Eindeutigkeit und Konvergenz von Fourierreihen

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 05.07.2010

Michael Amend & Jens Dodenhoff

Inhalt

Abbildungen

Bisher wurde geklärt, wie Fourierreihen gebildet werden und welche Eigenschaften sie haben. Im Nachfolgenden möchten wir klären, ob Fourierreihen eindeutig bestimmt sind und ob sie konvergieren, beziehungsweise welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, damit sie eindeutig sind beziehungsweise konvergieren.

§1 Eindeutigkeit

Wann können wir etwas über die Eindeutigkeit von Fourierreihen aussagen und welche Eigenschaften sind erforderlich, damit sie eindeutig bestimmt sind? Wir werden schnell sehen, dass es genügt, dass eine Fourierreihe von f gegen f konvergiert, damit sie eindeutig bestimmt ist. Denn unter dieser Annahme der Konvergenz können wir sagen, dass die Fourierreihe eindeutig bestimmt ist. Es lässt sich also sagen, dass wenn f und g die gleichen Fourierkoeffizienten haben, sie identisch sein müssen. Dies kann man leicht, mit der Differenz $f - g$, umformulieren zu $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.
Wir sehen also, wenn zwei Funktionen sich nur in endlich vielen Punkten unterscheiden, so haben beide die gleichen Fourierreihen.
Wir werden also im ersten Abschnitt immer voraussetzen, dass die Fourierreihe von f gegen f konvergiert, ebenso gilt für beide Abschnitte, dass die Funktionen (meist f) Riemann-Integrierbar sind. Somit kommen wir zu unserem ersten Satz:

(1.1) Satz
Eine beschränkte Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ist genau dann Rieman-Integrierbar, wenn f fast überall auf $[a, b]$ stetig ist (dass heißt, die Menge der Unstetigkeitspunkte von f Maß 0 hat.) ◇

Beweis (zu Satz (1.1))
Wir schreiben $J = [a, b]$ und $I(c, r) = (c - r, c + r)$ für die offenen Intervalle mit Radius $r > 0$ um c. Die Oszillation von f auf dem Intervall $I(c, r)$ wird definiert durch

$$osc(f, c, r) := sup|f(x) - f(y)|$$

wobei das Supremun über alle $x, y \in J \cap I(c, r)$ genommen wird. Dies existiert, da f beschränkt ist. Die Oszillation von f an der Stelle c wird definiert durch

$$osc(f, c) := \lim_{r \to 0} osc(f, c, r).$$

Da $osc(f,c,r) \geq 0$ ist und es eine fallende Funktion von r ist, existiert dieser Grenzwert. Nun ist f stetig im Punkt c, genau dann wenn $osc(f,c) = 0$, was direkt aus der Definition folgt. Für jedes $\epsilon > 0$ definieren wir

$$A_\epsilon := \{c \in J : osc(f,c) \geq \epsilon\}.$$

So können wir sehen, dass die Menge der Punkte in J, in denen f unstetig ist, $\bigcup_{\epsilon>0} A_\epsilon$ ist.

(1.2) Lemma
Wenn $\epsilon > 0$ ist, ist A_ϵ abgeschlossen und somit kompakt. ◇

Beweis (zu Lemma (1.2))
Konvergiere $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_\epsilon$ gegen c und sei $c \notin A_\epsilon$. Schreibe $osc(f,c) = \epsilon - \delta$, wobei $\delta > 0$. Wähle ein $r > 0$, sodass $osc(f,c,r) < \epsilon - \frac{\delta}{2}$, und ein n, mit $|c_n - c| < \frac{r}{2}$. Dann ist $osc(f,c_n,r/2) < \epsilon$, also $osc(f,c_n) < \epsilon$, also ein Widerspruch. □

Fortsetzung zum Beweis von Satz (1.1):
Sei nun D die Menge der Unstetigkeitsstellen von f, die Maß 0 hat und sei $\epsilon > 0$. Da $A_\epsilon \subset D$ ist, können wir A_ϵ durch eine endliche Anzahl von offenen Intervallen $I_1, ..., I_N$ der Länge kleiner ϵ überdecken. Das Komplement dieser Vereinigung I ist kompakt und um jeden Punkt z in diesem Komplement können wir ein Intervall I_z finden mit

$$sup_{x,y\in I_z}|f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$

da $z \notin A_\epsilon$ ist.
Nun können wir eine Teilüberdeckung von $\bigcup_{z\in I^c} I_z$ finden welche wir mit $I_{N+1}, ..., I_{N'}$ bezeichnen. Nun nehmen wir alle Endpunkte dieser Intervalle und erhalten eine Partition P von $[a,b]$ mit

$$U(P,f) - L(P,f) \leq 2M\sum_{j=1}^{N} |I_j| + \epsilon(b-a) \leq C\epsilon, |f(x)| \leq M \text{ für alle } x.$$

Somit ist f integrierbar auf $[a,b]$, was zu zeigen war.
Nun sei f eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ und D sei die Menge ihrer Unstetigkeitspunkten. Da D gleich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ ist müssen wir zeigen, das jedes $A_{1/n}$ Maß 0 hat.
Sei $\epsilon > 0$ und wähle eine Partition $P = \{x_0, ..., x_N\}$ so, dass $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon/n$. Wenn dann $A_{1/n}$ das Intervall $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ schneidet, haben wir $sup_{x\in I_j} f(x) -$

$inf_{x \in I_j} f(x) \geq 1/n$ und das zeigt, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{\{j : I_j \cap A_{1/n} \neq \emptyset\}} |I_j| \leq U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Wenn man also Intervalle nimmt, die $A_{1/n}$ schneiden und diese etwas größer macht, können wir $A_{1/n}$ mit offenen Intervallen der Länge kleiner gleich 2ϵ überdecken. Und somit hat $A_{1/n}$ Maß 0, was den Beweis beendet. □

(1.3) Satz

Sei f eine integrierbare Funktion auf dem Kreis und
$\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ so gilt:
$f(x) = 0$, falls f stetig ist im Punkt x .
Nach Satz (1.1) gilt also $f(x) = 0$ für fast alle x. ◇

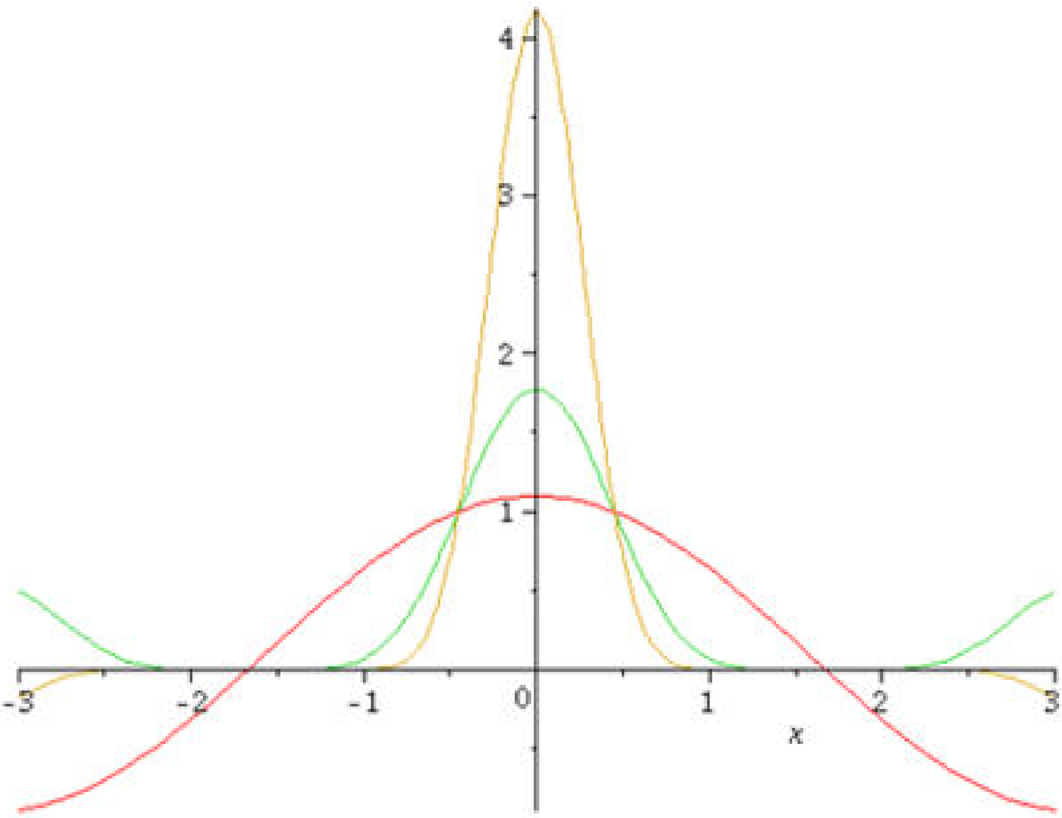

Abbildung 1: Die Funktionen p_1, p_6 und p_{15} mit $\epsilon = 0,1$.

Beweis (zu Satz 1.3)

Wir zeigen die Behauptung durch einen Widerspruchsbeweis und betrachten zunächst den Fall, dass f eine reellwertige Funktion ist:

Sei ohne Einschränkung $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \theta_0 = 0$ und $f(0) > 0$.
Die Idee ist nun, eine Familie trigonometrischer Funktionen $\{p_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu konstruieren, welche ihren „Peak" bei $x = 0$ haben und für die gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int p_k(\theta) \cdot f(\theta) d\theta = \infty.$$

Dies wird der entscheidende Widerspruch, denn die Integrale nehmen den Wert Null an nach Annahme (die Funktionen sind beide 2π-periodisch).
Da f stetig ist im Punkt 0, können wir $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ wählen, sodass $f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$ ist für alle $|\theta| < \delta$.
Sei nun

$$p(\theta) = \epsilon + \cos(\theta)$$

mit einem geeigneten, kleinen $\epsilon > 0$ gewählt, sodass $|p(\theta)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ ist, falls $\delta \leq |\theta| \leq \pi$.
Dann wird p_k definiert als $p_k(x) = [p(x)]^k$.
Nun sein $0 \leq \eta < \delta$, sodass $p(\theta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$ für $|\theta| < \eta$.
Wähle B so, dass $|f(\theta)| \leq B$ für alle θ, was möglich ist, da f eine integrierbare Funktion, und damit nach Analyis II (Kapitel VI, Definition (1.10)) beschränkt, ist.
Da nach Konstruktion jedes p_k ein trigonometrisches Polynom ist und $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ sind und beide Funktionen 2π-periodisch sind, gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot p_k(\theta) d\theta = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Wir erhalten daher folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} f(\theta) p_k(\theta) d\theta \right| \leq 2 \cdot \pi \cdot B \cdot (1 - \frac{\epsilon}{2})^k, \text{ da } |f(\theta)| < B, |p(\theta)| < (1 - \frac{\epsilon}{2}). \tag{1}$$

Unsere Wahl von δ garantiert, dass für alle $|\theta| \leq \delta$ gilt: $p(\theta) \geq 0$ und $f(\theta) \geq 0$, sodass

$$\int_{\eta\leq|\theta|<\delta} f(\theta) \cdot p_k(\theta) d\theta \geq 0. \tag{2}$$

Ebenso gilt:

$$\int_{|\theta|<\eta} f(\theta) \cdot p_k(\theta) d\theta \geq 2 \cdot \eta \cdot \frac{f(0)}{2} \cdot (1 + \frac{\epsilon}{2})^k, \text{ da } f(\theta) \geq \frac{f(0)}{2},\ p(\theta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

Aus den drei Abschätzungen (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, dass
$\int p_k(\theta) \cdot f(\theta) d\theta \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, was den Beweis beendet, wenn $f \in \mathbb{R}$ ist.
Ansonsten lässt sich f schreiben als

$$f(\theta) = u(\theta) + i \cdot v(\theta) \; mit \; u, v \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren also

$$\overline{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$$

und setzen $u(\theta)$ und $v(\theta)$ auf

$$u(\theta) = \frac{f(\theta) + \overline{f}(\theta)}{2}$$
$$v(\theta) = \frac{f(\theta) - \overline{f}(\theta)}{2 \cdot i}$$

und mit

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$$

verschwinden die Fourierkoeffizienten von u, v da $f = 0$ ist und f stetig im Punkt $x = 0$ ist. □

Nach diesem Satz kann man sofort sehen, dass auch Folgendes gilt:

(1.4) Korollar
Ist f eine periodische, stetige Funktion mit $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $f = 0$. ⋄

Beweis (zu Korollar (1.4))
Aus Satz (1.3) folgt direkt, dass $f(x) = 0$ gilt für alle Punkte x, in denen f stetig ist und wenn f periodisch ist. Da nun ganz f stetig ist, folgt direkt die Behauptung. □

(1.5) Korollar
Sei f eine stetige Funktion die auf dem Kreis definiert ist und die Fourierreihe von f sei absolut konvergent, das heißt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$. Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f, mit anderen Worten

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta) \qquad \text{gleichmäßig in } \theta. \qquad \diamond$$

Beweis (zu Korollar (1.5))
Aus der Analysis II wissen wir, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergierenden Folge von stetigen Funktionen ebenfalls stetig ist. Nun folgt aus der Voraussetzung der absoluten Konvergenz auch, dass die Partialsummen der Fourierreihe absolut und gleichmäßig konvergieren nach dem Majorantenkriterium.
Setzen wir nun

$$g(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Dann folgt, dass auch g eine stetige Funktion auf dem Kreis ist und die Fourierkoeffizienten von g sind $\widehat{f}(n)$ und wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir die Summation und Integration vertauschen. Wenden wir nun Korollar (1.4) auf $f - g$ an, erhalten wir $f = g$ wie gewünscht. □

§2 Konvergenz von Fourierreihen

Im ersten Abschnitt wurde unter der Voraussetzung der Konvergenz gezeigt, dass die Fourierreihe zu einer bestimmten Funktion eindeutig definiert ist. Um dieses Ergebnis nutzen zu können, muss also noch die Konvergenz gezeigt werden. Dabei stellen wir fest, dass dies nicht immer der Fall ist, und zeigen im Folgenden zwei hinreichende Voraussetzungen an f für die Konvergenz der Fourierreihe von f.
Im Folgenden bezeichne $\mathcal{C}^k(a,b)$ die Menge, der auf $(a,b) \in \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, insbesondere ist $\mathcal{C}^0(a,b)$ die Menge der auf (a,b) stetigen Funktionen und wir kürzen ab, $\mathcal{C}^k := \mathcal{C}^k(-\infty,\infty)$.

— *Glatte Funktionen* —

(2.1) Bemerkung
Das Korollar (1.5) liefert bereits eine Voraussetzung für die Konvergenz, nämlich die absolute Konvergenz. Bei der absoluten Konvergenz genügt es den Betrag der Fourierkoeffizienten zu betrachten, da $|e^{in\theta}| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$ gilt. ◇

Wir werden zeigen, dass die „Glätte" einer Funktion eine wichtige Voraussetzung ist. Dazu führen wir zunächst eine hilfreiche Notation ein.

(2.2) Definition ($\mathcal{O}$-Notation)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion,

(i) dann ist $O(f)$ definiert als

$$O(f) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \forall n \geq N \text{ gilt } |g(n)| \leq c|f(n)|\} \quad (4)$$

(ii) oder alternativ, falls $f(n) \neq 0$ fast überall, als

$$O(f) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists C \in \mathbb{R}^+ : \limsup_{n\to\infty} |\frac{g(n)}{f(n)}| \leq C\}. \quad (5)$$

Wir schreiben für eine Funktion g mit $g \in O(f)$ auch und im Folgenden $g = \mathcal{O}(f)$. Wenn wir in der zweiten Definition den Limes $n \to a$ bilden statt $n \to \infty$, schreiben wir $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ für $n \to a$. Es bedeutet, dass g durch f lokal beschränkt wird. ⋄

Vor dem nächsten Korollar beschreiben wir einige Eigenschaften der Fouriertransformation in einem Hilfssatz, die wir im Folgenden noch brauchen werden.

(2.3) Hilfssatz (Eigenschaften der Fourierkoeffizienten)
Seien $f \in \mathcal{C}^0$ 2π-periodisch, $f_a(t) = f(a+t)$ die Translation von f um $a \in \mathbb{R}$ und die Norm $||f||_1 := \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$. Dann gelten

(i)

$$|\widehat{f}(n)| \quad \leq \quad \frac{||f||_1}{2\pi} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z},$$

(ii)

$$\widehat{e^{i\cdot} f}(n) \quad = \quad \widehat{f}(n-1) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z},$$

und

(iii)

$$\widehat{f_a}(n) = e^{ina}\widehat{f}(n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}^l, l \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\widehat{f^{(k)}}(n) \quad = \quad (in)^k \widehat{f}(n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle} \quad k \leq l, k \in \mathbb{N}.$$

Beweis

(i) Es folgt direkt aus der Definition der Fourierkoeffizienten und der Dreiecksungleichung für Integrale für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$|\widehat{f}(n)| \quad = \quad |\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)e^{-int}|dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt = \frac{||f||_1}{2\pi}.$$

Das ist die Behauptung.

(ii) Ebenfalls aus der Definition folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$2\pi\widehat{f}(n-1) \quad = \quad \int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-i(n-1)t}dt = \int\limits_0^{2\pi} e^{it}f(t)e^{-int}dt = 2\pi\widehat{e^{i\cdot}f}(n)$$

und damit die Behauptung.

(iii) Durch die Multiplikation einer 1 folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f_a}(n) \quad &= \quad \int\limits_0^{2\pi} f(a+t)e^{-int}dt = e^{ina}\int\limits_0^{2\pi} f(a+t)e^{-int-ina}dt \\ &\overset{\text{Subs.}}{=} \quad e^{ina}\int\limits_a^{2\pi+a} f(t')e^{-int'}dt' \overset{\text{LA (1.8)}}{=} 2\pi e^{ina}\widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wird Lemma (1.8) vom Vortrag 10 verwendet und die Division durch 2π liefert die Behauptung.

(iv) Man sieht leicht, dass es dazu genügt $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f'}(n) \quad &= \quad \int\limits_0^{2\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} \quad \Big[f(\theta)e^{-in\theta}\Big]_0^{2\pi} + in\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \quad in\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = in2\pi\widehat{f}(n) \end{aligned}$$

Dabei verschwindet in der zweiten Zeile die Klammer wegen der 2π-Periodizität von f. Insgesamt also $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$. Der Vollständigkeit wegen können wir dies nun als Anfang einer Induktion nach k betrachten. Es gelte also die Behauptung $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$ für $f \in \mathcal{C}^k$ und alle $n \in \mathbb{N}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Im Induktionsschritt schreiben wir für ein $f \in \mathcal{C}^{k+1}$

$$\begin{aligned} \widehat{f^{(k+1)}}(n) &= in\widehat{f^{(k)}}(n) \\ &\overset{\text{IV}}{=} in \cdot (in)^k \widehat{f}(n) = (in)^{k+1}\widehat{f}(n) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion. □

(2.4) Korollar
Sei $f \in \mathcal{C}^2$ und 2π-periodisch. Dann gilt

$$\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^2}),$$

so dass die Fourierreihe von f absolut gleichmäßig gegen f konvergiert. ◇

Beweis
Wir folgern mit Hilfssatz (2.3)(iv) für $k = 2$

$$2\pi|n|^2|\widehat{f}(n)| \overset{(2.3)(iv)}{=} 2\pi|\widehat{f''}(n)| = |\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}d\theta| \leq \int_0^{2\pi} |f''(\theta)|d\theta \leq C.$$

C ist unabhängig von n und für die Fourierreihe von f folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)e^{-in\theta}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C}{n^2}.$$

Da die letzte Reihe konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz und damit die Behauptung. □

(2.5) Bemerkung
Man sieht, dass für Funktionen $f \in \mathcal{C}^k, k \geq 2$, die Fourierreihe umso schneller absolut konvergiert je höher das $k \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^k})$ für jedes $f \in \mathcal{C}^k$. ◇

— *Hölder-stetige Funktionen* —

Nun betrachten wir den Fall für $k < 2$. Hierzu führen wir die *Hölder*-Bedingung ein.

(2.6) Definition (Hölder-Bedingung)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann erfüllt die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ die *Hölder*-Bedingung der Ordnung $\alpha \in (0,1]$, falls ein $A > 0$ existiert, so dass gilt

$$\sup_{\theta \in U} |f(\theta + t) - f(\theta)| \leq A|t|^\alpha \quad \text{für alle} \quad t \in U.$$

Man nennt f auch *Hölder-stetig*, wenn f diese Bedingung erfüllt. ◇

(2.7) Bemerkungen (Einordnung der Hölder-Stetigkeit)

(i) Man erkennt leicht, dass die Hölder-Bedingung eine Erweiterung der Lipschitz-Bedingung ist. Denn die Hölder-Bedinung entspricht für $\alpha = 1$ der Lipschitz-Bedingung.

(ii) Ebenfalls impliziert die Hölder-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich $\delta := \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{A}} > 0$ definieren, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Die Umkehrung gilt nicht wie das Beispiel (2.8)(ii) zeigt.

(iii) Im Grenzfall $\alpha = 0$ ist f eine beschränkte Funktion. ◇

(2.8) Beispiele

(i) Wir betrachten eine konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Fourierkoeffizienten für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ce^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{n} (-i) \cdot (e^{in\pi} - e^{-in\pi}) \\ &= \frac{c}{n\pi} \cdot \frac{1}{2i} (e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = \frac{c}{n\pi} \cdot \sin(\pi n) \overset{n \neq 0}{=} 0 \end{aligned}$$

Im Falle $n = 0$ liefert bereits die Integration im ersten Schritt $\widehat{f}(0) = c$. Damit ist die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{-in\theta} = c$$

offensichtlich (absolut) konvergent gegen f. Dies kann man auch aus Korollar (2.4) folgern, da $c \in \mathcal{C}^2$ gilt. Hier ist f ebenfalls Hölder-stetig.

(ii) Nun betrachten wir $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $a \in (0, 1)$ und

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{\ln(x)} & , \quad 0 < x \leq a \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f offensichtlich stetig auf $(0, a]$ als Komposition stetiger Funktionen, wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{\ln(x)} = 0$$

ist sie stetig auf dem Kompaktum $[0, a]$ und damit gleichmäßig stetig. Angenommen f wäre ebenfalls Hölder-stetig, dann existiert ein $A > 0$, so dass $|f(x)| \leq A|x|^\alpha$ für alle $x \in (0, a]$ und ein $\alpha \in (0, 1]$. Dann folgt

$$\left|\frac{1}{\ln(x)}\right| \leq A\,|x^\alpha| \iff A \geq |\frac{x^{-\alpha}}{\ln(x)}| \geq |\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{-\alpha}}{\ln(x)}| \overset{\text{L'Hospital}}{=} |\lim_{x \downarrow 0} -\alpha x^{-\alpha}| \overset{\alpha \in (0,1]}{=} \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch, da $A \in \mathbb{R}$ und daher nicht $A \geq \infty$ gelten kann. ◇

Aus der Hölder-Bedingung lässt sich die Konvergenz der Fourierreihe auch für nicht differenzierbare Funktionen folgern. Vorher benötigen wir noch zwei Sätze.

(2.9) Satz (von Riemann-Lebesgue für stetige Funktionen)
Seien $\widehat{f}(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen, stetigen Funktion f. Dann gilt $\lim_{n \to \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$. ◇

Beweis
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f periodisch um 0 und f verschwindet in π und pi, anderenfalls subtrahiere eine Konstante oder verschiebe das betrachtete Intervall. Mit dem *Satz von Stone-Weierstraß* aus Vortrag 9 gibt es für die Restriktion $f|_{[-\pi, pi]}$ eine Folge von trigonometrischen Polynomfunktionen $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, das heißt $\phi_k \in \mathcal{C}^2(-\pi, \pi)$ mit kompaktem Träger, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(x) - \phi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k > k_0$ und $x \in [-\pi, \pi)$. Wähle nun eine Teilfolge $\phi_{k'}$ dessen ersten zwei Ableitungen ebenfalls auf $[-\pi, \pi)$ einen kompakten Träger besitzen. Setzt man $\phi_{k'}$ 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort, so ist $\phi_{k'}$ zweimal stetig differenzierbar und damit $\widehat{\phi}_{k'}(n) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^2})$ nach Korollar (2.4). Mit Hilfssatz (2.3)(i) folgt $|(\widehat{f - \phi_{k'}})(n)| \leq \frac{||f - \phi_{k'}||_1}{2\pi} \leq \frac{\pi\varepsilon}{2\pi} < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit der Linearität der Fouriertransformation folgt, dass ein C $\in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, so dass gilt

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{\phi}_{k'}(n) + (\widehat{f - \phi_{k'}})(n)| \leq |\widehat{\phi}_{k'}(n)| + |(\widehat{f - \phi_{k'}})(n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{N} < \varepsilon \end{aligned}$$

und damit $|\widehat{f}(n)| < \varepsilon$ für große $|n|$. □

(2.10) Folgerung
Seien $f \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$ 2π-periodisch und $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}^0(-\delta,\delta)$ für ein $\delta > 0$, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle 0 gegen 0. ◇

Beweis
Offenbar ist $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$. Wir zeigen zunächst $g(t) := \frac{f(t)}{1-e^{it}} \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$.
Die Funktion $\phi(t) := \frac{it}{e^{it}-1}$ ist auf der Menge $0 < |t| \leq \pi$ stetig und es gilt $\lim\limits_{t\to 0} \phi(t) = 1$ (mit Anwendung des Satzes von L'Hospital auf $\frac{e^{it}-1}{it}$ und Grenzwertsätze). Also ist ϕ beschränkt und es gibt ein $K > 0$ mit $|\phi(t)| \leq K$ in $[-\pi,\pi]$, so dass

$$|g(t)| = |\frac{f(t)}{t} \cdot \frac{t}{e^{it}-1}| \leq K|\frac{f(t)}{t}| \quad ,|t| \leq \pi$$

Da der Nenner von g ebenfalls periodisch ist, folgt die Periodizität von g aus der von f. Das heißt $g \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$. Zwischen den Fourierkoeffizienten von f und g besteht mit Hilfssatz (2.3)(ii) und $f(t) = (1-e^{it})g(t)$ die Beziehung

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) - \widehat{g}(n-1).$$

Die Summe

$$\sum_{n=-p}^{p} \widehat{f}(n) \quad = \quad \sum_{n=-p}^{p} \widehat{g}(n) - \widehat{g}(n-1) = \widehat{g}(p) - \widehat{g}(-p-1)$$

ist also eine Teleskopsumme und nach dem Satz (2.9) strebt die rechte Seite gegen 0 für $p \to \infty$. So konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle 0 gegen 0. □

Hieraus folgt durch Transformation der *Konvergenzsatz*.

(2.11) Satz (Konvergenzsatz)
Seien $f \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$ 2π-periodisch, $\theta \in [-\pi,\pi]$ und $c \in \mathbb{C}$, so dass $\frac{f(\theta+t)-c}{t}$ stetig in einer Umgebung $U_\delta(\theta)$ für ein $\delta > 0$ ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle θ gegen den Wert c. ◇

Beweis
Für die Funktion $g(t) := f(\theta+t) - c$ gilt $\frac{g(t)}{t} \in \mathcal{C}^0(-\pi,\pi)$, das heißt die Fourierreihe konvergiert in 0 gegen 0. Nun ergibt sich aus der Linearität der Fouriertransformation, dem Beispiel (2.8)(i) und Hilfssatz (2.3)(iii)

$$\begin{aligned} c \quad &= \quad c + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)e^{in\cdot 0} = c + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) \\ &\overset{(2.8)(i)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\widehat{g(n)+c}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_\theta}(n) \overset{(2.3)(ii)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\cdot\theta}. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

(2.12) Bemerkung
Wenn man nun den Satz von Riemann-Lebesgue auf integrierbare Funktionen erweitert, was uns leider im Rahmen des Proseminars zur Analysis 1 (mit Hilfe von Wissen aus Analysis 2) nicht möglich ist, kann man zeigen, dass Hölder-stetige Funktionen gegen ihre eigentliche Funktion konvergieren. ◇

(2.13) Bemerkungen

(i) Würde man den Satz von Riemann-Lebesgue wie in Bemerkung(2.12) erweitern könnte man die Menge der Funktionen f deren Fourierreihe gegen f konvergieren sogar auf Hölder-stetige Funktionen ausweiten (siehe [2]).

(ii) Es ließe sich zeigen, dass Hölder-stetige Funktionen mit $\alpha > \frac{1}{2}$ sogar absolut konvergent sind.

(iii) Mit Satz (2.9) und dem Dirichlet-Kriterium können wir sogar schon die Konvergenz für alle integrierbaren Funktionen an den Stellen $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ folgern. Die Folge der Partialsummen $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, der Dirichlet-Kern, ist beschränkt und die Fourierkoeffizienten mit dem Satz (2.9) eine Nullfolge. Damit konvergiert die Fourierreihe, wenn auch nicht notwendigerweise absolut gegen f. ◇

[1] [2]

Literatur

[1] Rami Shakarchi Elias M. Stein. *Fourier Analysis, an introduction*.

[2] Walter. *Analysis 2*. Springer, 6th edition.