Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 06.07.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 11

Abgabe bis Dienstag, den 13.07.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6=2+2+1+1 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, q) = 1$.

(a) Bestimmen Sie alle zyklischen Codes der Länge drei über $\mathbb{F}_2$ mit Erzeugermatrizen.

(b) Es seien $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, q) = 1$. Zeigen Sie: Jeder zyklische Code der Länge n über $\mathbb{F}_q$ besizt ein idempotentes erzeugendes Polynom.

(c) Seien C ein Code wie in Aufgabenteil (b) und $e = \sum_{i=0}^{n-1} e_i X^i$ ein erzeugendes Idempotent. Zeigen Sie, dass dann $\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_{n-2} & e_{n-1} \\ e_{n-1} & e_0 & \dots & e_{n-3} & e_{n-2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{n-k+1} & & \dots & & e_{n-k} \end{pmatrix}$ eine Erzeugermatrix ist.

(d) Bestimmen Sie ein erzeugendes Idempotent zum Code der Länge 7 über $\mathbb{F}_2$ mit erzeugendem Polynom $1 + x^2 + x^3 + x^4$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $F/\mathbb{F}_q$ ein algebraischer Funktionenkörper und $C_{\mathscr{L}}(D, G)$ ein geometrischer Goppa-Code der Länge n und Minimaldistanz d. Zeigen Sie:

$$d = n - \max\{\deg(B) | B \in \mathscr{D}_F,\ B \geqslant 0,\ D - B \geqslant 0,\ \ell(G - B) > 0\}.$$

Aufgabe 3 (4=2,5+1,5 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{F}_{q^2}$ und $F = K(x, y)$ mit $x^{q+1} = y^q + y$ ein algebraischer Funktionenkörper.

(a) Zeigen Sie, dass F genau $q^3 + 1$ rationale Stellen besitzt und dass der Polstellendivisor von y in $F/K(y)$ voll verzweigt.

(b) Es seien jetzt $q = 3$ und P die Stelle, die über $(y)_\infty \in \mathbb{P}(K(y)/K)$ liegt. Es seien weiter $P_1, \dots, P_{3^3}$ die anderen rationalen Stellen von F. Bestimmen Sie die Dimension und Minimaldistanz des Goppa-Codes $C := C_{\mathscr{L}}(P_1 + \dots + P_{27},\ 20P)$ über F.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Genießen Sie den Sommer.