Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 20.04.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 1

Abgabe bis Dienstag, den 27.04.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (4=1+1+2 Punkte)

(a) Es sei K ein Körper. Ein Bewertungsring von K ist ein Teilring $\mathcal{O} \subsetneq K$ sodass für alle $x \in K$ gilt: $x \in \mathcal{O}$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Zeigen Sie, dass ein Bewertungsring stets ein lokaler Ring ist (d.h. es gibt genau ein maximales Ideal).

(b) Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b\}$ ein Bewertungsring von $\mathbb{Q}$ ist. Bestimmen Sie das maximale Ideal $\mathcal{P}$ in $\mathbb{Z}_{(p)}$ und den Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathcal{P}$.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Bewertungsring von $\mathbb{Q}$ von der Form $\mathbb{Z}_{(p)}$ für eine Primzahl p ist.

Aufgabe 2 (4=2,5+1,5 Punkte)

Es sei K ein Körper und F ein Funktionenkörper über K mit Konstantenkörper K_F.

(a) Es sei $x \in F \backslash K_F$. Zeigen Sie, dass dann $[K_F : K] = [K_F(x) : K(x)]$ gilt. Folgern Sie, dass der Konstantenkörper eine endliche Erweiterung von K ist.

(b) Es sei jetzt $F = \mathbb{R}(x, y)$ mit $x^2 = -y^2 - 1$. Zeigen Sie, dass $K_F = \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (4=1,5+1+1,5 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{F}_7$ und $F = K(x, y)$ mit $y^2(x^4 + 2x^2 + 1) + x^2 + 5x + 1 = 0$.

(a) Bestimmen Sie K_F und zeigen Sie, dass F ein rationaler Funktionenkörper über K_F ist. Ab jetzt wird F als Funktionenkörper über K_F betrachtet.

(b) Was sind die Pole und Nullstellen von y? Welche Ordnungen haben diese? Geben Sie auch jeweils den Grad des Pols bzw. der Nullstelle an.

(c) Betrachten Sie $S := \{x,\ \infty,\ x-2,\ x^3+2\} \subseteq \mathbb{P}(F/K_F)$. Bestimmen Sie für jedes $P \in S$ den Restklassenkörper $\mathcal{O}_P/\mathcal{P}_P$ und die Restklasse $y(P)$ von y.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{Q}(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über $\mathbb{Q}$ und es seien folgende Stellen P_i von $F/\mathbb{Q}$, Elemente x_i in F und ganze Zahlen r_i gegeben:

$$\begin{array}{rcc rcc rcr}
P_1 & = & x^2+1 & x_1 & = & \frac{1}{x+1} & r_1 & = & 0 \\
P_2 & = & x & x_2 & = & 1 & r_2 & = & 1 \\
P_3 & = & \infty & x_3 & = & 0 & r_3 & = & -1.
\end{array}$$

Finden Sie mit Hilfe des schwachen Approximationssatzes ein $f \in F$ mit $v_{P_i}(f - x_i) = r_i$, für $i = 1, 2, 3$.