Topologische Grundbegriffe I

Vortrag zum Proseminar Analysis, 26.04.2010

Nina Neidhardt und Simon Langer

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass topologische Konzepte, die uns schon für die Reellen Zahlen bekannt sind, allgemein für metrischen Räumen gelten.

§1 Offene und Abgeschlossene Mengen

Im Folgenden wollen wir offene und geschlossene Mengen definieren und ihre Eigenschaften betrachten.

(1.1) Definition (Berührungspunkt einer Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt p einen Berührungspunkt von S, wenn es eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in S gibt, die gegen $p \in M$ konvergiert. $\diamond$

(1.2) Definition (Abgeschlossene Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt S abgeschlossen, wenn alle Berührungspunkte von S in S enthalten sind. $\diamond$

(1.3) Definition (Offene Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt S offen, wenn für alle $p \in S$ ein $r > 0$ existiert, so dass für alle $q \in M$ mit $d(p,q) < r$ gilt, dass q ein Element von S ist. $\diamond$

(1.4) Beispiel
Betrachten wir die Reellen Zahlen.
Abgeschlossene Intervalle, wie $[1,3]$, sind ein uns bekanntes Beispiel für abgeschlossene Mengen.
Offene Intervalle, wie $(1,3)$, sind ein uns bekanntes Beispiel für offene Mengen. $\diamond$

(1.5) Satz (Komplemente offener/abgeschlossener Mengen)
Die Offenheit und die Abgeschlossenheit einer Menge sind dual zueinander. Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen und das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen. $\diamond$

Beweis
Sei M ein metrischer Raum.

a) Beh.: Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen.
Sei $S \subseteq M$ eine offene Menge.
Es gilt zu zeigen, dass alle $(p_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \subset S^C$ gegen ein $p \in S^C$ konvergieren oder divergieren.
Wir beweisen dies durch Widerspruch.
Nehmen wir an, dass $p \notin S^C$ ist, also $p \in S$.
Da S eine offene Menge ist, gibt es ein $r > 0$ so, dass für alle $q \in M$ mit $d(p,q) < r$ gilt, dass $q \in S$ ist.
Wenn $(p_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es laut Definition ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(p, p_n) < r$ für alle $n > N$, also $p_n \in S$ für alle $n > N$. Daher kann p_n nicht in S^C liegen.
Das ist ein Widerspruch. p muss also in S^C liegen. Nach der Definition ist S^C daher eine abgeschlossene Menge.

b) Beh.: Das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen.
Sei $S \subseteq M$ eine abgeschlossene Menge. .
Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch.
Nehmen wir an es gäbe für ein $p \in S^C$ kein $r > 0$ bei dem für alle $q \in M$ mit $d(q,p) < r$ gilt, dass q $\in S^C$ ist.
Dann gibt es für jedes $r > 0$ ein $q \in S$ mit $d(q,p) < r$.
Nun wählen wir $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine Folge $(q_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $d(q_n, p) < \frac{1}{n}$, die gegen p konvergiert.
Da $p \in S^C$, gilt $p \notin S$. Es gibt also eine Folge in S, die gegen einen Punkt konvergiert der nicht in S liegt.
Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass S eine abgeschlossene Menge ist.
Nach der Definition ist S^C also eine offene Menge. □

(1.6) Bemerkung (Offene/Geschlossene Mengen)
Viele Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, zum Beispiel das Intervall $(a, b]$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Auch sein Komplement ist weder offen noch abgeschlossen. Allerdings können Mengen auch gleichzeitig offen und abgeschlossen sein. Das bekannteste Beispiel ist die Menge der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und sein Komplement in $\mathbb{R}$, die leere Menge ($\emptyset$). Beide Mengen sind abgeschlossen und offen. ◇

(1.7) Definition (Topologie von M)
Sei M ein metrischer Raum.
Die Topologie von M ist definiert als die Menge $\mathcal{T}$ aller offenen Teilmengen von M.$\diamond$

(1.8) Satz (Eigenschaften der Topologie von M)
Sei M ein metrischer Raum. Die Topologie von M hat folgende drei Eigenschaften:

a) Jede Vereinigung offener Teilmengen von M ist wiederum offen.

b) Jeder endliche Schnitt offener Teilmengen von M ist wiederum offen.

c) M und die leere Menge sind offen. $\diamond$

Beweis
Sei M ein metrischer Raum.

a) Sei I eine beliebige Indexmenge, $\alpha \in I$, U_α eine offene Teilmenge von M und $V = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
Wir wollen zeigen, dass V offen ist.
Für alle $p \in V$ gilt: Es gibt ein α so, dass $p \in U_\alpha$. Da U_α offen ist, gibt es laut Definition ein $r > 0$ so, dass für alle $q \in M$ mit $d(p,q) < r$ folgt: $q \in U_\alpha$.
Da $U_\alpha \subset V$ ist, gilt für alle $q \in M$ mit $d(p,q) < r$, dass $q \in V$ ist.
Daraus folgt nach der Definition, dass V offen ist.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \cdots, U_n$ offene Teilmengen von M und $W = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$.
Wir wollen zeigen, dass W offen ist.
Sei $p \in W$. Da U_k eine offene Menge ist, gibt es für jedes k ein $r_k > 0$ so, dass aus $d(p,q) < r_k$ folgt, dass $q \in U_k$. Sei $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$.
Für alle $q \in M$ mit $d(q,p) < r \leq r_k$ folgt, dass $q \in U_k$ mit $1 \leq k \leq n$, also $q \in W$.
Daher ist W offen.

c) Da die leere Menge keine Elemente enthält, sind die Bedingungen für die offene und die abgeschlossene Menge erfüllt. Die leere Menge und M als Komplement der leeren Menge in M sind also abgeschlossen und offen. $\square$

(1.9) Satz (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)
Sei M ein metrischer Raum.

a) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind wiederum abgeschlossen.

b) Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wiederum abgeschlossen.

c) M und die leere Menge sind abgeschlossen. $\diamond$

Beweis
Sei M ein metrischer Raum, I eine beliebige Indexmenge, $\alpha \in I$ und K_α eine abgeschlossene Teilmenge von M. Zu jedem K_α gibt es ein Komplement in M, das wir U_α nennen. U_α ist als Komplement einer abgeschlossenen Menge offen. Nun wenden wir Satz (1.8) und De Morgans Regeln an. De Morgans Regeln kann man im Anhang von Analysis I (A.12) nachlesen.

a) Sei $K = \bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha$.
Nach den Regeln von De Morgan gilt:

$$K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)^C.$$

Da $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ nach (1.8) a) offen ist, ist $(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha)^C$ als sein Komplement abgeschlossen.

b) Sei $n \in \mathbb{N}, \alpha \in I \subset \mathbb{N}$ und $K = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} K_\alpha$.
Nach den Regeln von De Morgan gilt:

$$K = \bigcup_{\alpha=1}^{n} K_\alpha = (\bigcap_{\alpha=1}^{n} U_\alpha)^C.$$

Da $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_\alpha$ nach (1.8) b) offen ist, ist $(\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_\alpha)^C$ als sein Komplement abgeschlossen.

c) Es gilt: $M^C = \emptyset$ und $\emptyset^C = M$. Da M und $\emptyset$, wie oben bewiesen, offen sind, sind sie auch abgeschlossen. □

Beweis (Alternativer Beweis)
Sei M ein metrischer Raum

a) Sei $I \subset \mathbb{N}$ eine beliebige Indexmenge, $\alpha \in I$, K_α eine geschlossene Teilmenge von M und $V = \bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha$.
Wir wollen zeigen, dass V abgeschlossen ist.
Sei $(p_n)_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in V, also in allen K_α, und $p \in M$ der Limes dieser Folge. Da K_α abgeschlossene Mengen sind, ist p Element aller K_α und somit ist $p \in V$.
Damit ist V abgeschlossen.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, K_1, ..., K_n abgeschlossene Teilmengen von M und $W = \bigcup\limits_{k=1}^{n} K_k$.
Wir wollen zeigen, dass W abgeschlossen ist.
Sei $(p_m)_{\mathrm{m} \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in W. Da eine Folge unendlich viele Glieder hat, wir jedoch nur endlich viele Teilmengen vereinigen, gibt es ein $k \in \{1...n\}$

so, dass unendlich viele Folgenglieder von p_m in K_k liegen.
Damit liegt eine Teilfolge von p_m in K_k. Diese Teilfolge hat denselben Limes wie p_m. Da die Teilfolge in K_k liegt und K_k abgeschlossen ist, ist der Limes $p \in K_k$.
Damit ist $p \in W$ und somit ist W abgeschlossen. □

(1.10) Bemerkung (Unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen)
Im Allgemeinen sind unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen.
Betrachten wir beispielsweise die Mengen $U_k = [\frac{1}{k}, 1]$, $k \in \mathbb{N}$.
Jede einzelne Menge ist abgeschlossen, ihre Vereinigung aber ist die Menge $(0, 1]$. In dieser Menge gibt es eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $p_n = \frac{1}{n}$ deren Limes 0 ist und nicht in der Menge liegt. Daher ist sie nicht abgeschlossen. ◇

(1.11) Definition (Die Menge der Berührungspunkte)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Die Menge der Berührungspunkte ist definiert als die Menge aller Punkte $p \in M$, für die gilt, dass p ein Berührungspunkt von S ist. Man schreibt dafür auch $\lim S$. ◇

(1.12) Definition (Die r-Umgebung von p in M)
Sei M ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$.
Die r-Umgebung von p in M ist definiert als die Menge aller Punkte q für die gilt, dass $d(p, q) < r$ und $q \in M$. Man schreibt dafür auch $M_r(p)$. ◇

(1.13) Lemma
Sei M ein metrischer Raum, S eine Teilmenge von M, $p \in M$ uni $r \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) p ist ein Berührungspunkt von S.

b) Für alle $r > 0$ gilt: $M_r(p) \cap S \neq \emptyset$. ◇

Beweis

a) ⇒ b) Sei p ein Berührungspunkt von S. Also existiert eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ mit Limes p. Laut der Definition des Limes einer Folge gibt es für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(p_n, p) < r$ für alle $n \geq N$, also $p_n \in M_r(p)$. Diese p_n liegen im Schnitt von $M_r(p)$ und S, das heißt

$$p_n \in M_r(p) \cap S.$$

Somit folgt b).

b) $\Rightarrow$ a) Angenommen, für alle $r > 0$ gibt es ein $p \in M$ mit $p \in S \cap M_r(p)$.
Wir wählen r als $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. In jeder Umgebung $M_{\frac{1}{n}}$ (p) liegt ein $p_n \in S$.
Der Abstand von p_n zu p konvergiert gegen 0, also konvergiert p_n gegen p.
Somit ist p ein Berührungspunkt von S. □

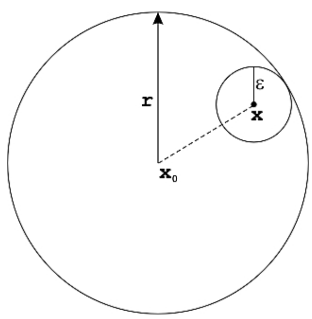
(1.14) Satz (Die Menge der Berührungspunkte ist abgeschlossen)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Dann ist $\lim S$ abgeschlossen. ◇

Beweis
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Wir wollen zeigen, dass $\lim S$ abgeschlossen ist.
Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \lim S$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert p.
Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist p_k ein Berührungspunkt von S.
Daher gibt es nach (1.13) ein $q_k \in S$ mit $d(q_k, p_k) < \frac{1}{k}$.
Mit der Dreiecksungleichung aus dem vorherigen Kapitel gilt nun:

$$0 \leq d(p, q_k) \leq d(p, p_k) + d(p_k, q_k) < d(p, p_k) + \frac{1}{k}$$

Es gilt $\lim\limits_{k \to \infty} d(p, p_k) = 0$ und $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$.
Nach dem Sandwich-Lemma folgt, dass $\lim\limits_{k \to \infty} d(p, q_k) = 0$
Also ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ eine konvergente Folge mit den Grenzwert p.
Damit ist p ein Berührungspunkt von S und liegt folglich in $\lim S$.
Also ist $\lim S$ abgeschlossen. □

(1.15) Satz (Die *r*-Umgebung von *p* in *M* ist offen)
Sei M ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $M_r(p)$ offen. ◇



Beweis
Sei M ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$.
Wir wollen zeigen, dass $M_r(p)$ offen ist.
Sei $q \in M_r(p)$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$s = r - d(p,q) > 0.$$

Sei nun $x \in M$ mit $d(q,x) < s$.
Da $d(q,x) < s$ und $s = r - d(p,q)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} & d(q,x) < r - d(p,q) \\ \Leftrightarrow\ & d(q,x) + d(p,q) < r \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun:

$$d(p,x) \leq d(q,x) + d(p,q) < r.$$

Also liegt x in $M_r(p)$. Da man zu jedem $q \in M_r(p)$ ein s finden kann, so dass $M_s(q) \subset M_r(p)$ ist, ist $M_r(p)$ offen. $\square$

(1.16) Definition (Die Umgebung Von p In M)
Sei M ein metrischer Raum mit $p \in M$ und V eine beliebige offene Teilmenge von M. Man nennt V eine Umgebung von p, wenn $p \in V$ ist. $\diamond$

(1.17) Bemerkung
Da $M_r(p)$ nach (1.15) offen ist, ist $M_r(p)$ eine Umgebung von M. Manchmal wird auch der Ausdruck „abgeschlossene Umgebung“ verwendet. Damit ist eine abgeschlossene Teilmenge von M gemeint, die eine offene Umgebung von p enthält. $\diamond$

§2 Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$

Neben beschränkten offenen Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, kann man auch unbeschränkte offene Intervalle der Form $(-\infty, b)$, (a, ∞) und $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ betrachten.

(2.1) Lemma
Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ kann eindeutig als abzählbare Vereinigung disjunkter, offener Intervalle geschrieben werden. Die Endpunkte der Intervalle gehören nicht zu U. $\diamond$

Beweis
Für alle $x \in U$ definiere

$$\begin{aligned} a_x &= \inf\{a : (a, x) \subset U\}, \\ b_x &= \sup\{b : (x, b) \subset U\}. \end{aligned}$$

Dann ist $I_x = (a_x, b_x)$ ein offenes Intervall und $x \in I_x \subset U$. Es ist das maximale offene Intervall in U, das x enthält. Wenn der Endpunkt b_x in U liegt, gibt es ein offenes Intervall J mit $b_x \in J \subset U$, da U offen ist. Aber $I_x \cup J$ ist dann ein größeres offenes Intervall in U, das x enthält.
Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität.
Da analog für a_x gezeigt werden kann, dass $a_x \notin U$, können die Endpunkte von I_x nicht in U liegen. Sei y ein weiteres Element aus U, so dass $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ ist, so ist $I_x \cup I_y$ ein offenes Intervall in U, das x und y enthält. Nach Maximalität ist $I_x = I_x \cup I_y = I_y$. Also sind I_x und I_y entweder gleich oder disjunkt für beliebige $x, y \in U$. Damit ist bewiesen, dass U die disjunkte Vereinigung dieser maximalen, offenen Intervalle ist. Nun ist noch zu zeigen, warum es nur abzählbar viele disjunkte, offene Intervalle in $\mathbb{R}$ gibt. Man nehme aus einer beliebigen Vereinigung disjunkter Intervalle in $\mathbb{R}$ aus jedem Intervall eine rationale Zahl. Dann besagt die Disjunktheit, dass die ausgewählten Zahlen verschieden sind. Also gibt es abzählbar viele Zahlen und dementsprechend abzählbar viele Intervalle. Deshalb ist U die abzählbare disjunkte Vereinigung der maximalen offenen Intervalle in I_x.

Zur Eindeutigkeit:
Sei Q_n ein offenes Intervall für alle $n \in I \subset \mathbb{N}$. Seien weiterhin $c_n, c_m, d_n, d_m \in \mathbb{R}$ mit $c_n < d_n$ und $c_m < d_m$ so definieren wir

$$Q_n = (c_n, d_n)$$

Dann gelten folgende Eigenschaften

$$Q_n \cap Q_m = \emptyset$$

für alle $n, m \in I$ und $n \neq m$ und

$$U = \bigcup_{n \in I} Q_n$$

Es ist einerseits zu zeigen: Für alle $n \in I$ existiert ein $x \in U$, sodass $Q_n = I_x$
Dabei folgt $Q_n \subset I_x$ aus der Maximalität von I_x.
Man zeige $I_x \subset Q_n$ durch Widerspruch:
Angenommen es gibt ein $n \in I$ mit $I_x \not\subset Q_n$. So gilt entweder $a_x < c_n$ oder $b_x > d_n$.
Falls $a_x < c_n$, so existiert ein Intervall Q_m mit $c_n \in Q_m = (c_m, d_m)$.
Aber dann folgt $\emptyset \neq (c_n, \min(d_n, d_m)) \subset ((c_m, d_m) \cap (c_n, d_n)) = Q_m \cap Q_n$.
Dass gilt $Q_m \cap Q_n \neq \emptyset$ ist ein Widerspruch zur Disjunktheit, denn aus $c_n \in Q_m \setminus Q_n$ folgt $m \neq n$.
Analog kann man diesen Widerspruch für $b_x > d_n$ folgern, womit $I_x \subset Q_n$ und somit auch $I_x = Q_n$ gezeigt ist.

Andererseits ist zu zeigen: Für alle $x \in U$ existiert ein $n \in I$, sodass $Q_n = I_x$ gilt.
Dabei folgt $Q_n \subset I_x$ aus der Maximalität von I_x.
Man zeige $I_x \subset Q_n$ durch Widerspruch:
Angenommen es gibt ein $x \in U$ mit $I_x \not\subset Q_n$. So entsteht ein Widerspruch analog zum obigen Widerspruch.
Damit kann jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ eindeutig als abzählbare Vereinigung disjunkter, offener Intervalle geschrieben werden. $\square$

§3 Topologische Beschreibung von Stetigkeit

Eine Eigenschaft des metrischen Raums bzw. einer Abbildung zwischen metrischen Räumen, die allein durch offene (oder abgeschlossene) Mengen beschrieben werden kann, heißt topologische Eigenschaft.
Die folgende Erkenntnis beschreibt Stetigkeit topologisch:

(3.1) Definition (Urbild)
Seien M, N metrische Räume und sei die Abbildung $f : M \to N$ sowie $B \subset N$ gegeben. Dann ist

$$f^{pre}(B) := \{x \in M | f(x) \in B\}$$

das Urbild von B unter f. ◇

(3.2) Bemerkung
Das Urbild von B heißt auch inverses Bild von B und wird geschrieben $f^{-1}(B)$. Diese Schreibweise kann aber für Verwirrung sorgen, solange f nicht bijektiv ist. Dann existiert keine Umkehrabbildung f^{-1}. Dennoch sieht man oft Ausdrücke wie $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Wenn f keinen Punkt aus M nach N abbildet, dann ist $f^{pre}(B) = \emptyset$. ◇

(3.3) Beispiel
Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$$

.
Dann ist das Urbild des Intervalls [3,6] in $\mathbb{R}$ der Kreisring mit innerem Radius eins und äußerem Radius zwei. Der Bildbereich ist der Raum der reellen Zahlen größer oder gleich zwei. Der Graph von f ist ein Paraboloid mit Minimum (0,0,2). ◇

(3.4) Lemma
Seien M, N metrische Räume und $f : M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Eine Funktion $f : M \longrightarrow N$ mit $M \subset \mathbb{N}$ und $x_0 \in M$ beliebig heißt stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

b) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in N ist abgeschlossen in M.

c) Das Urbild jeder offenen Menge in N ist offen in M. ◇

Beweis

(a)⇒(b) Wir müssen zeigen: $p \in f^{pre}(K)$.
Sei K abgeschlossen in N und sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f^{pre}(K)$, die gegen $p \in M$ konvergiert. Nach Theorem 2 aus »Real Mathematical Analysis« von Pugh kann man den Limes mit f vertauschen, da f stetig ist:

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p)$$

Nach Annahme ist $f(p_n) \in K$. Da K abgeschlossen ist, ist $f(p) \in K$. Also $p \in f^{pre}(K)$.

(b)⇒(c) Die Aussage folgt sofort aus der vorherigen, da das Komplement einer abgeschlossenen Menge offen ist und da $f^{pre}(U)^c = f^{pre}(U^c)$ gilt.
Denn $f^{pre}(U^c) = f^{pre}(N \backslash U) = f^{pre}(N) \backslash f^{pre}(U) = M \backslash f^{pre}(U) = f^{pre}(U)^c$

(c)⇒(a) Sei $p \in M$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz (1.14) ist $N_\varepsilon(f(p))$ offen in N. Nach (c) ist $f^{pre}(N_\varepsilon(f(p)))$ offen in M und $p \in M$, also existiert ein $M_\delta(p) \subset f^{pre}(N_\varepsilon(f(p)))$. Deshalb folgt aus $d(x, p) < \delta$, dass $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ und dementsprechend ist f stetig. □

(3.5) Definition (Homöomorphismus)
Seien M, N metrische Räume. Ein Homöomorphismus ist eine stetige, bijektive Abbildung $f : M \to N$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. ◇

(3.6) Lemma
Ein Homöomorphismus $f : M \to N$ bildet eine Familie von offenen Mengen von M bijektiv auf eine Familie von offenen Mengen von N ab. Er bildet die Topologien bijektiv ab. ◇

Beweis
Sei V offen in N. Nach Satz (3.4) und der Stetigkeit von f ist auch das Urbild von V offen in M. Da f bijektiv ist, ist das Urbild $U = \{p \in M : f(p) \in V\}$ genau das Bild von V nach der inversen Bijektion $U = f^{-1}(V)$. Das selbe gilt für f^{-1}, da f^{-1} auch ein Homöomorphismus ist. Also ist $V = f(U)$. Deshalb bildet f die Topologie von M bijektiv auf die von N ab. □

(3.7) Bemerkung
Ein Homöomorphismus heißt auch topologische Äquivalenz. Im Allgemeinen müssen stetige Abbildungen offene Mengen nicht auf offene Mengen schicken. ◇

(3.8) Beispiel
Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ sei gegeben.
Die Funktion g ist nicht bijektiv und somit nicht homöomorph, denn sie schickt das offene Intervall (-1,1) auf das nicht offenen Intervall [0,1). ◇