Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 04.05.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 3

Abgabe bis Dienstag, den 11.05.2010, 14:00 Uhr

Auf diesem Blatt bezeichne K stets einen Körper und F/K einen Funktionenkörper mit $K = K_F$.

Aufgabe 1 (4=3+1 Punkte)

(a) Es seien $D_1,\ D_2 \in \mathscr{D}_F$. Zeigen Sie: $\Omega_F(D_1) \cap \Omega_F(D_2) = \Omega_F(\max(D_1, D_2))$

(b) Es sei $K(x)/K$ ein rationaler Funktionenkörper. Geben Sie einen kanonischen Divisor in $\mathscr{D}_{K(x)}$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $g_{F/K} > 0$ und es sei $P \in \mathbb{P}(F/K)$ eine Stelle vom Grad 1. Zeigen Sie: $\ell(P) = 1$. Überlegen Sie sich dazu zuerst, dass $\ell(P) \neq 0$ ist und führen Sie dann $\ell(P) > 1$ zum Widerspruch.

Aufgabe 3 (4=1+2+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $\Omega_F(0) = \{0 \neq \omega \in \Omega_F \mid (\omega) \geqslant 0\} \cup \{0\}$.

(b) Zeigen Sie: Existiert ein Divisor $D > 0$ mit $\ell(D) = \deg(D) + 1 > 0$, so hat F/K Geschlecht Null.

(c) Es sei $g_{F/K} \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass die kanonische Klasse primitiv ist, d.h. $\min\limits_{\omega \in \Omega_F(0)} \{(\omega)\} = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $g_{F/K} = 0$ und $d_*(F/K) = 2$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $F = K(x, y)$ mit $q(x, y) = 0$ für ein $q \in K[X, Y]$ vom Gesamtgrad 2 gilt. Zeigen Sie, dass die zugehörige Quadrik keinen K-rationalen Punkt besitzt, d.h. es gilt $q(a, b) \neq 0$ für alle $a, b \in K$.

Anmerkung: Insbesondere ist im Fall K algebraisch abgeschlossen jeder Funktionenkörper vom Geschlecht Null rational.