
Faltung und Gute Kerne

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 19.07.2010

Lars Grötschel , Elisa Friebe

Im ersten Abschnitt "Faltung" definieren und beschäftigen wir uns mit der Faltung, die die grundlegende Operation des zweiten Abschnittes ist. Im zweiten Abschnitt "Gute Kerne" suchen wir dann Kerne mit so gewünschten Eigenschaften, dass sie sich, gefaltet mit einer Funktion, deren Identität annähern. Das Ziel dieses Vorgehens besteht darin auf ein Kriterium für Konvergenz von Fourier-Reihen zu stoßen.

§1 Faltung

Die Faltung zweier Funktionen spielt eine grundlegende Rolle in der Fourier-Analyse. Es tritt natürlich im Kontext der Fourier-Reihen aber zusätzlich auch in der allgemeineren Analysis von Funktionen in anderen Gebieten auf. Der besondere Vorteil der Faltung ist, dass man mit ihrer Hilfe eine Fourier-Reihe als eine Faltung von einer Funktion mit einem Kern darstellen kann, die man dann bedeutend besser untersuchen kann.

Führen wir zunächst den Begriff der Faltung ein:

(1.1) Definition (Faltung)

Seien zwei 2π -periodische integrierbare Funktionen f, g auf \mathbb{R} gegeben, dann ist die Faltung

$f * g$ auf $[-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy. \quad \diamond$$

Das obige Integral macht Sinn, da das Produkt integrierbarer Funktionen integrierbar ist. Da die Funktionen periodisch sind, können wir auch die Variablen wie folgt verändern.

(1.2) Korollar

Seien zwei 2π periodische integrierbare Funktionen f, g auf \mathbb{R} gegeben, dann können wir die Faltung von Definition (1.1) auch wie folgt schreiben:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y)dy. \quad \diamond$$

Beweis

(siehe Beweis zu Satz(1.5)(iii))

□

Die Faltung zeigt also eine Art gewichteten Mittelwert an.

Sei $g = 1$ so ist die Faltung der Funktion f und g gegeben durch $(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy$

Dies ist eben unabhängig von x und nichts anderes als der gewichtete Mittelwert von f auf dem Kreis.

Die Rolle der Faltung lässt sich mit der punktweisen Multiplikation $f(x)g(x)$ vergleichen, da es diese sogar in einigen Fällen ersetzt.

Für uns ist die Faltung von Interesse, da man mit ihrer Hilfe die Partialsumme einer Fourier-Reihen wie folgt beschreiben kann:

(1.3) Korollar

Sei f eine 2π -periodische integrierbare Funktion auf \mathbb{R} , dann lässt sich die N -te Partialsumme dieser Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ schreiben als

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x),$$

wobei D_N der N -te Dirichlet Kern ist.

◇

Beweis

Wie im 10. Vortrag in (1.5) und (2.2) definiert, ist

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx}$$

Ziehen wir e^{inx} und die Summe als Konstante nach y ins Integral hinein. Dies ist erlaubt, da es eine endliche Summe ist. Es ergibt sich

$$\sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy = (f * D_N)(x) \quad \square$$

Mit dieser Erkenntnis reicht es den N -ten Dirichlet-Kern zu untersuchen um Aussagen über die N -te Partialsumme $S_N(f)$ treffen zu können.

Wir werden nun einige Eigenschaften der Faltung von integrierbaren 2π -periodischen Funktionen näher betrachten.

(1.4) Satz

Seien f, g, h integrierbare 2π -periodische Funktionen auf \mathbb{R} . Dann gilt:

- (i) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$,
- (ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ für ein $c \in \mathbb{C}$,
- (iii) $f * g = g * f$,
- (iv) $f * g$ ist stetig,
- (v) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
- (vi) $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$. ◇

Generell:

In (i) bis (iv) zeigen wir die Linearität, Assoziativität und Kommutativität der Faltung. In (v) zeigen wir, dass Faltung immer stetig ist. Besonders interessant ist Aussage (vi), die deutlich macht, dass der Fourierkoeffizient vom Produkt zweier Funktionen f und g nicht gleich dem Produkt der Fourierkoeffizienten von f und g ist, also

$$\widehat{f \cdot g}(n) \neq \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

Ich beweise nun (i) und (ii) für alle f und g , (iii) bis (vi) erst nur für stetige f und g und später auch für unstetige beschränkte f und g .

Beweis

- (i) Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}
(f * (g + h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g + h)(x - y)dy \\
\text{Linearitaet} & \\
\text{Integral} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) + f(y)h(x - y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)h(x - y)dy \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)h(x - y)dy \right) \\
&= (f * g)(x) + (f * h)(x).
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$ und $c \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
((cf) * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c \cdot f(y)g(x - y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot c \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \\
&= c \cdot (f * g)(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot c \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cdot cg(x - y)dy \\
&= (f * (cg))(x)
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy$$

Mit der Substitution Analysis VI(2.8) von $y \mapsto x - y$ ergibt sich:
 (erlaubt, da die Funktion 2π -periodisch ist und es egal ist, wo das Integral beginnt und aufhört, solange es die Länge 2π hat, Vortrag 10 Lemma (1.8))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)d(x-y) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} g(y)f(x-y)dy \\ \text{Vortrag 10} & \\ \text{Lemma(1.8)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)f(x-y)dy \\ &= (g * f)(x) \end{aligned}$$

(iv) Wir zeigen zuerst, dass wenn f und g stetig sind, ist auch ihre Faltung stetig.
 Wir betrachten dazu:

$$(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)]dy$$

Da die Funktion g stetig ist, ist sie auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall sogar gleichmäßig stetig.

Da g auch periodisch ist, folgt daraus direkt, dass g gleichmäßig stetig ist auf ganz \mathbb{R} .

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für $|x_1 - x_2| < \delta$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gilt:

$$|g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Weiter gilt für $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)]dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2B\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2B\pi} 2\pi B,
\end{aligned}$$

wobei B so gewählt ist, dass $|f(x)| \leq B$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn f ist integrierbar und damit beschränkt.

Daraus folgt direkt, dass $f * g$ stetig ist.

(v) Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(y)h(x - y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y_1)g(y - y_1)dy_1 \right) h(x - y)dy \\
&\stackrel{\text{Subs}}{y_1 \rightarrow x - y_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x - y_1)g(y - x + y_1)dy_1 \right) h(x - y)dy
\end{aligned}$$

Nach Fubini dürfen wir zwei kompakte Intervalle, die ineinander liegen vertauschen, also

$$\int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy$$

Dies können wir nun wie folgt benutzen:

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-y_1)g(y-x+y_1)dy_1 h(x-y) \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-y_1)g(y-x+y_1)h(x-y) \right) dy dy_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y_1)g(y-x+y_1)h(x-y) dy dy_1 \\
&\stackrel{x-y \rightarrow y}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-y_1)g(y_1-y)h(y) dy dy_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y_1)g(y_1-y)h(y) dy dy_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y_1) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y_1-y)h(y) dy \right) dy_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y_1)(g * h)(y_1) dy_1 \\
&= (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

(vi) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-inx} dy dx \\
 \text{Fubini} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-inx} dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-iny} e^{-in(x-y)} dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\
 \text{Substitution} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) \\
 &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$

□

Um Satz (1.4)(v) für stetige Funktionen zu zeigen, brauchen wir einige Hilfsaussagen, um den Satz auch auf alle integrierbaren, beschränkten 2π -periodischen Funktionen zu erweitern.

(1.5) Lemma

Sei f eine auf dem Kreis integrierbare und von B beschränkte Funktion auf \mathbb{R} , wobei $B \geq |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wie in Beweis zu (1.4).

Dann existiert eine Folge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ von stetigen Funktionen auf dem Kreis, für die gilt:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_k(x)| \leq B \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad \diamond$$

Beweis

Sei f eine integrierbare, 2π -periodische Funktion, die von dem in (1.6)(v) definierten B beschränkt wird und von \mathbb{R} auf \mathbb{R} abbildet (falls f von \mathbb{C} auf \mathbb{C} betrachtet man Real- und Imaginärteil einzeln).

Sei $\varepsilon > 0$ mit der Partition $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \pi$ von dem Intervall $[-\pi, \pi]$, so dass die Ober- und Untersumme von f mit dieser Partition sich maximal um ε voneinander unterscheiden.

Sei f^* die dazugehörige Treppenfunktion, dann

$$f^*(x) = \sup_{x_{j-1} \leq y \leq x_j} f(y) \quad \text{für } x \in [x_{j-1}, x_j] \text{ und } 1 \leq j \leq N.$$

Dadurch folgt automatisch, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x)) dx < \varepsilon.$$

da $|f^*| \leq B$ aufgrund der Beschränktheit von f und f^* sozusagen die Obersumme von f ist.

Nun definieren wir mit Hilfe von f^* eine stetige, periodische Funktion \tilde{f} , der sich f immer noch annähern lässt (im Sinne von Lemma(1.5)).

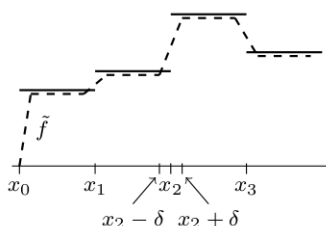
Für kleine $\delta > 0$ sei $\tilde{f}(x) = f^*(x)$, falls $|x - x_j| \geq \delta$ für $1 \leq j \leq N$.

Für $|x - x_j| < \delta$ für $1 \leq j \leq N - 1$, dann ist $\tilde{f}(x)$ die lineare Interpolation, für die $\tilde{f}(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$ gilt.

Bei x_0 ist \tilde{f} die lineare Interpolation mit $\tilde{f}(-\pi) = 0$ und $\tilde{f}(-\pi + \delta) = f^*(-\pi + \delta)$.

Genauso für $x_N = \pi$ ist $\tilde{f}(\pi) = 0$ und $\tilde{f}(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$.

Nach Konstruktion gilt $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ und \tilde{f} ist stetig auf dem Intervall von $[-\pi, \pi]$, daher können wir \tilde{f} zu einer 2π -periodischen Funktion auf \mathbb{R} fortsetzen.

Abbildung 1: die angenähert Funktion \tilde{f}

Weiter ist der Betrag dieser Fortsetzung von B beschränkt.

Somit unterscheidet sich \tilde{f} nur in den N möglichen 2δ -Umgebungen der Zerlegungspunkte x_j von f^* .

Also gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq 2BN(2\delta).$$

Falls δ klein genug, dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx < \varepsilon.$$

Mit $\int_{-\pi}^{\pi} |(f^*(x) - f(x))| dx < \varepsilon$ und der Dreiecksungleichung folgt daraus direkt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx < 2\varepsilon.$$

Es folgt also aus der Konstruktion von \tilde{f} , dass eine Folge stetiger beschränkter Funktionen $\{f_k\}$ existiert, wenn man $2\varepsilon = \frac{1}{k}$.

Diese Folge konvergiert gegen f für $k \rightarrow \infty$.

Somit ist das Lemma bewiesen.

□

Nun können wir die obigen Beweise auf integrierbare, beschränkte Funktionen erweitern.

Wir schließen nun den Beweis zu Satz(1.4)(v) auch für nicht stetige f und g ab.

Beweis

Seien f, g zwei 2π -periodische integrierbare und beschränkte Funktionen auf \mathbb{R} . Zu f und g gibt es nach Lemma(1.5) Folgen $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{g_k\}_{k=1}^\infty$, die stetig sind und f beziehungsweise g approximieren. Weiter gilt

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g + f_k * (g - g_k).$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$|(f - f_k) * g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)| |g(y)| dy$$

$$\stackrel{\text{Substitution,}}{\int g(y) dy \rightarrow \text{konstante}} \leq \frac{1}{2\pi} \sup_y |g(y)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)| dy \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

Demnach konvergiert $(f - f_k) * g(x)$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$

Analog gilt: $(g - g_k) * f(x)$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$

Es folgt direkt aus $(f - f_k) * g$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$

und $(g - g_k) * f$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$, $f_k * g_k$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ $\rightarrow f * g$,

da $(f - f_k) * g + f_k * (g - g_k) = f * g - f_k * g + f_k * g - f_k * g_k = f * g - f_k * g_k$.

Da jedes f_k und g_k stetig ist und jedes $f_k * g_k$ stetig ist, folgt damit, dass der Grenzwert $f * g$ auch stetig ist, selbst wenn f und g es nicht sind.

□

Auch den Beweis zu Satz(1.5)(vi) können wir nun wie folgt auch für nicht stetige f und g abschließen:

Beweis

Es ist schon bekannt, dass $\widehat{f_k}(n)\widehat{g_k}(n) = \widehat{f_k * g_k}(n)$, da f_k und g_k stetig sind. Weiter gilt auch $f_k * g_k \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f * g$.

Nun gilt die Abschätzung:

$$|\widehat{f}(n) - \widehat{f}_k(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_k(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx$$

Daraus folgt direkt, dass $\widehat{f}_k(n) \rightarrow \widehat{f}(n)$, für $k \rightarrow \infty$.

Analoges gilt auch für $\widehat{g}_k(n) \rightarrow \widehat{g}(n)$. □

Damit haben wir gezeigt, dass Satz (1.4) auch für integrierbare Funktionen gilt.

Die Beweise für nicht stetige f und g der Aussagen (iii) und (iv) erfolgen mit der gleichen Argumentation.

Nun haben wir also gezeigt, dass für integrierbare, beschränkte Funktionen die Faltung sogar Stetigkeit liefert.

§2 Gute Kerne

Dieser Abschnitt handelt von guten Kernen und deren charakteristischen Eigenschaften. Wir werden sehen, dass Funktionen mit Hilfe von Faltung mit guten Kernen approximiert werden können.

Zunächst definieren wir, was unter guten Kernen zu verstehen ist.

(2.1) Definition (gute Kerne)

Sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von Kernen auf den Kreis. $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißen *gute Kerne*, wenn sie folgende Voraussetzungen erfüllen:

a) für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$$

b) es existiert ein $M > 0$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M,$$

c) für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

◇

Man kann gute Kerne als Gewichtsverteilungen auf den Kreis interpretieren. Die 1. Eigenschaft guter Kerne stellt sicher, dass die Verteilung normiert bleibt, das heißt die Summe aller 1 ergibt. Die 3. Eigenschaft sorgt dafür, dass die guten Kerne für große n ihre „Masse“ im 0-Punkt konzentrieren. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung (2) eine Familie guter Kerne.

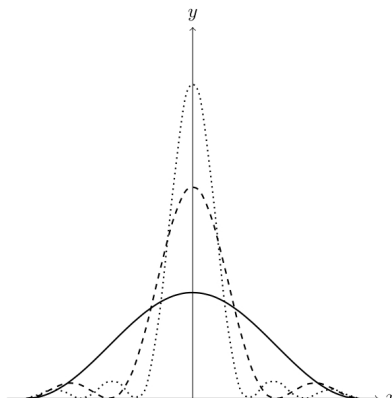


Abbildung 2: Familie guter Kerne

Die Kombination aus guten Kernen (2.1) und Faltung führt uns sofort zu folgender Aussage.

(2.2) Satz

Sei $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von guten Kernen, und f eine integrierbare Funktion über einem Kreis. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

für alle Punkte x , in denen f stetig ist. Wenn f stetig ist, dann ist der Limes gleichmäßig. \diamond

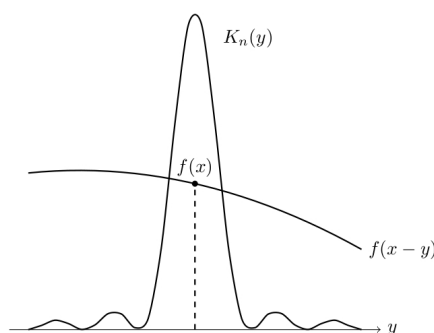


Abbildung 3: eine Funktion und ein guter Kern

Aufgrund dieses Resultats wird die Faltung mit einer Familie $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ auch als approximierende Identität bezeichnet. In diesem Kontext ist die Faltung der „gewichtete Durchschnitt“ von $f(x-y)$, während die guten Kerne Gewichtsfunktionen bilden; für große n verschwinden die Kerne in allen Punkten außer in denen nahe 0 und nimmt in diesen einen durchschnittlich einen Wert nahe 1 an. Es wird also im Limes der Funktionswert von f an der Stelle x gewertet und zwar mit dem Wert 1. Das illustriert auch Abbildung (3).

Beweis

Zu $\varepsilon > 0$ und f stetig in x wähle δ so, dass für alle $|y| < \delta$ gilt $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Dann folgt mit der 1. Eigenschaft von guten Kernen:

$$\begin{aligned} (f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) dy - f(x) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) dy}_{=1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{< \varepsilon} dy + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{< 2B} dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| dy + \frac{2B}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \end{aligned}$$

wobei B eine obere Schranke von f ist (f ist beschränkt, da f Riemann-integrierbar ist). Der erste Term ist beschränkt durch $\frac{\varepsilon M}{2\pi}$ aufgrund der 2. Eigenschaft von guten Kernen. Aus der 3. Eigenschaft guter Kerne folgt, dass der zweite Term für $n \rightarrow \infty$ kleiner als ε wird.

Es gibt also ein konstantes $C > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Wir erhalten also, für alle ε existiert $C > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq C \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Wenn f stetig ist, folgt aus der Beschränktheit von f sogar die gleichmäßige Stetigkeit, denn δ kann dann unabhängig von x gewählt werden. Es folgt die gleichmäßige Konvergenz. \square

(2.3) Bemerkung

Rückwirkend auf (1.3)

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$$

stellt sich die Frage, ob der Dirichlet-Kern ein guter Kern ist. Dann würde mit Satz (2.2) folgen, dass die Fourier-Reihe von f in allen Stetigkeitspunkten x gegen $f(x)$ konvergieren würde.

Die 1. Eigenschaft von guten Kernen wird vom Dirichlet-Kern erfüllt.

Beweis

Zu allererst sollte man den Dirichlet-Kern $D_N(x)$, der in Vortrag 10 eingeführt wurde, umformen:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{inx} + e^{-inx}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx).$$

Integrieren ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^N \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\frac{1}{n} \sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{n} \sin(-n\pi)}_{=0} \right) = 1. \end{aligned}$$

Allerdings erfüllt der Dirichlet-Kern nicht die 2. Voraussetzung für gute Kerne, denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq c \log N, \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

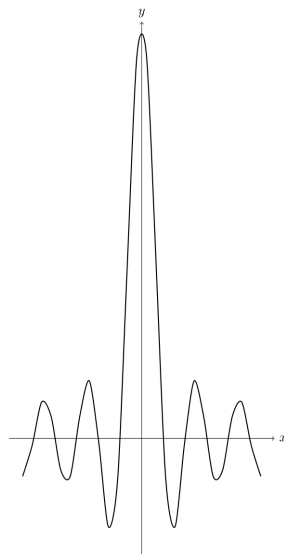


Abbildung 4: Der Dirichlet-Kern für ein großes N

Das kann man auch in Abbildung (4) sehen, denn die 1. Eigenschaft von guten Kernen kommt nur über Auslöschungen zustande. Das Integral über die Beträge geht gegen unendlich. \square

Der folgende Satz ist eine Hilfsaussage, um anschließend zu beweisen, dass die Fejér-Kerne, die wir schon aus Vortrag 10 kennen, gute Kerne sind.

(2.4) Satz

Der Fejér ist gegeben durch:

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}, & \text{für } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N, & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Beweis

Sei $x = 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(0) \stackrel{\text{Vortrag 10}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (2k-1) \\ &= \frac{1}{N} \left(2 \sum_{k=1}^N k - \sum_{k=1}^N 1 \right) = \frac{1}{N} (N(N+1) - N) = N \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ gilt: Zunächst muss man den Dirichlet-Kern umformen.

$$\begin{aligned}
 D_k(x) &= \frac{\sin(kx + \frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{i(kx + \frac{x}{2})} - e^{-i(kx + \frac{x}{2})})}{\frac{1}{2i}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
 &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}}(e^{ikx + ik} - e^{-ix(k+x)})(e^{-ix} - 1)}{e^{-i\frac{x}{2}}(e^{ix} - (e^{-ix} - 1))} \\
 &= \frac{e^{ikx} + e^{-ikx} - (e^{-ix(k+1)} + e^{ix(k+1)})}{2 - (e^{-ix} + e^{ix})} \\
 &= \frac{2}{2} \cdot \frac{(\cos(kx) - \cos(x(k+1)))}{1 - \cos(x)}
 \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Fejér-Kerne umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\cos(kx) - \cos(x(k+1))}{1 - \cos(x)} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 - \cos(x)} \sum_{k=0}^{N-1} (\cos(kx) - \cos(x(k+1))) \\
 \text{Teleskopsumme} &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 - \cos(x)} (\cos(0) - \cos(Nx)) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{2}{2} \cdot \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{N \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{N \sin^2(\frac{x}{2})}
 \end{aligned}$$

, wobei ausgenutzt wird, dass nach dem Halbwinkelsatz gilt:

$$(*) \quad \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)) \Leftrightarrow 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos(x). \quad \square$$

Mit Satz(2.2) ergibt sich, dass zum Beispiel Féjér-Kerne eignen, die Identität von Funktionen anzunähern.

(2.5) Lemma

Die Féjér-Kerne $\{F_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ aus Vortrag 10 (2.4) sind gute Kerne.

Beweis

Wir wissen aus Vortrag 10, dass gilt:

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_{N-1}(x)}{N}.$$

Damit folgt die 1. Eigenschaft guter Kerne mit Bemerkung (2.3)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{\overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_0(x) dx}^{=1} + \dots + \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{N-1}(x) dx}^{=1}}{N} = 1$$

Es gilt nach (2.4):

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}, & \text{für } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N, & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Die 2.Eigenschaft ergibt sich mit dieser Darstellung dann direkt, da $F_N(x) = |F_N(x)|$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ist und damit gilt $\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx = 2\pi$.

Um die 3.Eigenschaft zu überprüfen zeigen wir zunächst, dass $F_N(x) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Es folgt erst einmal aus der strengen Monotonie von $\sin^2(x/2)$ auf $[0, \pi]$.

Für $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$ gilt dann:

$$\sin^2(0) = 0 < \underbrace{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}_{=:c_\delta} \leq \sin^2\left(\frac{|x|}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Das ergibt für $F_N(x)$ mit Hilfe der Beschränkung des $\sin(x)$ durch 1

$$|F_N(x)| = \left| \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \right| \leq \frac{1}{Nc_\delta} \quad \forall \delta \leq |x| \leq \pi$$

Damit erhalten wir für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \geq N_0$ gilt:

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x) dx| \leq \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{c_\delta} dx \leq \frac{1}{N_0} \frac{2(\pi - \delta)}{c_\delta} < \varepsilon$$

Es folgt die 3. Eigenschaft guter Kerne. □

Es zeigt sich also, dass wir mit den schon bekannten Féjer-Kernen mithilfe von Satz (2.2) eine 2π -periodische integrierbare Funktion in allen x , in denen f stetig ist approximieren können. ◇

(2.6) Definition

Der Ausdruck

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x)$$

beschreibt das N -te Cesàro-Mittel der Fourier-Reihe mit den Partialsummen S_n von f . \diamond

(2.7) Satz

Ist f auf dem Kreis integrierbar, dann ist die Fourier-Reihe von f konvergent im Sinne von Cesàro gegen f , in allen Punkten, in denen f stetig ist.

Beweis

Nach Lemma (2.5) ist $\{F_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ eine Familie guter Kerne.

Weiter ist:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n(x) = (f * \sum_{n=0}^{N-1} \frac{D_n}{N})(x) = (f * F_N)(x)$$

Also erhält man an allen Stetigkeitspunkten von f nach Satz (2.2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f * F_N)(x) = f(x).$$

Für eine stetige Funktion folgt so auch die gleichmäßige Konvergenz gegen f . \square

Abschließend können wir also sagen, dass Stetigkeit kein ausreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Fourier-Reihe ist. Allerdings können wir nun die Konvergenz der Fourier-Reihe im Sinne von Cesàro gegen die Funktion in allen Stetigkeitspunkten der Funktion zeigen.