{*r} \right) \\
&= \mathbb{C} \cdot G^*_{k+12} \bigoplus_{0 \leq r \leq \left[\frac{k}{12}\right]} \mathbb{C} \cdot G^*_{k-12r} \cdot \Delta^{*(r+1)} \\
&= \mathbb{C} \cdot G^*_{k+12} \bigoplus_{1 \leq r \leq \left[\frac{k}{12}\right]+1} \mathbb{C} \cdot G^*_{k-12(r-1)} \cdot \Delta^{*r} \\
&= \bigoplus_{0 \leq r \leq \left[\frac{k+12}{12}\right]} \mathbb{C} \cdot G^*_{k+12-12r} \cdot \Delta^{*r}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage in (8) nach dem Induktionsprinzip gezeigt. □

Analog zu $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k$ hat man den

(3.2) Satz
Für jede Lösung r, s von

$$4r + 6s = k,\ k \geq 4, \tag{9}$$

in natürlichen Zahlen r, s gilt

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{S}_k \tag{10}$$

und es gibt solche Lösungen r, s. ◇

Beweis
Die Lösbarkeit von (9) ist für $k \equiv 0 \pmod 4$ klar, also: $k = 4r$ für $r \in \mathbb{N}$.
Für den Fall $k \equiv 2 \pmod 4$, also $k = 4m + 2 \geq 6$ mit $m \in \mathbb{N}$, kann man zum Beispiel: $r = m - 1$ und $s = 1$ wählen.
Damit folgt

$$\begin{aligned} k &= 4 \cdot (m-1) + 6 \cdot 1 \\ &= 4m + 2. \end{aligned}$$

Noch zu zeigen ist (10).
Für $f \in \mathbb{M}_k$ definiert man $g := f - \alpha_f(0) \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \in \mathbb{M}_k$. Damit folgt mithilfe des Cauchy-Produkts

$$\begin{aligned} &\alpha_g(0) = \alpha_f(0) - \alpha_f(0) \cdot \alpha_{G_4^{*r}}(0) \cdot \alpha_{G_6^{*s}}(0) = 0 \\ &\Rightarrow g \in \mathbb{S}_k \quad \Rightarrow f = \alpha_f(0) \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} + g. \end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{S}_k$, da außerdem $\alpha_{G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}}(0) = 1$ und somit $\mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \cap \mathbb{S}_k = \{0\}$. □

(3.3) Satz
Für $k \geq 4$ gerade gilt

$$\mathbb{M}_k = \bigoplus_{r,s} \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \tag{11}$$

wobei über alle natürlichen Zahlen r, s mit $4r + 6s = k$ zu summieren ist. ◇

Beweis
Die Aussage in (11) wird durch zwei Induktionen nach k bewiesen.

1. Induktion nach k um zu zeigen, dass die Formen $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ mit $4r + 6s = k$ den Vektorraum $\mathbb{M}_k$ aufspannen.

2. Induktion nach k um zu zeigen, dass die Anzahl der Paare $(r\ ,\ s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $4r + 6s = k$ gerade $\left[\frac{k}{12}\right]$ ist, falls $k \equiv 2 \pmod{12}$ bzw. $\left[\frac{k}{12}\right]$ + 1, falls $k \not\equiv 2 \pmod{12}$.

Es gilt nach Satz (3.2) und Lemma (1.6)

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{M}_{k-12} \cdot \Delta^* \quad \text{mit} \quad \Delta^* = \frac{1}{1728}\left(G_4^{*3} - G_6^{*2}\right).$$

Zur 1. Induktion:
(IA): (11) gilt mit Satz (1.3) und Folgerung (2.3) für gerades k, $4 \leq k < 12$.
(IV): Die Behauptung gilt für ein gerades $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$.
(IS): $k \to k + 12$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{k+12} &= \mathbb{C} \cdot G_4^{*m} \cdot G_6^{*n} \oplus \mathbb{M}_k \cdot \Delta^* \quad \text{mit} \quad 4m + 6n = k + 12 \\
&\overset{IV}{=} \mathbb{C} \cdot G_4^{*m} \cdot G_6^{*n} \bigoplus_{r,s} \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \cdot \frac{1}{1728}\left(G_4^{*3} - G_6^{*2}\right) \quad \text{mit} \quad 4r + 6s = k \\
&= \mathbb{C} \cdot G_4^{*m} \cdot G_6^{*n} \bigoplus_{r,s} \mathbb{C} \cdot \left(G_4^{*(r+3)} \cdot G_6^{*s} - G_4^{*r} \cdot G_6^{*(s+2)}\right) \\
&\text{mit} \quad 4(r+3) + 6s = k + 12 \quad \text{und} \quad 4r + 6(s+2) = k + 12 \\
&\subseteq \sum_{m,n} \mathbb{C} \cdot G_4^{*m} \cdot G_6^{*n} \quad \text{mit} \quad 4m + 6n = k + 12.
\end{aligned}$$

Zur 2. Induktion:
(IA):

$$k = 4 \quad \Rightarrow 4 \not\equiv 2 \pmod{12} \text{ und } \left[\frac{4}{12}\right] + 1 = 1.$$

Es gibt nur ein Paar $(r\ ,\ s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $4r + 6s = 4$, nämlich (1 , 0).
Analog ebenso für $k = 6$, 8 und 10.

$$k = 12 \quad \Rightarrow 12 \not\equiv 2 \pmod{12} \text{ und } \left[\frac{12}{12}\right] + 1 = 2.$$

Es gibt also zwei Paare $(r\ ,\ s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $4r + 6s = 12$, nämlich (3 , 0) und (0 , 2).

$$k = 14 \quad \Rightarrow 14 \equiv 2 \pmod{12} \text{ und } \left[\frac{14}{12}\right] = 1.$$

Es gibt nur ein Paar $(r\ ,\ s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $4r + 6s = 14$, nämlich (2 , 1).

(IV): Die Behauptung gilt für ein gerades $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$.
(IS): $k \to k+12$:

$$4m + 6n = k + 12 \quad \text{mit} \quad (m,n) \in \mathbb{N}_0 \text{ x } \mathbb{N}_0$$
$$\Leftrightarrow 4(m-3) + 6n = k$$
$$\Leftrightarrow 4r + 6n = k \quad \text{mit} \quad r = m-3.$$

1. Fall: $m \geq 3$
Nach Induktionsvorraussetzung gilt
für $k \equiv 2 \pmod{12}$: Anzahl der Paare = $\left[\frac{k}{12}\right]$,
für $k \not\equiv 2 \pmod{12}$: Anzahl der Paare = $\left[\frac{k}{12}\right]$ + 1.

2. Fall: $m < 3$

a) $m = 0$:

$$4(0-3) + 6n = k$$
$$\Leftrightarrow 6n = k + 12 \quad \Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod{6}$$

b) $m = 1$:

$$4(1-3) + 6n = k$$
$$\Leftrightarrow 6n = k + 8 \quad \Leftrightarrow k \equiv 4 \pmod{6}$$

c) $m = 2$:

$$4(2-3) + 6n = k$$
$$\Leftrightarrow 6n = k + 4 \quad \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{6}$$

Nur einer der drei Fälle a), b) oder c) aus dem 2. Fall kann eintreffen, wodurch man ein Paar mehr erhält.
Also erhält man
für $k \equiv 2 \pmod{12}$: Anzahl der Paare = $\left[\frac{k}{12}\right]$ (+1),
für $k \not\equiv 2 \pmod{12}$: Anzahl der Paare = $\left[\frac{k}{12}\right]$ + 1 (+1).
Damit sind die $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ eine Basis von $\mathbb{M}_k$, da mit der Dimensionsformel (1.8) die Dimension genau der Anzahl dieser Elemente entpricht. □

Man betrachte nun den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\mathbb{M} := \bigoplus_{k \text{ gerade}} \mathbb{M}_k = \mathbb{C} \oplus \mathbb{M}_4 \oplus \mathbb{M}_6 \oplus \cdots . \tag{12}$$

(3.4) Bemerkung
Wegen $\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_l \subset \mathbb{M}_{k+l}$ ist $\mathbb{M}$ eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement, die nach (12) *graduiert* ist. $\diamond$

Aus der Darstellung als direkte Summe im Satz (3.3) folgert man das

(3.5) Korollar
Es gilt $\mathbb{M} = \mathbb{C}\left[G_4^*, G_6^*\right]$ und G_4^*, G_6^* sind *algebraisch unabhängig*. $\diamond$

Beweis
Mit dem Satz (3.3) weiß man, dass die Formen $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{M}_k$ bilden mit $4r + 6s = k$.
Nun wird gezeigt, dass G_4^*, G_6^* algebraisch unabhängig sind, wodurch dann $\mathbb{M}$ dem Polynomring $\mathbb{C}\left[G_4^*, G_6^*\right]$ entspricht.
$\mathrm{P}(G_4^*, G_6^*) \in \mathbb{C}\left[G_4^*, G_6^*\right]$ mit entsprechender Graduierung $4r + 6s = k$.
Zu zeigen:

$$\underbrace{\mathrm{P}\left(G_4^*, G_6^*\right)}_{\in\, \mathbb{M}_k} \equiv 0 \quad \text{wobei } \mathbb{M}_k \text{ die Basis } G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \text{ hat, so ist } \mathrm{P} = 0.$$

Also

$$\mathrm{P}\left(G_4^*, G_6^*\right) = \sum_{r,s} \alpha_{r,s} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{r,s} = 0 \quad \forall\ (r,s) \text{ mit } 4r + 6s = k,$$

da $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ eine Basis von $\mathbb{M}_k$ ist.
Daraus folgt $\mathrm{P} = 0$, und damit sind G_4^*, G_6^* algebraisch unabhängig.
Wodurch man die Darstellung $\mathbb{M} = \mathbb{C}\left[G_4^*, G_6^*\right]$ als Polynomring erhält. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl., Springer 2007

[2] Modulformen von Dominik Hohmann

[3] Beispiele ganzer Modulformen von Andreas Freh

[4] Die Gewichtsformel von Chantal Höller