Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 22.06.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 9

Abgabe bis Dienstag, den 29.06.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6=1+1+1+2+1 Punkte)

Es sei K ein vollkommener Körper der Charakteristik $p > 0$ und F/K ein Funktionenkörper mit $K_F = K$ und separierender Variable x.

(a) Zeigen Sie: Jedes Element $z \in F$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = \sum_{i=0}^{p-1} u_i^p x^i$ mit $u_0, \ldots, u_{p-1} \in F$.

(b) Wir definieren den Cartier Operator $C : \Delta_{F/K} \to \Delta_{F/K}$, $\delta = (\sum_{i=0}^{p-1} u_i^p x^i)\,\mathrm{d}x \mapsto u_{p-1}\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass C eine surjektive Abbildung mit $C(\delta + \delta') = C(\delta) + C(\delta')$ und $C(z^p\delta) = zC(\delta)$ für alle $\delta, \delta' \in \Delta_{F/K}$ und $z \in F$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für ein Element $z = \sum_{i=0}^{p-1} u_i^p x^i \in F$ gilt: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{p-1} i u_i^p x^{i-1}$. Folgern Sie, dass $C(\delta) = 0$ für alle exakten Differentiale $\delta \in \Delta_{F/K}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $C(\frac{dz}{z}) = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ für alle $z \in F^\times$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass C unabhängig von der Wahl der separierenden Variable x ist.

Hinweis zu Teilaufgabe (d): Zeigen Sie, dass $C(\frac{dz}{z}) = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ äquivalent zu $C(z^{p-1}\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z$ ist und betrachten Sie die Menge $M = \{z \in F \mid C(z^{p-1}\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z\}$. Zeigen Sie, dass für Elemente in $M\backslash\{0\}$ auch deren Inverse und Produkte wieder in M liegen. Zeigen Sie weiter, dass mit $z \in M$ auch $z + 1 \in M$ gilt und M abgeschlossen unter Addition ist. Zeigen Sie schließlich, dass $F^p \subseteq M$ und $x \in M$ gilt und schließen Sie, dass $M = F$ gilt.

Aufgabe 2 (4=2+2 Punkte)

(a) Es sei K ein vollkommener Körper und $F = K(x, y)$ mit $y^2 = x^3 + x$. Zeigen Sie, dass x genau eine Polstelle $P \in \mathbb{P}(F/K)$ hat und $t := \frac{x}{y}$ in $\mathbb{P}(F/K)$ eine Uniformisierende zu v_P ist. Bestimmen Sie das Residuum von x an P bezüglich t.

(b) Es sei K ein vollkommener Körper, F/K ein Funktionenkörper mit $K_F = K$ und separierender Variable $x \in F$ und es sei $P \in \mathbb{P}(F/K)$ mit $\deg(P) = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{res}_P(x^{-1}\,\mathrm{d}x) = v_P(x)$ gilt.

Aufgabe 3 (6=2,5+3,5 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Es sei F/K ein Funktionenkörper mit $K_F = K$ und $\delta \in \Delta_{F/K}$. Zeigen Sie, dass für den Differentialdivisor des zugehörigen Weylschen Differentials ω_δ folgendes gilt: $(\omega_\delta) = \sum_{P \in \mathbb{P}(F/K)} v_P(\delta)P$.

(b) Es sei jetzt $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $F = K(x, y)$ mit $y^2 = \prod_{i=1}^{2m+1}(x - a_i)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Elemente $a_i \in K$. Bestimmen Sie den Differentialdivisor von $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ und folgern Sie, dass $g_{F/K} = m$ gilt.