Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 15.06.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 8

Abgabe bis Dienstag, den 22.06.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei F/K ein Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper $K_F = K$. Es sei weiter E/F eine Galoiserweiterung mit $K_E = K$ und $G := \mathrm{Gal}(E/F)$, sodass $\mathrm{char}(K)$ die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt. Zeigen Sie, dass dann die folgende Gleichheit gilt:

$$g_{E/K} - 1 = |G|(g_{F/K} - 1) + \frac{1}{2}|G| \sum_{P \in \mathbb{P}(F/K)} \frac{e(\tilde{P}|P) - 1}{e(\tilde{P}|P)} \deg(P),$$

wobei $\tilde{P}$ für jedes $P \in \mathbb{P}(F/K)$ eine beliebige Fortsetzung von P nach E bezeichne.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei K ein vollkommener Körper und $F/K(x)$ eine endliche separable Erweiterung vom Grad $n > 1$ mit $K_F = K$. Desweiteren gelte $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\mathrm{char}(K) > n$. Es sei V die Menge der Stellen P in $\mathbb{P}(K(x)/K)$, die eine Fortsetzung $\tilde{P}$ in F besitzen, welche über P verzweigt. Schließlich definieren wir $r := \sum_{P \in V} \deg(P)$. Zeigen Sie, dass immer $r \geqslant 2$ und im Fall $g_{F/K} > 0$ sogar $r \geqslant 3$ gilt.

Aufgabe 3 (6=1+1+4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Relativgeschlechtsformel das Geschlecht der folgenden Körper:

(a) $L = \mathbb{F}_5(x, y)$ mit $y^2 - x^2 y + x = 0$ (vergleiche Blatt 7, Aufgabe 2).

(b) $L = K(x, y, z)$ mit $y^2 = x - a$ und $z^2 = x - b$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ und $a \neq b \in K$ (vergleiche Blatt 7, Aufgabe 3).

(c) $L = \mathbb{R}(x, y)$ mit $y^2 + x^4 + x^2 + 1 = 0$. Zeigen Sie hier auch noch, dass alle Stellen in $\mathbb{P}(L/K_L)$ Grad 2 haben.

Aufgabe 4 (5=1+1+1+1+1 Punkte)

Es sei F/K ein Funktionenkörper mit $K_F = K$ vollkommen und $\partial \in \mathrm{Der}_K(F)$ eine Derivation.

(a) Zeigen Sie: $C := \{a \in F \mid \partial(a) = 0\}$ ist ein Körper.

(b) Zeigen Sie: Falls $\mathrm{char}(F) = 0$ gilt, so ist C in F algebraisch abgeschlossen.

(c) Es sei jetzt $F = \mathbb{C}(x)$ und $\partial = \partial_x = \frac{d}{dx}$, $E = F(y)$ mit $y^2 = x + i$. Bestimmen Sie $\partial_E(y)$ für die eindeutige Fortsetzung ∂_E von ∂ auf E.

(d) Zeigen Sie, dass $d : F \to \Delta_{F/K}$ eine K-Derivation ist.

(e) Zeigen Sie, dass für $x, y \in F$ und $c \in K$ genau dann $dy = cdx$ gilt, wenn $y = cx + z$ für ein nicht separierendes Element $z \in F$ gilt.