Metrische Räume und stetige Abbildungen

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 19. 04. 2010

René Koch, Stefan Lotterstedt

In der Vorlesung Analysis I haben wir uns mit der Stetigkeit von reellen (komplexen) Abbildungen und der Konvergenz von reellen (komplexen) Folgen beschäftigt. In unserem Vortrag wollen wir diese Konzepte verallgemeinern.

Dies geschieht, indem wir den Stetigkeits- und Konvergenzbegriff auf Folgen und Abbildungen übetragen, die in Räumen definiert sind, deren Elemente man einen Abstand voneinander zuordnen kann.

Des Weiteren werden wir auf eine spezielle Art stetiger Funktionen eingehen, mit deren Hilfe es möglich ist, diese Räume zu klassifizieren.

In diesem allgemeinen Rahmen werden wir bekannte Resultate erneut beweisen und dabei feststellen, dass die Beweisideen ähnlich zu denen sind, die wir bei Abbildungen oder Folgen von Zahlen kennengelernt haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume **2**

1.1 Definition und Beispiele 2

1.2 Folgen 6

2 Stetigkeit **8**

3 Homöomorphismen **10**

§1 Metrische Räume

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des metrischen Raumes einführen und an einigen Beispielen illustrieren.

— Definition und Beispiele —

(1.1) Definition (Metrischer Raum)
Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$, und $d : M \times M \to [0, \infty)$ eine Abbildung. Das Paar (M, d) heißt *metrischer Raum*, falls d folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ erfüllt:

(i) **Positiv-Definitheit:**
$d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) **Symmetrie:**
$d(x, y) = d(y, x)$

(iii) **Dreiecksungleichung:**
$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Die Funktion d nennt man *Metrik* auf M. Im Folgenden werden wir verkürzend statt (M, d) oft M als metrischen Raum bezeichnen. ◇

(1.2) Bemerkung
Man muss in der Definition die Nichtnegativität nicht fordern, da diese bereits von (i) und (iii) impliziert wird.
Seien $x, y \in M$ beliebig.
Es folgt $0 \overset{\text{(i)}}{=} d(x, x) \overset{\text{(iii)}}{\leq} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(ii)}}{=} 2 \cdot d(x, y) \Rightarrow 0 \leq d(x, y)$ ◇

Es ist leicht einzusehen, dass die Teilmenge N eines metrischen Raumes M selbst ein metrischer Raum ist, wenn wir die Einschränkung $d|_{N \times N} : N \times N \to [0, \infty)$ betrachten. Wir nennen dies einen *Unterraum* des metrischen Raumes M.

(1.3) Beispiele

1. Auf $\mathbb{R}$ kann man durch

$$|\cdot| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x-y|$$

eine Metrik definieren.

(i) Die Nichtnegativität folgt aus der Definition des Betrages. Falls $x \neq y$, so folgt $x - y \neq 0$ und damit $|x-y| \neq 0$.

(ii) Es gilt $|x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1| \cdot |y-x| = |y-x|$.

(iii) siehe Analysis I Skript (Krieg) Lemma I 2.9(v). Dies ist die Dreiecksungleichung,

2. Sei m eine natürliche Zahl. Auf der Menge $\mathbb{R}^m$ kann man durch

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}$$

eine Metrik definieren. Diese wird auch *euklidische Metrik* genannt nach Euklid von Alexandria.

(i) Die Nichtnegativität ist klar, da die Wurzelfunktion stets nichtnegativ ist. Wir nehmen nun an, es sei $a \neq b$, das heißt es existiert mindestens ein $1 \leq j \leq m$ mit $a_j \neq b_j$. Daraus folgt

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} \geq \sqrt{(a_j - b_j)^2} = |a_j - b_j| > 0,$$

somit $d(a,b) \neq 0$.

Falls $a = b$ gilt, ist $a_j = b_j \; \forall 1 \leq j \leq m$ und damit auch

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} 0} = 0.$$

(ii) Da für jedes $1 \leq j \leq m$ gilt, dass $(a_j - b_j)^2 = (b_j - a_j)^2$, folgt

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2} = d(b,a),$$

Damit ist die Symmetrie nachgewiesen.

(iii) Es ist zu zeigen, dass

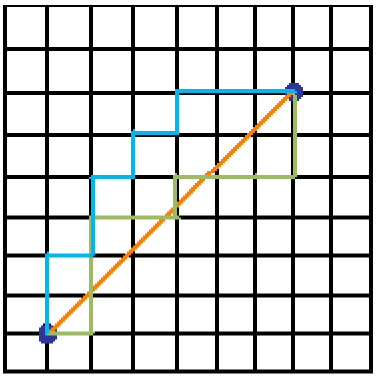
$$\begin{aligned} d(a,c) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - c_k)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (b_k - c_k)^2} \\ &= d(a,b) + d(b,c) \end{aligned}$$

gilt. Dies folgt direkt aus der Minkowski-Ungleichung (V (4.7) Analysis–I–Skript). Wähle dazu $z := a - b$ und $w := b - c$ und $p = 2$.

3. Eine weitere Metrik auf dem $\mathbb{R}^m$ ist durch

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$$

gegeben. Man bezeichnet sie als *Manhattan-Metrik,* da sie im Spezialfall $m = 2$ wie ein Wohnblock in Manhattan visualisiert werden kann (hierbei beschreibt die orangefarbene Strecke die euklidische Metrik, die blaue/grüne Linie verkörpert zwei mögliche Wege der Manhattan-Metrik):



(i) Da Beträge nichtnegativ sind, ist $d(a,b)$ als Summe von Beträgen nichtnegativ. Sei $a \neq b$, das heißt es existiert ein $1 \leq k \leq m$ mit $a_j \neq b_j$. Daraus folgt $|a_j - b_j| > 0$ und $d(a,b) = \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k| \geq |a_j - b_j| > 0$ und somit $d(a,b) \neq 0$.

Wenn nun $a = b$ gilt, ist $a_j = b_j$ für alle $1 \leq j \leq m$ und damit
$d(a,b) = \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k| = \sum_{k=1}^{m} 0 = 0$.

(ii) Da für alle $1 \leq k \leq m$ die Gleichung $|a_k - b_k| = |b_k - a_k|$ gilt, folgt $d(a,b) = \sum_{k=1}^m |a_k - b_k| = \sum_{k=1}^m |b_k - a_k| = d(b,a)$. Damit ist die Symmetrie nachgewiesen.

(iii) Es ist

$$\begin{aligned} d(a,c) &= \sum_{k=1}^m |a_k - c_k| = \sum_{k=1}^m |a_k - b_k + b_k - c_k| \\ &\overset{\Delta-Ungl.}{\leq} \sum_{k=1}^m (|a_k - b_k| + |b_k - c_k|) \\ &= \sum_{k=1}^m |a_k - b_k| + \sum_{k=1}^m |b_k - c_k| \\ &= d(a,b) + d(b,c). \end{aligned}$$

Also gilt die Dreiecksungleichung für d.

4. Man kann auf jeder Menge M eine Metrik durch

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, (m,n) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } m \neq n \ , \\ 0, & sonst \ . \end{cases}$$

definieren. Diese bezeichnet man als *diskrete Metrik*.

(i) $d(a,b) \geq 0$ ist klar nach Definition. Ebenso $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \ \forall a,b \in M$.

(ii) Die Symmetrie ist klar, da $a \neq b \Leftrightarrow b \neq a \ \forall a,b \in M$.

(iii) Wir beweisen die Dreiecksungleichung durch eine Fallunterscheidung.
<u>1. Fall:</u> Sei $a = c$: Aus der Nichtnegativität ergibt sich
$d(a,c) = 0 \leq d(a,b) + d(b,c)$.

<u>2. Fall:</u> Sei $a \neq c$: Dann folgt $a \neq b$ oder $b \neq c$ (andernfalls wäre $a = c$) und damit: $d(a,c) = 1 \leq d(a,b) + d(b,c)$.

Also gilt die Dreiecksungleichung für die diskrete Metrik. ◇

— *Folgen* —

(1.4) Definition (Folgen)
Sei M ein metrischer Raum und $a : \mathbb{N} \to M$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in M. Dann bezeichnet man a als *Folge* in M. Statt das Bild von $n \in \mathbb{N}$ mit $a(n)$ zu bezeichnen, ist die Notation a_n verbreitet. $\diamond$

(1.5) Definition (Teilfolgen einer Folge)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in M. Falls eine streng monoton wachsende Abbildung $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass $b_n = a_{c(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, nennt man $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Bei einer Teilfolge lässt man also einige Glieder der Ursprungsfolge aus. $\diamond$

Der Begriff der *Konvergenz* einer Folge lässt sich ebenfalls problemlos auf den allgemeinen Fall einer Folge in einem metrischen Raum übertragen, wenn man von der Metrik gebrauch macht.

(1.6) Definition (Konvergenz einer Folge)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen $a \in M$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $d(a, a_n) < \varepsilon$ gilt. Man nennt a dann auch den *Grenzwert* oder *Limes* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt dafür $a_n \to a$ für $n \to \infty$. $\diamond$

(1.7) Satz
Der Grenzwert einer im metrischen Raum M konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. $\diamond$

Beweis
Sei $0 < \varepsilon$ beliebig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ sowie $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Wir zeigen, dass dann $a = b$ gelten muss.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Desweiteren gibt es wegen der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$ gilt.
Sei $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$d(a,b) \leq d(a, a_n) + d(b, a_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $d(a,b) = 0$ sein und wegen der Definitheit $a = b$. $\square$

(1.8) Satz
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. $\diamond$

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Weil $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gilt $b_k = a_{\phi(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit einer streng monoton wachsenden Folge $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Durch eine einfache Induktion kann man $\phi(k) \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nachweisen. Dies werden wir nun tun:

Induktionsanfang:
Da $\phi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ ist, gilt $\phi(1) \geq 1$
Induktionsvorausstzung:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi(k) \geq k$ gegeben.
Induktionsschritt:
Wir zeigen nun $\phi(k+1) \geq k+1$. Da ϕ streng monton wachsend ist, gilt $\phi(k+1) > \phi(k) \geq k$. Aus $\phi(k+1) \in \mathbb{N}$ und $\phi(k+1) > k$ ergibt sich $\phi(k+1) \geq k+1$.

Es gilt also für alle $k \geq N$:

$$d(b_k, a) = d\left(a_{\phi(k)}, a\right) < \varepsilon,$$

weil $\phi(k) \geq k \geq N$ gilt. Also konvergiert auch $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a. $\square$

§2 Stetigkeit

Im ersten Semester beschränkten wir uns auf die Untersuchung von Abbildungen mit reellem (komplexem) Definitions- und Wertebereich. Wir wollen nun Abbildungen von einem metrischen Raum in einen anderen betrachten und das bekannte Konzept der Stetigkeit, das wir bereits bei reellen (komplexen) Funktionen kennengelernt haben, übertragen.

(2.1) Definition (Stetigkeit)
Seien $(M, d_1), (N, d_2)$ metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f *stetig* im Punkt $x_0 \in M$ ist, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in M$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ die Ungleichung $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ folgt. Falls f in jedem Punkt aus M stetig ist, sagt man auch, dass f *stetig* auf M ist. $\diamond$

(2.2) Bemerkung
Falls $M, N \subset \mathbb{R}$ und $d_1 = d_2 = |\cdot|$ ist, stimmt diese Definition mit der aus dem reellen Fall bekannten überein. $\diamond$

(2.3) Satz (Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen)
Seien $(M, d_1), (N, d_2)$ metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung von M nach N. Die Abbildung f ist genau dann im Punkt $x_0 \in M$ stetig, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. $\diamond$

Beweis
„$\Rightarrow$“
Sei $f : M \to N$ stetig im Punkt $x_0 \in M$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen x_0 konvergiert. Dann ist $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in N. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass, die Ungleichung $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ aus $d_1(x, x_0) < \delta$ gilt. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_1(a_n, a) < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Dies impliziert $d_2(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also konvergiert $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$.

„$\Leftarrow$“
Wir beweisen diese Implikation durch einen Kontrapositionsbeweis. Angenommen, f ist nicht stetig im Punkt x_0. Das bedeutet, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ ein Punkt $x \in M$ existiert mit $d_1(x, x_0) < \delta$, aber $d_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Wähle speziell $\delta_1 = 1$ und $d_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes δ_k existiert ein x_k, das $d_1(x_0, x_k) < \delta_k = \frac{1}{k}$ und $d_2(f(x_0), f(x_k)) \geq \varepsilon$ erfüllt. Es folgt, dass $(x_k)_k \in \mathbb{N}$ gegen x_0 konvergiert, aber $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. $\square$

(2.4) Satz (Verknüpfung stetiger Funktionen)
Seien M, N, P metrische Räume und $f : M \to N, g : N \to P$ stetige Abbildungen. Dann ist $g \circ f : M \to P$ stetig. $\diamond$

Beweis
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen einen beliebigen Punkt $p_0 \in M$ konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(p_0)$. Da g stetig ist, konvergiert $(g(f(p_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g(f(p_0))$. Demnach ist $g \circ f : M \to P$ in p_0 stetig, und weil p_0 beliebig war, ist $g \circ f$ auf ganz M stetig. $\square$

(2.5) Beispiel
Für jeden festen Punkt m eines metrischen Raumes (M, d) ist die Abbildung
$d_M : M \to \mathbb{R}, x \mapsto d(m, x)$ stetig, wenn man $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik versieht.

Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in M$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned} d(m,x) &\leq d(m,x_0) + d(x_0,x) \\ \Leftrightarrow d(m,x) - d(m,x_0) &\leq d(x_0,x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(m,x_0) &\leq d(m,x) + d(x_0,x) \\ \Leftrightarrow d(m,x_0) - d(m,x) &\leq d(x_0,x) \end{aligned}$$

gilt

$$|d(m,x_0) - d(m,x)| \leq d(x_0,x).$$

Wähle $\delta = \varepsilon$, dann folgt also aus $d(x_0, x) < \delta$ auch $|d_m(x) - d_m(x_0)| < \varepsilon$. Damit ist d_m in x_0 stetig. $\diamond$

(2.6) Bemerkung
Die Folgenbedingung liefert eine einfache Möglichkeit, zu entscheiden, ob eine konkrete Abbildung stetig ist oder nicht. $\diamond$

§3 Homöomorphismen

In der Mathematik versucht man häufig, Objekte, die gewisse Eigenschaften gemeinsam haben oder unter manchen Gesichtspunkten übereinstimmen, in Klassen bzw. Mengen zusammenzufassen.

So kennen wir aus dem 1. Semester bereits bijektive Abbildungen als Werkzeug, um zu entscheiden, welche Mengen wir als gleichmächtig betrachten wollen, und damit für uns unter dem Aspekt der Mächtigkeit ununterscheidbar sind.

Des Weiteren haben wir für $D \subseteq \mathbb{R}$ die stetigen Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ in der Menge $C^0(D)$ wiedergefunden.

Im Fall metrischer Räume werden uns stetige Abbildungen mit einigen zusätlichen Eigenschaften als zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung, welche Räume wir in einer Kategorie zusammenfassen wollen, dienen.

(3.1) Definition (Homöomorphismus)
Seien M, N metrische Räume.
Eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ wird *Homöomorphismus* genannt, wenn f stetig ist und eine ebenfalls stetige Umkehrabbildung besitzt. Man sagt dann auch, dass die metrischen Räume *homöomorph* sind und schreibt dafür kurz $X \cong Y$. $\diamond$

(3.2) Satz
In der Tat wird durch $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der metrischen Räume definiert.

Beweis

i) *Reflexivität*
Sei M ein beliebiger metrischer Raum. Mit $\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$ haben wir wegen $(\mathrm{id}_M)^{-1} = \mathrm{id}_M$ eine stetige bijektive Abbildung von M in sich, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

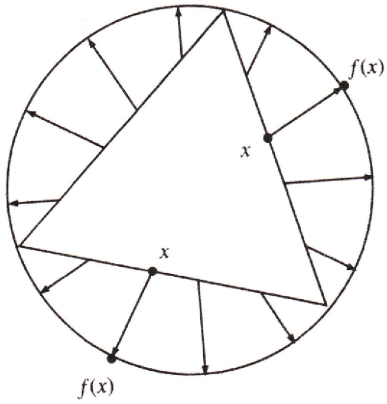
ii) *Symmetrie*
Seien M, N metrische Räume mit $M \cong N$, d. h. es existiert eine bijektive stetige Abbildung $f : M \to N$, deren Umkehrabbildung stetig ist. Dann ist auch $N \cong M$, da $f^{-1} : N \to M$ stetig und bijektiv ist und wegen $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

iii) *Transitivität*
Seien M, N, K metrische Räume, die $M \cong N$ und $N \cong K$ erfüllen. Dies bedeutet, es existieren stetige bijektive Abbildungen $f_1 : M \to N$ und $f_2 : N \to K$ mit stetigen Inversen. Die Abbildung $f_2 \circ f_1 : M \to K$ ist als Komposition stetiger bijektiver Funktionen selber stetig und bijektiv. Sie besitzt mit $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$, wiederum als Komposition stetiger Abbildungen, eine stetige Umkehrabbildung. □

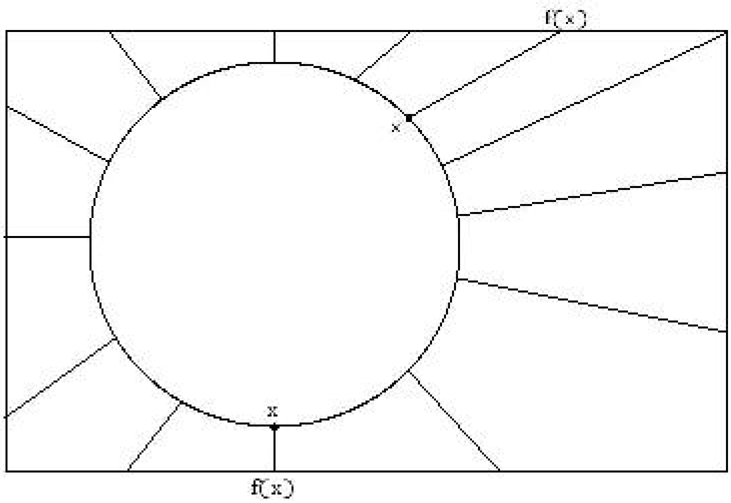
(3.3) Bemerkung
Die Äquivalenzklassen nennt man in diesem Fall auch *Homöomorphieklassen.* ◇

Anschaulich ist ein Homöomorphismus eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, die durch Dehnen, Strecken oder andersartige Verformungen, ohne den Raum zu zerschneiden oder zerreißen, ineinander überführt werden können.

(3.4) Beispiel
An dem folgendem Bild kann man *sehen*, dass der Umfang des Kreises homöomorph zum Umfang des Dreiecks ist. ◇



Dasselbe gilt für Kreise und Rechtecke (im $\mathbb{R}^2$):



Man könnte der Ansicht sein, dass die Stetigkeit der Umkehrfunktion durch die Stetigkeit der Abbildung impliziert wird. Dass dies nicht gilt, zeigt das folgende Gegenbeispiel.

(3.5) Beispiel
Wir betrachten $I := [0, 2\pi)$ und die Funktion $f : I \to S^1, x \mapsto (\cos x, \sin x)$, wobei $S^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ der Einheitskreis in der Ebene ist. f ist stetig, weil die Komponentenfunktionen stetig sind[1]. Ebenfalls ist die Abbildung bijektiv, doch f besitzt keine stetige Umkehrabbildung, denn es gibt eine Folge $z_n := \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) \to f(0)$ für $n \to \infty$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\pi - \frac{1}{n} \neq 0$, also ist f^{-1} im Punkt $(1,0)$ nicht stetig. $\diamond$

(3.6) Bemerkung
Wir haben die Unstetigkeit der Umkehrabbildung belegt. Damit ist nicht bewiesen, dass es überhaupt keine homöomorphe Abbildung von I nach S^1 gibt. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir zuerst einen weiteren Begriff ein. $\diamond$

(3.7) Definition (Folgenkompaktheit)
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist *folgenkompakt,* wenn jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen einen Punkt $x_0 \in A$ konvergiert. $\diamond$

[1]siehe z. B. für einen Beweis dieser Tatsache [4] Seite 18, Satz 6.

(3.8) Satz
Das stetige Bild einer folgenkompakten Menge ist folgenkompakt. $\diamond$

Beweis
Seien A, B metrische Räume und $f : A \to B$ eine stetige Abbildung, und A sei folgenkompakt. Wir zeigen nun, dass $f(A)$ ebenfalls folgenkompakt ist. Sei dazu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(A)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle ein $a_n \in A$, so dass $f(a_n) = b_n$ gilt. Wegen der Folgenkompaktheit von A existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $p \in A$ konvergiert.
Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(p)$.
Also ist das Bild folgenkompakt. $\square$

(3.9) Lemma (Folgenkompaktheit des Einheitsquadrates)
Die Menge $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1\}$ versehen mit der euklidischen Metrik ist folgenkompakt. $\diamond$

Beweis
Wir zeigen zunächst, dass A beschränkt ist. Sei dazu $(a, b) \in A$. Dann gilt
$|a| \leq 1, |b| \leq 1$ und damit $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b| \leq 2$. Also ist A beschränkt.
Zur Folgenkompaktheit:
Sei $z_n := (x_n, y_n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Folge in A. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Die Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt und besitzt demnach eine konvergente Teilfolge $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = y$. Wegen $-1 \leq x_{n_k} \leq 1$ und $-1 \leq y_{n_{k_l}} \leq 1$ für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$ und damit $\lim\limits_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} = \left(\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_k}, \lim\limits_{l\to\infty} y_{n_{k_l}}\right) \in A$.
Also ist A mit der euk. Metrik nach Definition folgenkompakt. $\square$

(3.10) Lemma
Das Intervall $[0, 2\pi)$ ist nicht folgenkompakt. $\diamond$

Beweis
Betrachte die Folge $q_n := 2\pi - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Sie liegt in dem Intervall $I := [0, 2\pi)$, aber besitzt keine gegen einen in diesem Intervall liegenden Punkt konvergente Teilfolge, weil $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 2\pi \notin I$. $\square$

(3.11) Satz
S^1 und I sind nicht homöomorph. ◇

Beweis
Angenommen, S^1 und I wären homöomorph. Das heißt, es gäbe eine stetige Abbildung $f : S^1 \to I$. Weiter wissen wir aus (3.9), dass S^1 folgenkompakt ist. Aus (3.8) ergäbe sich, dass I ebenfalls folgenkompakt ist. Dies ist nicht der Fall. Daher können die betrachteten Objekte nicht homöomorph sein. □

Ungern möchten wir euch den Beweis der Bijektivität der Abbildung f vorenthalten.

Beweis (Zur Bijektivität der Abbildung f)
Injektivität:
Seien $x, y \in [0, 2\pi)$ mit $f(x) = f(y)$ beliebig vorgegeben.

$$\begin{gathered} f(x) = f(y) \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{matrix} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{matrix} \Leftrightarrow \\ \cos x + \mathrm{i} \sin x = \cos y + \mathrm{i} \sin y \Leftrightarrow \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \Leftrightarrow \\ x = y \end{gathered}$$

Nach Skript IV Satz 5.11 (Krieg).

Surjektivität:
Sei $z = (x, y) \in S^1$, das heißt $x^2 + y^2 = 1$. Nach Satz 5.11 existiert ein Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$, für den $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi$, also $z = f(\varphi)$, gilt. □

(3.12) Beispiel
Als Beispiel zweier metrischer Räume, die zueinander homöomorph sind, führen wir $\mathbb{R}$ und das offene Intervall $(-1, 1)$ (jeweils mit der Standardmetrik versehen) an. ◇

Beweis
Betrachte $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. f ist wohldefiniert, weil $-1 - |x| \leq x \leq 1 + |x|$. Als Quotient stetiger Funktionen ist f stetig.

Bijektivität:
Wir zeigen, dass f eine Umkehrabbildung besitzt.

$$f \circ \left(\frac{x}{1-|x|}\right) = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+\left|\frac{x}{1-|x|}\right|} = x \cdot \frac{1}{(1-|x|)\left(1+\left|\frac{x}{1-|x|}\right|\right)} = x$$

$$\left(\frac{x}{1-|x|}\right) \circ f = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\left|\frac{x}{1+|x|}\right|} = x \cdot \frac{1}{(1+|x|)\left(1-\left|\frac{x}{1+|x|}\right|\right)} = x.$$

Also ist f bijektiv und f^{-1} als Komposition stetiger Funktionen stetig. Somit sind $\mathbb{R}$ und $(-1,1)$ homöomorph. $\square$

Literatur

[1] C. C. Pugh: *Real Mathematical Analysis,* Springer Science+Business Media, Inc., USA, (2002), 51–59, 76.

[2] R. Walter: *Einführung in die Analysis, Band 1,* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, (2007), 271.

[3] A. Krieg: *Analysis I, RWTH Aachen,* Aachen, (2007).

[4] O. Forster: *Analysis 2,* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, (2008), 18.