Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 13.07.2010

Algebraische Funktionenkörper, Übungsblatt 12

Abgabe bis Dienstag, den 20.07.2010, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein linearer Code C genau dann pseudorational ist, wenn der duale Code $C^\perp$ pseudorational ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $(n, q) = 1$ und es sei $w \in \mathbb{F}_{q^m}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Es sei weiter $C = \Gamma(a, g) \leqslant \mathbb{F}_q^n$ der klassische Goppa-Code zu $g = X^{d-1} \in \mathbb{F}_{q^m}[X]$ für ein $d \leqslant n$ und $a = (1, w, \ldots, w^{n-1})$. Zeigen Sie, dass C ein zyklischer Code ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Elemente von $\mathbb{F}_4$ seien mit $0,\ 1,\ a$ und b bezeichnet. Es seien $F = \mathbb{F}_4(x, z)$ mit $z^2 + z = x^3$ ein Kongruenzfunktionenkörper, $P \in \mathbb{P}(F/\mathbb{F}_4)^{(1)}$ Polstelle von x, $G = 5P$ und $D = P_0 + P_0^\tau + P_1 + P_1^\tau + P_a + P_a^\tau + P_b + P_b^\tau$ die Summe der anderen rationalen Stellen von F, wobei $P_i + P_i^\tau$ der Nullstellendivisor von $x - i \ \ (i \in \mathbb{F}_4)$, $P_1 + P_a + P_b$ der Nullstellendivisor von $z - a$ und P_0 Nullstelle von z sind. Weiter seien $C^* = C^*(D, G)$ ein dualer Goppa-Code über F und

$$(0, 1, a^2, 0, 0, 1, 1, 0)$$

ein Wort, das bei einer Übertragung eines Codeworts c von C^* empfangen wurde. Bestimmen Sie c mit Hilfe des Decodieralgorithmus.

Aufgabe 4 (4=1,5+2,5 Punkte)

(a) Es seien $C \leqslant \mathbb{F}_q^n$ ein linearer Code und $\mathrm{Sym}(C)$ die Symmetriegruppe von C. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Sym}(C) = \mathrm{Sym}(C^\perp).$$

(b) Zeigen Sie, dass jeder selbstduale $[2n, n, 2]_2$-Code, dessen Symmetriegruppe transitiv ist, äquivalent zu dem Code

$$C := \{(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}_2\}$$

ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Sym}(C)$ ein semidirektes Produkt von S_n mit Z_2 ist.