LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 27.04.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 2

Abgabe bis Dienstag, den 04.05.2010, 14:00 Uhr

Lösen Sie die Aufgaben auf diesem Übungsblatt ohne Verwendung der Methoden aus Kapitel 4!

Aufgabe 1 (4=3+1 Punkte)

Es sei K ein Körper und $F = K(x)$ ein rationaler Funktionenkörper.

(a) Zeigen Sie: Jeder Divisor $D \in \mathscr{D}_F$ vom Grad Null ist ein Hauptdivisor.

(b) Bestimmen Sie die Divisorenklassengruppe von F/K.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $F = K(x, y)$ ein Funktionenkörper mit $x^2 + y^2 = -1$. Bestimmen Sie das Geschlecht von F.

Hinweis: Betrachten Sie die linearen Räume zu Vielfachen des Polstellendivisor von x, um das Geschlecht nach oben abzuschätzen.

Aufgabe 3 (4=1+1+1+1 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F = K(x, y)$ ein Funktionenkörper, wobei $y^2 = f(x)$ für ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_+$, gelte.

(a) Zeigen Sie, dass x und y die gleiche Polstellenmenge besitzen.

(b) Zeigen Sie, dass diese Polstellenmenge nur eine Stelle $P \in \mathbb{P}(F/K)$ enthält.

(c) Es sei $r > m$. Zeigen Sie, dass $\{1,\ x, \ldots, x^r,\ y,\ xy, \ldots, x^{r-m-1}y\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathscr{L}(2rP)$ bildet.

(d) Folgern Sie, dass $g \leqslant m$ für das Geschlecht g von F gilt.

Aufgabe 4 (4=2+2 Punkte)

Es sei K ein Körper und $F = K(x)$ ein rationaler Funktionenkörper.

(a) Es sei weiter $D \in \mathscr{D}_F$ ein Divisor. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathscr{L}(D)$ und zeigen Sie so explizit, dass $\ell(D) = \deg(D) + 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie explizit, dass $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_F(0) + \mathcal{E}(F)$ gilt.