Einführung in die Fourier-Reihen

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 05.07.2010

André Stollenwerk, Eva-Maria Seifert

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit dem Problem, inwiefern sich Funktionen mittels Sinus und Cosinus, das heißt periodischen Funktionen, approximieren lassen. Diese Darstellungen sind sowohl in der Mathematik als auch in der Physik von großer Bedeutung und haben in viele Bereichen Anwendung.

§ 1 Fourier-Reihen: Definitionen

Wir betrachten im Folgenden periodische Funktionen.

(1.1) Definition (periodische Funktionen)
Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt *periodisch* mit Periode $L > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + L) = f(x).$$

(1.2) Bemerkung
Hat f die Periode L, so hat die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := f(\frac{L}{2\pi}x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

die Periode 2π. ◇

Im Folgenden setzen wir voraus, dass f Riemann-integrierbar ist, auf jedem beschränkten Intervall. Wir wollen nun wissen, welche Funktionen eine Reihendarstellung der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad (I)$$

besitzen. Dazu schauen wir uns zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen, für die eine solche Darstellung existieren. Wir stellen uns also die Frage: "Besitzt eine Funktion f eine Reihendarstellung der Form (I), wie müssen wir dann die Koeffizienten a_n und b_n bestimmen?"

(1.3) Definition (trigonometrisches Polynom)
Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrisches Polynom der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, falls sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{mit } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Alternativ zu der obigen reellen Darstellung existiert noch eine komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C},\ \text{für } k = -n, \ldots, n.$$

◇

Analog zur Analysis lässt sich nun die Definition einer trigonometrischen Reihe aufschreiben.

(1.4) Definition (trigonometrische Reihe)
Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrische Reihe, falls sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{mit } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \text{für } k \in \mathbb{N}$$

oder

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}, \text{,für } k \in \mathbb{Z}.$$

◇

Damit können wir nun, die spezielle trigonometrische Reihe, die Fourier-Reihen definieren.

(1.5) Definition (Fourier-Reihen)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ der Länge $L = b - a$ mit $a < b$ integrierbare Funktion, dann heißen

i) die Fourier-Reihe von f

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right).$$

Man schreibt auch

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

um zu verdeutlichen, dass die Reihe auf der rechten Seite die Fourier-Reihe von f ist.

ii) der n-te Fourier-Koeffizient von f für $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = c_n := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} \mathrm{d}x.$$

iii) die k-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f

$$S_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

◇

(1.6) Bemerkung
Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, inwiefern sich eine Funktion f als trigonometrische Reihe beziehungsweise Fourier-Reihe darstellen lässt. Das heißt wir wollen die Koeffizienten a_n, b_n und c_n gerade so auffassen, dass sie eine gute Approximation darstellen und die Fourier-Reihe gegen f konvergiert. Im Idealfall würde gleichmäßige Konvergenz vorliegen, welche wir im Folgenden auch annehmen. ◇

Wir zeigen zunächst die Äquivalenz der beiden Ausdrücke für Fourier-Reihen aus (1.5) bei entsprechender Wahl der Koeffizienten a_n, b_n und c_n.

Herleitung
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ der Länge L integrierbare Funktion und angenommen f lässt sich als Fourier-Reihe schreiben, dann folgt mit $a_n \overset{(1)}{=} c_n + c_{-n}$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n \overset{(2)}{=} i(c_n + c_{-n})$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} + c_{-n} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \left(\cos(\frac{2\pi n x}{L}) + i \sin(\frac{2\pi n x}{L}) \right) + c_{-n} \left(\cos(-\frac{2\pi n x}{L}) + i \sin(-\frac{2\pi n x}{L}) \right) \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((c_n + c_{-n}) \cos(\frac{2\pi n x}{L}) + i(c_n - c_{-n}) \sin(\frac{2\pi n x}{L}) \right) \\
&\overset{(1),(2)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2\pi n x}{L}) + b_n \sin(\frac{2\pi n x}{L}) \right)
\end{aligned}$$

□

Hier erklärt sich nun auch der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Schreibweise (I) von oben.

(1.7) Bemerkung
Betrachten wir nun den Fall $[a, b] = [0, 2\pi]$ und nehmen an, die Funktion f lässt sich als Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

schreiben. Durch multiplizieren beider Seiten mit e^{-ikx}, $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, und anschließender Integration, unter der Annahme, dass die termweise Integration über die Summe erlaubt ist (siehe Bemerkung (1.6)), erhält man:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} \mathrm{d}x.$$

Nun gilt für $k \neq n$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)x} \right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{i(n-k)} = 0$$

und für $k = n$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}x = 2\pi.$$

Wir erhalten also:

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = 2\pi c_k$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Die Koeffizienten der rellen Fourier-Reihe sind gegeben durch

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad , n \geq 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \quad , n \geq 1$$

◇

Weiterhin sind die von uns gewählten Integrationsgrenzen zur Bestimmung der Koeffizienten nicht relevant, wie das folgende Lemma zeigt.

(1.8) Lemma
Ist f periodisch mit Periode p und integrierbar auf jedem abgeschlossenen Intervall, dann ist $\int_a^{a+p} f(x)dx$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}$. Weiter gilt für $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{falls } f \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{falls } f \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

◇

Beweis
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq a\}$, so dass

$$a \leq np < a + p$$

und sei weiterhin $p_1 = a + p - np$.
Wir substituieren $x = y - np, dx = dy$ und erhalten

$$\int_0^{p_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{np}^{a+p} f(y-np)\mathrm{d}y = \int_{np}^{a+p} f(y)\mathrm{d}y \qquad (1)$$

sowie durch die Substitution $x = y - np + p = y - (n-1)p, dx = dy$

$$\int_{p_1}^{p} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{np} f(y-(n-1)p)\mathrm{d}y = \int_{a}^{np} f(y)\mathrm{d}y. \qquad (2)$$

Insgesamt folgt somit nach (1) und (2)

$$\int_0^p f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{p_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{p_1}^{p} f(x)\mathrm{d}x = \int_{np}^{a+p} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{np} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x.$$

Außerdem gilt für f mit $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{falls } f \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{falls } f \text{ ungerade ist.}\end{cases}\end{aligned}$$

□

Hierdurch erhalten wir letztendlich unsere Definition der Fourier-Reihe wie in (1.3) angegeben für Funktionen auf allgemeinen Intervallen $[a,b] \in \mathbb{R}$. Da heißt, das Entscheidende bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist lediglich die Periode oder anderes ausgedrückt das Intervall auf dem wir unsere Funktion f durch eine trigonometrische Reihe approximieren wollen.
Allgemein gilt also nach obigem Lemma für die Fourier-Koeffizienten von f:

$$\hat{f}(n) = c_n := \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{\frac{-2\pi inx}{L}}\mathrm{d}x \quad \text{, für } n \in \mathbb{Z}.$$

(1.9) Satz
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion, so ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch:

$$f(x) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big([\hat{f}(n)+\hat{f}(-n)]\cos(nx) + i[\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)]\sin(nx)\Big)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

◇

Beweis
Betrachten wir nochmal eine Funktion f (welche eine Darstellung als Fourier-Reihe nach (1.6) besitzt). Dann folgt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right).$$

Es gilt nach (1.5):

$$a_n = c_n + c_{-n} = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt:

$$f(x) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left([\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx) \right).$$

□

Wir wollen nun weitere Eigenschaften der Fourier-Reihen betrachten.

(1.10) Satz
Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion, dann gilt:

i) Ist f gerade, dann ist

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n),$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos(nx).$$

ii) Ist f ungerade, dann ist

$$\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n),$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2i\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(nx).$$

◇

Beweis
Es gilt $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ und $\cos(-nx) = \cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

i) Sei f gerade und 2π -periodisch, dann ist $f(x) = f(-x)$. Sei weiterhin

$$f_1(x) := f(x)\cos(nx) = f(-x)\cos(-nx) = f_1(-x)$$

und

$$f_2(x) := f(x)\sin(nx) = -f(-x)\sin(-nx) = -f_2(-x).$$

Offensichtlich ist f_1 gerade und f_2 ungerade und es folgt mit (1.7) und (1.8)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Insgesamt gilt also

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n),$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\cos(nx).$$

ii) Sei f gerade und 2π-periodisch, dann ist $f(x) = -f(-x)$. Sei weiterhin

$$f_1(x) := f(x)\cos(nx) = -f(-x)\cos(-nx) = -f_1(-x)$$

und

$$f_2(x) := f(x)\sin(nx) = f(-x)\sin(-nx) = f_2(-x).$$

Offensichtlich ist f_1 ungerade und f_2 gerade und es folgt mit (1.7) und (1.8)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = 0$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

Insgesamt gilt also

$$\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(nx).$$

□

(1.11) Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion.Wenn $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, dann ist die Folge der Partialsummen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_k := \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n) e^{inx}$$

der Fourier-Reihe von f reellwertig. ◇

Beweis

Mit $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ gilt:

$$\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 2\,\mathrm{Re}(\hat{f}(n))$$
$$\hat{f}(n) - \hat{f}(-n) = 2i\,\mathrm{Im}(\hat{f}(n))$$

und insbesondere

$$\hat{f}(0) = \mathrm{Re}(\hat{f}(0)).$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a_k &= \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n) e^{inx} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \Big[\hat{f}(-n) \underbrace{e^{-inx}}_{=\cos(nx) - i\sin(nx)} + \hat{f}(n) \underbrace{e^{inx}}_{=\cos(nx) + i\sin(nx)} \Big] + \hat{f}(0) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \Big[\Big(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\Big) \cos(nx) + \Big(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\Big) i \sin(nx) \Big] + \hat{f}(0) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \Big[2\,\mathrm{Re}(\hat{f}(n)) \cos(nx) + 2i\,\mathrm{Im}(\hat{f}(n)) i \sin(nx) \Big] + \mathrm{Re}(\hat{f}(0)) \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \Big[2\,\mathrm{Re}(\hat{f}(n)) \cos(nx) - 2\,\mathrm{Im}(\hat{f}(n)) \sin(nx) \Big] + \mathrm{Re}(\hat{f}(0))}_{\in \mathbb{R} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

□

§2 Beispiele und spezielle Fourier-Reihen

Im Folgenden betrachten wir nun einige Beispiele von Fourier-Reihen.

(2.1) Beispiele

i) Sei $f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}, x \to x$, dann gilt für $n \neq 0$ mit partieller Integration (nach Analysis II VI (2.7), da f stetig differenzierbar):

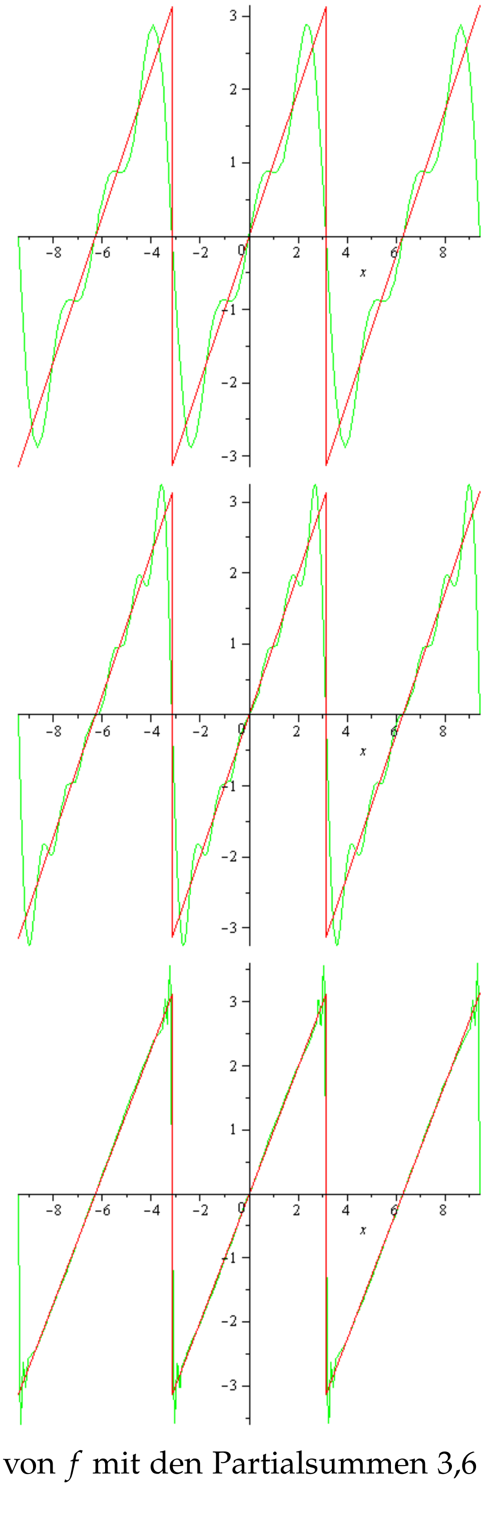
$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi}{in}e^{-in\pi} + \frac{\pi}{in}e^{in\pi}\right] + \frac{1}{2\pi in}\left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2in}\left[\cos(-n\pi) + i\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} + \cos(n\pi) + i\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right] \\
&+\frac{1}{2\pi in}\left[-\frac{1}{in}e^{-in\pi} - (-\frac{1}{in}e^{in\pi})\right] \\
&= -\frac{\cos(n\pi)}{in} + \frac{1}{2\pi(in)^2}\left[-\cos(-n\pi) - i\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} + \cos(n\pi) + i\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right] \\
&= -\frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n}}{in} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{in}.
\end{aligned}$$

Und für $n = 0$:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

Da f ungerade ist, folgt mit (1.10)(ii) insgesamt für die Fourier-Reihe von f:

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}.$$



Graph von f mit den Partialsummen 3,6 und 30.

ii) Sei $f\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}, x \to \frac{(\pi-x)^2}{4}$, dann gilt für $n \neq 0$ mit partieller Integration (nach Analysis II VI (2.7), da f stetig differenzierbar):

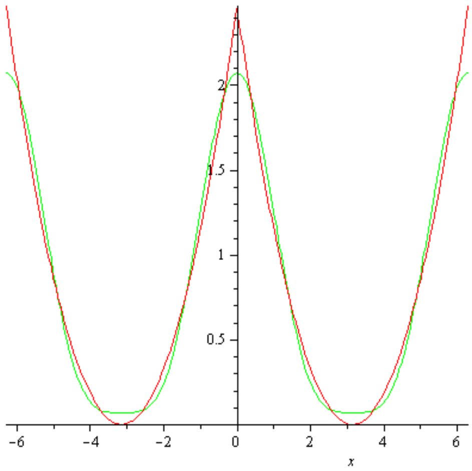
$$
\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi-x)^2}{4} e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{\pi^2-2\pi x+x^2}{4in}e^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{-2\pi+2x}{4in}e^{-inx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2-4\pi^2+4\pi^2}{4in}e^{-2\pi in} + \frac{\pi^2}{4in} - \left[\frac{-2\pi+2x}{4i^2n^2}e^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2i^2n^2}e^{-inx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4in}e^{-2\pi in} + \frac{\pi^2}{4in} - \frac{\pi}{2i^2n^2}e^{-2\pi in} - \frac{\pi}{2i^2n^2} - \left[\frac{1}{2i^3n^3}e^{-inx}\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4in}e^{-2\pi in} + \frac{\pi^2}{4in} - \frac{\pi}{2i^2n^2}e^{-2\pi in} - \frac{\pi}{2i^2n^2} - \frac{1}{2i^3n^3}e^{-2\pi in} + \frac{1}{2i^3n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}(-\frac{\pi^2}{4in}\left(\underbrace{\cos(-2\pi n)}_{=1} + \underbrace{i\sin(-2\pi n)}_{=0}\right) + \frac{\pi^2}{4in} - \frac{\pi}{2i^2n^2}\left(\underbrace{\cos(-2\pi n)}_{=1} + \underbrace{i\sin(-2\pi n)}_{=0}\right) \\
&\quad -\frac{\pi}{2i^2n^2} - \frac{1}{2i^3n^3}\left(\underbrace{\cos(-2\pi n)}_{=1} + \underbrace{i\sin(-2\pi n)}_{=0}\right) + \frac{1}{2i^3n^3}) \\
&= \frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}
$$

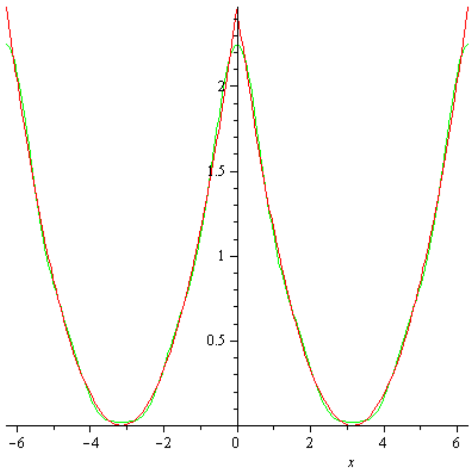
Und für $n = 0$:

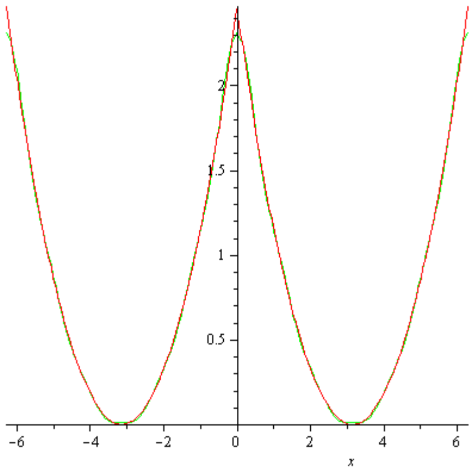
$$
\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi^2 - 2\pi x + x^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8\pi}\left[\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{8\pi}\left(2\pi^3 - 4\pi^3 + \frac{8}{3}\pi^3\right) = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

Somit folgt insgesamt für die Fourier-Reihe von f:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n^2} e^{inx} \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \left(e^{-inx} + e^{inx} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}. \end{aligned}$$







Graph von f mit den Partialsummen 2,4 und 6.

iii) Sei $f\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}, x \to \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha}$, dann gilt für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ mit $\sin(x) \overset{(1)}{=} \sin(x+2\pi n)$ und $\cos(x) \overset{(2)}{=} \cos(x+2\pi n)$ für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha}e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\int_0^{2\pi} e^{i(\pi\alpha-(\alpha+n)x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\int_0^{2\pi} [\cos(\pi\alpha-(\alpha+n)x)+i\sin(\pi\alpha-(\alpha+n)x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\left[-\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha-(\alpha+n)x)+\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha-(\alpha+n)x)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}[-\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha-2\pi\alpha-2\pi n)+\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha-2\pi\alpha-2\pi n) \\
&+\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha)-\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha)] \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}[-\frac{1}{\alpha+n}\sin(-\pi\alpha-2\pi n) \\
&+\frac{i}{\alpha+n}\cos(-\pi\alpha-2\pi n)+\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha)-\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha)] \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}[\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha+2\pi n)+\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha+2\pi n) \\
&+\frac{1}{\alpha+n}\sin(\pi\alpha)-\frac{i}{\alpha+n}\cos(\pi\alpha)] \\
&\overset{(1),(2)}{=} \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\frac{2\sin(\pi\alpha)}{\alpha+n} \\
&= \frac{1}{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

Somit folgt insgesamt für die Fourier-Reihe von f:

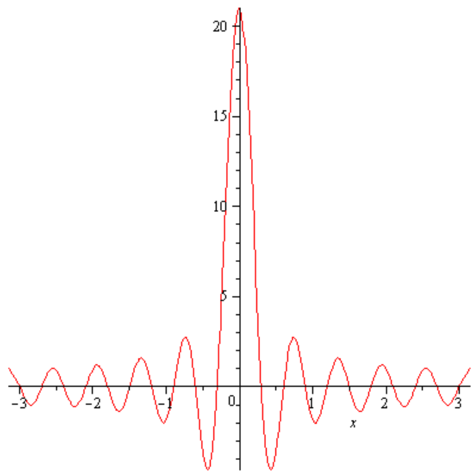
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\alpha+n} \quad ,\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

$\diamond$

(2.2) Definition (Dirichlet-Kern)
Das trigonometrische Polynom definiert auf $[-\pi, \pi]$ durch:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad , \text{für } N \in \mathbb{Z}^+$$

nennt man den N-ten Dirichlet Kern. ◇



10-ter Dirichlet Kern.

(2.3) Satz
Der N-te Dirichlet Kern ist weiterhin gegeben durch:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} & x \neq 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad N \in \mathbb{Z}^+.$$

◇

Beweis
Es gilt:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

mit $\omega = e^{ix}$ kann man diesen umschreiben zu:

$$D_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \omega^n + \sum_{n=-N}^{-1} \omega^n$$

und mit Anwendung der geometrischen Summenformel für $x \neq 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} + \frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega} \\ &= \frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega} \\ &= \frac{\omega^{-N-\frac{1}{2}}-\omega^{N+\frac{1}{2}}}{\omega^{-\frac{1}{2}}-\omega^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Für $x = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

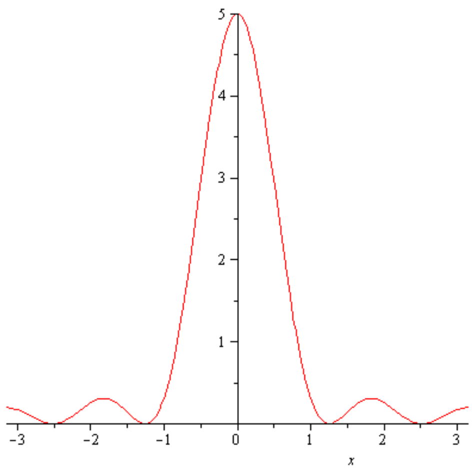
$$D_N(x) = 2N + 1. \qquad \square$$

In Anlehnung an den Dirichlet-Kern gibt es noch den Fejér-Kern, welcher das geometrische Mittel über die Summe der Dirichlet-Kerne darstellt. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, dass der Fejér-Kern positiv ist.

(2.4) Definition (Fejér-Kern)
Der Fejér-Kern n-ten Grades ist gegeben durch:

$$F_n := \frac{1}{n}(D_0 + D_1 + ... + D_{n-1}), \qquad \diamond$$

wobei D_i der i-te Dirichlet-Kern (für $i = 0, \ldots, n-1$) ist.



Fejér-Kern vom Grad $n = 5$.

(2.5) Definition (Poisson Kern)
Die Funktion P_r, genannt der Poisson Kern, ist definiert für $x \in [-\pi, \pi]$ und $0 \leq r < 1$ durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe:

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

◇

(2.6) Bemerkung
Der Poisson Kern ist in der Tat eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, denn es gilt:

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|} \cos(nx) \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n} \cos(nx) \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} r^{n} \cos(nx) - 1 \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$|r^n \cos(nx)| \leq |r^n| = r^n$$

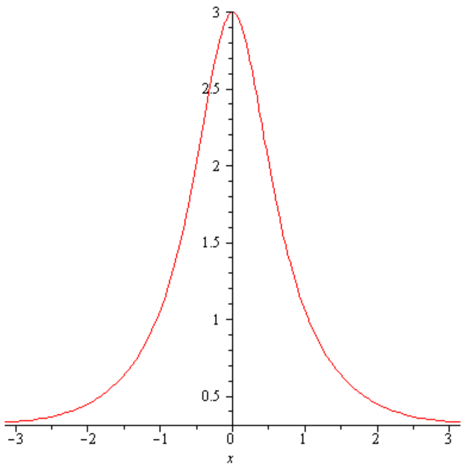
und da $0 \leq r < 1$ konvergiert die geometrische Reihe

$$2\sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Somit folgt nach Weierstraß'schem Majorantenkriterium (Analysis II VII (1.10)) die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

◇



Poisson Kern für $r = \frac{1}{2}$.

(2.7) Satz
Der Poisson Kern ist weiterhin gegeben für $x \in [-\pi, \pi]$ und $0 \leq r < 1$ durch:

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \qquad \diamond$$

Beweis
Es gilt mit $\omega = re^{ix}$:

$$P_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\omega}^n$$

Da

$$|\omega| = |re^{ix}| = \sqrt{r^2\cos^2(x) + r^2\sin^2(x)} = r < 1,$$

folgt mit Anwendung der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} \\ &= \frac{1 - \overline{\omega} + (1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})} \\ &= \frac{1 - |\omega|^2}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}. \end{aligned} \qquad \square$$

Schlusswort

Die Definition der Fourier-Reihe einer Funktion f ist rein formal und es ist nicht offensichtlich, inwiefern diese gegen f konvergiert. Die Schwierigkeit, dieses Problems zu lösen, hängt davon ab, in welcher Weise wir erwarten, dass die Reihe konvergiert, oder welche zusätzlichen Einschränkungen wir für f festlegen.

Angenommen, f ist Riemann integrierbar und definiert auf $[-\pi, \pi]$. Es stellt sich die Frage, ob

$$\lim_{n\to\infty} S_N(f)(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt?}$$

Es ist klar, dass wir dies im Allgemeinen nicht gelten wird. Denn wir können immer eine integrierbare Funktion in einem Punkt verändern ohne die Fourier-Koeffizienten zu verändern.

Somit könnten wir die obige Fragestellung nochmals betrachten unter der Annahme dass f stetig und *periodisch* ist oder vielleicht ist es zudem noch erforderlich, dass f stetig differenzierbar ist, um gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe zu gewinnen. Dies lässt uns zu der Fragestellung vom Beginn zurückkommen, können wir eine Funktion f durch eine trigonometrische Reihe approximieren. □