Topologische Grundbegriffe II

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 03.05.2010

Dennis Joswig, Florian Goy

Aufbauend auf den Resultaten des Vortrages Topologische Grundbegriffe I untersuchen wir weitere topologische Eigenschaften von metrischen Räumen. Darüber hinaus werden wir auch Resultate aus der Analysis I auf alle metrischen Räume ausdehnen.

Inhaltsverzeichnis

§1 Begriffe auf Mengen

Wir führen zunächst die Begriffe Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes ein.

Sei im Folgenden M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.

(1.1) Definition (Abschluss)
Wir nennen $\bar{S}$ den *Abschluss* von S mit

$$\bar{S} := \bigcap_{\substack{S \subset K \\ \text{K abgeschlossen}}} K. \qquad \diamond$$

(1.2) Definition (Innere)
Wir nennen $\mathring{S}$ das *Innere* von S mit

$$\mathring{S} := \bigcup_{\substack{K \subset S \\ \text{K offen}}} K. \qquad \diamond$$

(1.3) Definition (Rand)
Wir nennen ∂S den *Rand* von S mit

$$\partial S := \bar{S} \setminus \mathring{S}. \qquad \diamond$$

(1.4) Korollar
Alternativ lässt sich der Rand ∂S von S definieren durch:

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{S^c}. \qquad \diamond$$

Beweis
Die Gleichheit folgt aus der Definition des Abschlusses (1.1):

$$\partial S = \bar{S} \setminus \mathring{S} = \bar{S} \cap (\mathring{S})^c \overset{(1.2)}{=} \bar{S} \cap \Big(\bigcup_{\substack{K \subset S \\ \text{K offen}}} K \Big)^c.$$

Das ist nach De Morgan:

$$\bar{S} \cap \Big(\bigcap_{\substack{K \subset S \\ K \text{ offen}}} K^c \Big) \overset{(\star)}{=} \bar{S} \cap \Big(\bigcap_{\substack{S^c \subset K^c \\ K^c \text{ abgeschlossen}}} K^c \Big) = \bar{S} \cap \overline{S^c}.$$

($\star$) Nach Topologische Grundbegriffe (1.5) ist K^c genau dann abgeschlossen in M, wenn K offen in M ist.
Sei $x \in S^c$. Das impliziert $x \in M \setminus S$, also ist $x \in (M \setminus S \cup S \setminus K)$.
Dann gilt mit $K \subset S \subset M$, dass $x \in M \setminus K$, also $x \in K^c$ ist.
Insgesamt folgt dann $S^c \subset K^c$.
Also ist S^c eine Teilmenge von K^c, wenn K eine Teilmenge von S ist. □

Eine wichtige Eigenschaft des Abschlusses erhalten wir in dem

(1.5) Satz
Es gilt die Identität:

$$\bar{S} = \lim S. \qquad \diamond$$

Beweis
„$\subseteq$" Nach dem Vortrag Topologische Grundbegriffe I, Satz (1.14), ist die Menge der Berührpunkte $\lim S$ abgeschlossen. S ist eine Teilmenge von $\lim S$, denn für alle $s \in S$ liegt die konstante Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $s_n = s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, in S und es gilt $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Weil $\bar{S}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die S enthält und da $\lim S$ abgeschlossen ist, folgt:

$$\bar{S} \subseteq \lim S.$$

„$\supseteq$" $\lim S$ besteht aus allen Berührpunkten von S, also gilt:

$$\lim S \subseteq \bar{S}. \qquad \square$$

§2 Vererbung

Im Folgenden untersuchen wir die Eigenschaften von metrischen Unterräumen. Dabei stellt sich die Frage, welche Eigenschaften eines metrischen Raumes an seinen Unterraum vererbt werden.
Seien N, M metrische Räume, S eine Teilmenge von M und S eine Teilmenge von N. Sei zum Beispiel S abgeschlossen in N, ist S dann auch abgeschlossen in M?
Dass dies nicht der Fall sein muss, zeigt das folgende

(2.1) Beispiel
Seien a, b $\in \mathbb{R}$, $a < b$. Das Intervall (a, b) ist abgeschlossen in sich selbst, aber nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. $\diamond$

Notation: Da bei der Notation aus §1 nicht direkt hervorgeht, in welchem metrischen Raum operiert wird, führen wir die folgende Schreibweise ein:

$\mathrm{cl}_M(S)$ statt $\bar{S}$ (Abschluss von S in M),
$\partial_M(S)$ statt ∂S (Rand von S in M),
$\mathrm{int}_M(S)$ statt $\mathring{S}$ (Menge der inneren Punkte von S in M).

(2.2) Korollar
Sei M ein metrische Raum, N ein metrischer Unterraum von M, $r \in \mathbb{R}$, $p \in N$ und $S \subset N$. Dann gilt:

(i) $N_r p = M_r p \cap N$,

(ii) $\mathrm{cl}_N(S) = \mathrm{cl}_M(S) \cap N$. $\diamond$

Beweis

(i) Ein Punkt x ist nach Definition einer r-Umgebung genau dann in $N_r p$, wenn x aus $M_r p$ und aus N ist.

(ii) Ein Punkt x ist nach Definition des Abschlusses (1.1) genau dann in $\mathrm{cl}_N(S)$, wenn x aus $\mathrm{cl}_M(S)$ und aus N ist. $\square$

(2.3) Satz (Vererbungsprinzip)
Sei $K \subset N \subset M$ und N ein metrischer Unterraum des metrischen Raumes M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist abgeschlossen in N.

(ii) Es existiert eine Teilmenge $L \subset M$, die abgeschlossen in M ist und $K = L \cap N$ erfüllt.

Man sagt auch N *erbt* seine abgeschlossenen Mengen von M. $\diamond$

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei K abgeschlossen in N und $L := \mathrm{cl}_M(K)$. Dann ist L per Definition abgeschlossen in M und $L \subset M$. Es gilt $L \cap N = \mathrm{cl}_N(K)$ nach Korollar (2.2)(ii) und $\mathrm{cl}_N(K) = K$, weil K abgeschlossen in N ist. Also folgt:

$$K = L \cap N.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sei $L \subset M$, L abgeschlossen in M und $K = L \cap N$. Dann enthält $L \cap N$ alle seine Berührpunkte in N, also ist K abgeschlossen in N. $\square$

(2.4) Korollar
Analog *erbt* ein Unterraum die offenen Mengen seines metrischen Oberraums.
Sei $K \subset N \subset M$ und N ein Unterraum des metrischen Raumes M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist offen in N.

(ii) Es existiert eine Teilmenge $L \subset M$, die offen in M ist und $K = L \cap N$ erfüllt. $\diamond$

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei K offen in N, dann ist K_N^c abgeschlossen in N nach Topologische Grundbegriffe I, Satz (1.5). Somit existiert nach dem Vererbungsprinzip, Satz (2.3), eine Teilmenge $U \subset M$, die abgeschlossen in M ist und es gilt: $K_N^c = U \cap N$.
Wir definieren $L = U_M^c$, dann ist L offen in M und es folgt:

$$\begin{aligned} K_N^c = U \cap N \Leftrightarrow K &= (U \cap N)_N^c \\ &= N \setminus (U \cap N) \\ &= U_N^c \\ &= U_N^c \cap N \\ &= U_N^c \cap N \cap M \\ &= U_M^c \cap N \\ &= L \cap N. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sei $L \subset M$, L offen in M, und $K = L \cap N$, so folgt:

$$\begin{aligned} K_M^c &= M \setminus (L \cap N) \\ \Longrightarrow K_M^c \cap N &= (M \setminus (L \cap N)) \cap N \\ \Longrightarrow K_N^c &= L_N^c \\ \Longrightarrow K_N^c &= L_M^c \cap N. \end{aligned}$$

Dann ist nach dem Vererbungsprinzip, Satz (2.3), K_N^c abgeschlossen in N. Nach Topologische Grundbegriffe I, Satz (1.5), ist K offen in N. □

(2.5) Korollar
Sei N ein metrischer Unterraum von M und sei N abgeschlossen in M.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $K \subset N$ ist abgeschlossen in N.

(ii) K ist abgeschlossen in M. ◇

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei K abgeschlossen in N und p ein Berührpunkt von K. Dann ist p auch Berührpunkt von N und liegt in N, weil N nach Voraussetzung abgeschlossen in M ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von K in N, liegt p auch in K, also ist K abgeschlossen in M.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sei $K \subset N$ abgeschlossen in M, $N \subset M$ und N abgeschlossen in M. Dann folgt:

$$K \text{ ist abgeschlossen in } N.$$ □

(2.6) Korollar
Sei N ein metrischer Unterraum des metrischen Raumes M und N offen in M. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Eine Menge $U \subset N$ ist offen in N.

(ii) U ist offen in M. ◇

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $U \subset N$ offen in N, dann existiert nach Korollar (2.4) eine Teilmenge $L \subset M$, sodass L offen in M ist und $L \cap N = U$ gilt. Weil nach Voraussetzung N offen in M ist, folgt aus dem Vortrag Topologische Grundbegriffe I, (1.8)(b), dass $L \cap N$ als endlicher Schnitt offener Mengen wieder offen in M ist. Also ist U offen in M.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sei $U \subset N$ offen in M. Dann existiert für alle p aus U ein $r > 0$, sodass für alle q aus M mit $d(p, q) < r$ folgt, dass q in U liegt. Weil N eine Teilmenge von M ist, ist U auch offen in N. $\square$

§ 3 Cluster- & Kondensierungspunkte

In dem Vortrag Topologische Grundbegriffe I haben wir bereits Berührpunkte einer Teilmenge S eines metrischen Raumes M kennengelernt. Dabei haben wir bereits den Unterschied zu dem uns bekannten Häufungspunkt festgestellt. Wir werden den Begriff der Berührpunkte jetzt noch weiter klassifizieren.

(3.1) Definition (Cluster)
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$.
Wir nennen $p \in M$ einen *Cluster* von S, wenn in jeder beliebigen Umgebung $U_r(p)$ unendlich viele Punkte von S enthalten sind. ◇

(3.2) Definition (Kondensierungspunkt)
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$.
Wir nennen $p \in M$ einen *Kondensierungspunkt* von S, wenn in jeder beliebigen Umgebung $U_r(p)$ überabzählbar viele Punkte von S enthalten sind. ◇

(3.3) Satz
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) p ist ein Cluster.

(ii) Es existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $S \setminus \{p\}$, sodass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert.

(iii) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existieren unendlich viele Punkte aus S.

(iv) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existieren mindestens zwei Punkte aus S.

(v) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existiert mindestens ein von p verschiedener Punkt aus S. ◇

Beweis
(i) ⇔ (iii) : Dies ist die Definition eines Clusters (3.1).

(ii) ⇒ (iii) : Angenommen die Wertemenge von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist endlich, dann existiert $m := \min\{p_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wir definieren $\varepsilon = d(p, m)$. Dann ist ε ungleich 0, weil $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $S \setminus \{p\}$ ist. Dann liegt in der ε-Umgebung von p kein Punkt von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das ist ein Widerspruch zur Konvergenz der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p. Also ist die Wertemenge von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich.
Nach der Definition der Konvergenz einer Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben zu beliebigem $r > 0$ alle bis auf höchstens endlich viele Punkte einen kleineren Abstand als r zu p. Also existieren in jeder Umgebung von p unendlich viele Punkte aus S.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Klar.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Da zwei verschiedene Punkte aus $U_r(p)$ existieren, existiert ein von p verschiedener Punkt.

(v) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $r > 0$ und $p_i \in S \setminus \{p\}$, mit $p_i \in U_r(p)$.
In $U_{r_1}(p)$ wähle $p_1 \in S \setminus \{p\}$. Setze $r_2 := \min\{\frac{1}{2}, d(p_1, p)\}$ für $r \in \mathbb{N}$ und in $U_{r_2}(p)$ wähle $p_2 \in S \setminus \{p\}$. Fahre induktiv fort, also setze $r_n = \min\{\frac{1}{n}, d(p_{n-1}, p)\}$ und in $U_{r_n}(p)$ wähle $p_{n+1} \in S \setminus \{p\}$.
Die Punkte p_n sind verschieden, da sie von p jeweils andere Abstände haben.
Es gilt:

$$d(p_1, p) \geq r_2 > d(p_2, p) \geq r_3 > d(p_3, p) \geq \dots .$$

Für ein $\varepsilon > 0$ sei $N_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, sodass für alle $n > N_0$ gilt:

$$d(p_n, p) < r_n \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} = \varepsilon.$$

Insgesamt folgt die Äquivalenz der Aussagen (i)-(v). □

(3.4) Satz
Bezeichne S' die Menge aller Cluster von S. Dann gilt:

$$S \cup S' = \bar{S}. \qquad \diamond$$

Beweis
„$\subseteq$" Sei p ein Cluster von S. Nach Satz (3.3)(ii) ist p dann auch ein Berührpunkt.
Also ist $S' \subseteq \lim S \overset{(1.5)}{=} \bar{S}$.
Weil S eine Teilmenge von $\bar{S}$ ist, folgt: $S \cup S' \subseteq \lim S$.

„$\supseteq$" Sei p ein Berührpunkt von S. Dann liegt p in S oder in jeder Umgebung von p existiert ein von p verschiedener Punkt aus S. Also liegt p in S oder in S'.

Insgesamt folgt: $S \cup S' = \lim S \overset{(1.5)}{=} \bar{S}$. □

(3.5) Korollar
S ist genau dann abgeschlossen, wenn $S' \subset S$. ◇

Beweis
S ist genau dann abgeschlossen, wenn S gleich der Menge seiner Berührpunkte ist und es gilt:

$$S = \lim S \overset{(1.5)}{=} \bar{S} \overset{(3.4)}{=} S \cup S' \Leftrightarrow S' \subset S. \qquad \square$$

(3.6) Korollar
Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\inf S \in \bar{S} \text{ und } \sup S \in \bar{S}.$$

Falls S abgeschlossen ist, gilt:

$$\inf S \in S \text{ und } \sup S \in S. \qquad \diamond$$

Beweis
Weil $\mathbb{R}$ vollständig und $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, existieren $a := \sup S$ und $b := \inf S$.

(i) Sei $r \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist in jedem Intervall $(a - r, a]$ ein Punkt aus S, da a die kleinste obere Schranke ist. Dann folgt:

$$a \in \lim S = \bar{S}.$$

Falls S abgeschlossen ist, gilt:

$$S = \bar{S} \Longrightarrow a \in S.$$

(ii) In jedem Intervall $[b, b + r)$ ist ein Punkt aus S, da b die größte untere Schranke ist. Dann folgt:

$$b \in \lim S = \bar{S}.$$

Falls S abgeschlossen ist, gilt:

$$S = \bar{S} \Longrightarrow b \in S. \qquad \square$$

§4 Produktmetrik

Wir definieren eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $M = M_1 \times M_2$ zweier metrischer Räume. Dabei verwenden wir drei intuitive Metriken auf M und zeigen, dass sie wohldefiniert sind.

(4.1) Lemma (Euklidische Metrik)
Seien $p, q \in M$ und d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Dann ist die Euklidische Metrik d_E gegeben durch:

$$d_E(p,q) := \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2}. \qquad \diamond$$

Wir zeigen, dass d_E eine wohldefinierte Metrik ist.

Beweis
Seien $p, q, z \in M$.

a) **Positive Definitheit:** Die Wurzel ist per Definition ≥ 0.

b) **Null-Abstand:** Wir zeigen, dass $d_E(p,q)$ genau dann gleich 0 ist, wenn p gleich q ist:

„$\Rightarrow$ “ Es gilt

$$\begin{aligned} d_E(p,p) &= \sqrt{d_1(p_1,p_1)^2 + d_2(p_2,p_2)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$ “ Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2} &\Longrightarrow 0 = d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2 \\ &\Longrightarrow d_1(p_1,q_1) = 0 \text{ und } d_2(p_2,q_2) = 0 \\ &\Longrightarrow p_1 = q_1 \text{ und } p_2 = q_2 \\ &\Longrightarrow p = q. \end{aligned}$$

Damit gilt die Äquivalenz.

c) **Symmetrie:** d_1 und d_2 sind symmetrisch.

d) **Dreiecksungleichung:** Es gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} d_E(p,z) + d_E(z,q) &= \sqrt{d_1(p_1,z_1)^2 + d_2(p_2,z_2)^2} + \sqrt{d_1(z_1,q_1)^2 + d_2(z_2,q_2)^2} \\ &\geq \sqrt{d_1(p_1,z_1)^2 + d_2(p_2,z_2)^2 + d_1(z_1,q_1)^2 + d_2(z_2,q_2)^2} \\ &\geq \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2}. \end{aligned}$$

□

(4.2) Lemma
Seien $p, q \in M$, d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Dann ist die maximale Metrik d_{max} auf $M_1 \times M_2$ definiert durch:

$$d_{max}(p,q) := \max\,\{d_1(p_1,q_1),\, d_2(p_2,q_2)\}$$

◇

Wir zeigen, dass d_{max} eine wohldefinierte Metrik ist.

Beweis
Seien $p, q, z \in M$.

a) **Positive Definitheit:** d_1 und d_2 sind wohldefinierte Metriken.

b) **Null-Abstand:** d_1 und d_2 sind wohldefinierte Metriken.

c) **Symmetrie:** d_1 und d_2 sind symmetrisch.

d) **Dreiecksungleichung:** Weil die Dreicksungleichung bereits für d_1 und d_2 gilt, folgt:

$$\begin{aligned} d_{max}(p,z) + d_{max}(z,q) &= \max\{d_1(p_1,z_1), d_2(p_2,z_2)\} + \max\{d_1(z_1,q_1), d_2(z_2,q_2)\} \\ &= \max\{d_1(p_1,z_1) + d_1(z_1,q_1), d_1(p_1,z_1) + d_2(z_2,q_2), \\ &\qquad d_2(p_2,z_2) + d_1(z_1,q_1), d_2(p_2,z_2) + d_2(z_2,q_2)\} \\ &\geq \max\{d_1(p_1,q_1), d_2(p_2,q_2)\} \\ &= d_{max}(p,q). \end{aligned}$$

□

(4.3) Lemma (Manhattan Metrik)
Seien $p, q \in M$ und d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Wir definieren d_{sum} als die Manhattan Metrik mit

$$d_{sum}(p,q) := d_1(p_1,q_1) + d_2(p_2,q_2).$$

◇

Wir zeigen, dass d_{sum} eine wohldefinierte Metrik ist.

Beweis
Seien $p, q, z \in M$.

a) **Positive Definitheit:** d_1 und d_2 sind ≥ 0 nach Voraussetzung.

b) **Null-Abstand:** d_1 und d_2 sind nach Voraussetzung wohldefinierte Metriken.

c) **Symmetrie:** Weil d_1 und d_2 nach Voraussetzung symmetrisch sind, folgt:

$$\begin{aligned} d_{sum}(p,q) &= d_1(p_1,q_1) + d_2(p_2,q_2) \\ &= d_1(q_1,p_1) + d_2(q_2,p_2) \\ &= d_{sum}(q,p). \end{aligned}$$

d) **Dreiecksungleichung:** Die Dreicksungleichung gilt nach Voraussetzung für d_1 und d_2, also folgt:

$$\begin{aligned} d_{sum}(p,z) + d_{sum}(z,q) &= d_1(p_1,z_1) + d_2(p_2,z_2) + d_1(z_1,q_1) + d_2(z_2,q_2) \\ &\geq d_1(p_1,q_1) + d_2(p_2,q_2) \\ &= d_{Sum}(p,q). \end{aligned}$$ □

(4.4) Hilfssatz
Seien d_{max}, d_E und d_{sum} Metriken auf $M_1 \times M_2$ wie in Lemma (4.1), (4.2) und (4.3) definiert, dann gilt:

$$d_{max} \leq d_E \leq d_{sum} \leq 2 \cdot d_{max}.$$ ◇

Beweis
Sei im Folgenden ohne Einschränkung $d_1(p_1,q_1) \geq d_2(p_2,q_2)$.
Wir zeigen zunächst $d_E \geq d_{max}$:

$$\begin{aligned} d_E(p,q) &= \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2} \\ &\geq \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2} \\ &= d_1(p_1,q_1) \\ &= \max\{d_1(p_1,q_1), d_2(p_2,q_2)\} \\ &= d_{max}(p,q). \end{aligned}$$

Wir zeigen $d_E \leq d_{sum}$. Dabei verwenden wir, dass d_E und $d_{sum} \geq 0$ sind:

$$\begin{aligned} d_E(p,q)^2 &= d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2 \\ &\leq d_1(p_1,q_1)^2 + 2 \cdot d_1(p_1,q_1) \cdot d_2(p_2,q_2) + d_2(p_2,q_2)^2 \\ &= d_{sum}(p,q)^2 \end{aligned}$$

Somit folgt, dass $d_E \leq d_{sum}$ ist.

Zuletzt zeigen wir noch, dass $d_{sum} \leq 2 \cdot d_{max}$ ist:

$$\begin{aligned} d_{sum}(p,q) &= d_1(p_1,q_1) + d_2(p_2,q_2) \\ &\leq 2 \cdot d_1(p_1,q_1) \\ &= 2 \cdot \max\{d_1(p_1,q_1), d_2(p_2,q_2)\} \end{aligned}$$

□

(4.5) Satz
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n = (p_{1n}, p_{2n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge in $M = M_1 \times M_2$. So sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_{max}.

(b) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_E.

(c) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_{sum}.

(d) $(p_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in M_1 bzw. M_2. ◇

Beweis
(a) ⇒ (b) ⇒ (c) : Sei $\varepsilon > 0$ und existiere ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$d_{max}(p_n, p) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt aus Satz (4.4):

$$\begin{aligned} d_{max}(p_n, p) &\leq d_E(p_n, p) \\ &\leq d_{sum}(p_n, p) \\ &\leq 2 \cdot d_{max}(p_n, p) \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit konvergiert $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich d_E und d_{sum}.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Sei $\varepsilon > 0$ und existiere ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$d_{sum}(p_n, p) = d_1(p_{1n}, p_1) + d_2(p_{2n}, p_2) < \varepsilon.$$

Weil d_1 und $d_2 \geq 0$ sind, gilt dann für alle $n \geq N_0$:

$$d_1(p_{1n}, p_1) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d_2(p_{2n}, p_2) < \varepsilon.$$

Das heißt, $(p_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich d_1 und $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich d_2.

(d) $\Rightarrow$ (a) :

Seien N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ so, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$d_1(p_{1n}, p_1) < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad d_2(p_{2n}, p_2) < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2$$

Dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$, $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ und für alle $n \geq N_0$:

$$d_{max}(p_n, p) = \max\{d_1(p_{1n}, p_1), d_2(p_{2n}, p_2)\} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich d_{max}. $\square$

(4.6) Hilfssatz
Sei $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m$ ein metrischer Produktraum und $d_1, \ldots, d_m$ die entsprechende Metrik. Weiterhin seien folgende Metriken definiert:

$$\begin{aligned} d_{sum}(p,q) &:= \sum_{i=1}^{m} d_i(p_i, q_i), \\ d_{max}(p,q) &:= \max\{d_i(p_i,q_i) \mid i \in \{1,\ldots,m\}\}, \\ d_E(p,q) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i)^2}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$d_{max} \leq d_E \leq d_{sum} \leq m \cdot d_{max}.$$ $\diamond$

Beweis
Sei ohne Einschränkung $d_1(p_1, q_1) = \max\{d_i(p_i, q_i) | i \in \{1, \ldots, m\}\}$.
Dann gelten mit $d_i(p_i, q_i) \geq 0$ die folgenden Ungleichungen:

Wir zeigen zunächst $d_{max} \leq d_E$:

$$\begin{aligned} d_E(p,q) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i)^2} \\ &= \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + \sum_{i=2}^{m} d_i(p_i,q_i)^2} \\ &\geq \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2} \overset{d_1 \geq 0}{=} d_1(p_1,q_1) \\ &= d_{max}(p,q). \end{aligned}$$

Wir zeigen $d_E \leq d_{sum}$. Dabei verwenden wir, dass d_E und $d_{sum} \geq 0$ sind:

$$\begin{aligned} d_{sum}(p,q)^2 &= (\sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} d_j(p_j,q_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d_i(p_i,q_i) \cdot d_j(p_j,q_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (d_i(p_i,q_i)^2 + \sum_{j \neq i} d_i(p_i,q_i) \cdot d_j(p_j,q_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j \neq i} d_i(p_i,q_i) \cdot d_j(p_j,q_j) + \sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i)^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} d_i(p_i,q_i)^2 \\ &= d_E(p,q)^2. \end{aligned}$$

Somit folgt, dass $d_E \leq d_{sum}$ ist.

Zuletzt zeigen wir noch, dass $d_{sum} \leq m \cdot d_{max}$ ist:

$$d_{sum} = \sum_{i=1}^{m} d_i \leq \sum_{i=1}^{m} d_1 = m \cdot d_{max}. \qquad \square$$

(4.7) Korollar
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{mn})$ für $n \in \mathbb{N}$, eine Folge aus dem kartesischen Produkt von m metrischen Räumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_{max}.

(b) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_E.

(c) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Metrik d_{sum}.

(d) $(p_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert jeweils in M_i für alle $i \in \{1 \ldots m\}$. $\diamond$

Beweis
(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) : Sei $\varepsilon > 0$ und existiere ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$d_{max}(p_n, p) < \tfrac{\varepsilon}{m}.$$

Dann gilt mit Satz (4.6):

$$\begin{aligned} d_{max}(p_n, p) &\leq d_E(p_n, p) \\ &\leq d_{sum}(p_n, p) \\ &\leq m \cdot d_{max}(p_n, p) \\ &< m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich d_E und d_{sum} im Produktraum.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Sei $\varepsilon > 0$ und existiere ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$d_{sum}(p_n, p) = \sum_{i=1}^{m} d_i(p_{in}, p_i) < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq N_0$ und $i \in \{1 \ldots m\}$:

$$d_i(p_{in}, p_i) < \varepsilon.$$

Somit konvergiert jede Folge $(p_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d_i in M_i.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Seien $N_1, N_2, \ldots, N_m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $n \geq N_i$ gilt:

$$d_i(p_{in}, p_i) < \varepsilon.$$

Dann gilt für $\varepsilon > 0$, $N_0 := \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{N_i\}$ und für alle $n \geq N_0$:

$$d_{max}(p_n, p) = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{d_i(p_{in}, p_i)\} < \varepsilon. \qquad \square$$

Somit konvergiert auch die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich d_{max} im Produktraum.

(4.8) Korollar (Konvergenz im $\mathbb{R}^m$)
Eine Folge von Vektoren $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^m$ konvergiert in $\mathbb{R}^m$ genau dann, wenn jede seiner Komponentenfolgen $(v_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert für $1 \leq i \leq m$. Der Grenzwert dieser Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist der Vektor

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n = (\lim_{n \to \infty} v_{1n}, \lim_{n \to \infty} v_{2n}, \ldots, \lim_{n \to \infty} v_{mn}). \qquad \diamond$$

Beweis
$\mathbb{R}^m$ ist ein metrischer Produktraum. Wir setzen d_{sum} als Metrik von $\mathbb{R}^m$, dann folgt die Aussage aus Korollar (4.7). $\square$

§5 Stetigkeit der arithmetischen Funktionen auf $\mathbb{R}$

Wir schreiben im Folgenden die arithmetischen Operationen auf $\mathbb{R}$ als Abbildungen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und untersuchen sie auf Stetigkeit.

(5.1) Definition (Die arithmetischen Funktionen)
Wir definieren die arithmetischen Funktionen

$$\begin{aligned} &f_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y, \\ &f_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x-y, \\ &f_\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y, \\ &f_\div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x}{y}. \end{aligned}$$ ◇

(5.2) Satz
Die arithmetischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind stetig. ◇

Beweis
Seien $(x_0, y_0), (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Sei $s_0 := |x_0| + |y_0|$.

„ $+$ “ : Wähle $\delta = \varepsilon$. Sei $d_{sum}((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0| + |y-y_0| < \delta$, dann ist:

$$\begin{aligned} |f_+((x,y)) - f_+((x_0,y_0))| &= |(x+y) - (x_0+y_0)| \\ &= |(x-x_0) + (y-y_0)| \\ &\leq |x-x_0| + |y-y_0| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f_+ nach dem Epsilon-Delta-Kriterium stetig.

„ $-$ “ : Wähle $\delta = \varepsilon$. Sei $d_{sum}((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0| + |y-y_0| < \delta$, dann ist:

$$\begin{aligned} |f_-((x,y)) - f_-((x_0,y_0))| &= |(x-y) - (x_0-y_0)| \\ &= |(x-x_0) + (y_0-y)| \\ &\leq |x-x_0| + |y-y_0| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f_- nach dem Epsilon-Delta-Kriterium stetig.

„ $\cdot$ “ : Wähle $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+s_0}\}$.
Sei $d_{sum}((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0| + |y-y_0| < \delta$, dann ist $|x-x_0| < 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
|f_\cdot((x,y)) - f_\cdot((x_0,y_0))| &= |(x\cdot y) - (x_0\cdot y_0)| \\
&= |x\cdot y - x\cdot y_0 + x\cdot y_0 - x_0\cdot y_0| \\
&\leq |x\cdot y - x\cdot y_0| + |x\cdot y_0 - x_0\cdot y_0| \\
&= |x|\cdot|y-y_0| + |x-x_0|\cdot|y_0| \\
&< |y-y_0|\cdot(1+x_0) + |y_0|\cdot|x-x_0| \\
&< |y-y_0|\cdot(1+s_0) + (1+|x_0|+|y_0|)\cdot|x-x_0| \\
&= (1+s_0)\cdot(|y-y_0|+|x-x_0|) < \delta\cdot(1+s_0) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $f_\cdot$ nach dem Epsilon-Delta-Kriterium stetig.

„ $\div$ “ : Wähle $\delta = \min\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{y_0^2}{2\cdot s_0+2}\cdot\varepsilon, 1\}$.
Sei $d_{sum}((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0| + |y-y_0| < \delta$.
Dann ist $|x-x_0| < 1$, $|y-y_0| < 1$ und $\frac{|y_0|}{2} < |y|$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
|f_\div((x,y)) - f_\div((x_0,y_0))| &= |\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}| \\
&= \frac{|x\cdot y_0 - x_0\cdot y|}{|y\cdot y_0|} \\
&= \frac{|x\cdot y_0 - x\cdot y + x\cdot y - x_0\cdot y|}{|y\cdot y_0|} \\
&\leq \frac{|x\cdot y_0 - x\cdot y| + |x\cdot y - x_0\cdot y|}{|y\cdot y_0|} \\
&= \frac{|x||y-y_0| + |x-x_0||y|}{|y\cdot y_0|} \\
&< \frac{(1+s_0)\cdot|y-y_0| + |x-x_0|\cdot(1+s_0)}{|y\cdot y_0|} \\
&< \delta\cdot 2\cdot\frac{1+s_0}{2\cdot|y\cdot y_0|} < 2\cdot\delta\cdot\frac{1+s_0}{y_0^2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $f_\div$ nach dem Epsilon-Delta-Kriterium stetig. □

(5.3) Korollar
Die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten reeller, stetiger Funktionen sind wieder stetig. ◇

Beweis

„+ " : Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig.
Definiere die Abbildung: $h : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (f(x), g(x))$, dann ist h auf M stetig nach Korollar (4.8).
$f + g = f_+ \circ h : M \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$,
Also ist $f + g$ als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig.

„− " : Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig.
Definiere die Abbildung: $h : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (f(x), g(x))$, dann ist h auf M stetig nach Korollar (4.8).
$f - g = f_- \circ h : M \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - g(x)$
Also ist $f - g$ als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig.

„· " : Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig.
Definiere die Abbildung: $h : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (f(x), g(x))$, dann ist h auf M stetig nach Korollar (4.8).
$f \cdot g = f_\cdot \circ h : M \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
Also ist $f \cdot g$ als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig.

„÷ " : Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \neq 0 \; \forall x \in M$.
Definiere die Abbildung: $h : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (f(x), g(x))$, dann ist h auf M stetig nach Korollar (4.8).
$\frac{f}{g} = f_\div \circ h : M \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$
Also ist $\frac{f}{g}$ als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig. $\square$