Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 29.06.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 10

Abgabe bis Dienstag, den 06.07.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (4=1+1,5+1,5 Punkte)

Es sei F ein Funktionenkörper über $K_F = \mathbb{F}_5$ mit $g_{F/\mathbb{F}_5} = 1$ und genau 10 rationalen Stellen.

(a) Bestimmen Sie das L-Polynom und die Klassenzahl von $F/\mathbb{F}_5$.

(b) Wieviele effektive Divisoren vom Grad 1, 2 und 3 gibt es jeweils in $\mathscr{D}_F$?

(c) Wieviele Stellen vom Grad 2 und 3 gibt es jeweils in $\mathbb{P}(F/\mathbb{F}_5)$?

Aufgabe 2 (4=2+2 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{F}_3(x, y)$ mit $y^2 = x^3 - x$.

(a) Bestimmen Sie das L-Polynom $L_{F/K_F}(t)$ und die Klassenzahl h_{F/K_F} von F.

(b) Für $r \in \mathbb{N}$ sei jetzt $F_r = \mathbb{F}_{3^r}F$. Bestimmen Sie $L_r := L_{F_r/K_{F_r}}(t)$ und $h_r := h_{F_r/K_{F_r}}$.

Aufgabe 3 (4=2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Zu jedem linearen Code gibt es einen äquivalenten Code mit reduzierter Erzeugermatrix.

(b) Für $i = 1, 2$ seien C_i lineare $[n_i, k_i, d_i]_q$-Codes. Zeigen Sie: $C_1 \oplus C_2 := \{(x_1, x_2) \mid x_i \in C_i\}$ ist ein linearer $[n_1 + n_2, k_1 + k_2, d]_q$ Code mit $d = \min\{d_1, d_2\}$. Falls $n_1 = n_2$ gilt definieren wir weiter $C := \{(x_1, x_1 + x_2) \mid x_i \in C_i\}$. Zeigen Sie, dass C ein linearer $[2n_1, k_1 + k_2, d']_q$-Code mit $d' = \min\{2d_1, d_2\}$ ist.

Aufgabe 4 (4=1+1,5+1,5 Punkte)

Es sei $C \leqslant \mathbb{F}_q^n$ ein Code mit Minimaldistanz $d > n\frac{q-1}{q}$ und Kardinalität $c = |C|$. In dieser Aufgabe soll die folgende Schranke bewiesen werden:

$$c \leqslant \frac{d}{d - n\frac{q-1}{q}}.$$

(a) Es sei $s = \sum_{(x,y) \in C \times C} d(x, y)$. Zeigen Sie, dass es ausreicht zu zeigen, dass $s \leqslant c^2 n \frac{q-1}{q}$ gilt.

(b) Für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $a \in \mathbb{F}_q$ sei $t_i(a) := |\{x \in C \mid x_i = a\}|$. Zeigen Sie, dass $s = \sum_{i=1}^n \sum_{a \in \mathbb{F}_q} t_i(a)(c - t_i(a))$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{a \in \mathbb{F}_q} t_i(a) = c$ für alle i gilt und führen Sie den Beweis der Abschätzung aus (a) mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.