Cauchy-Folgen und Kompaktheit

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 10.05.2010

Michael Engeländer, Jonathan Fell

Dieser Vortrag stellt als erstes einige Sätze zu Cauchy-Folgen auf allgemeinen metrischen Räumen vor. Speziell wird auch das Konzept der Vollständigkeit eines metrischen Raums betrachtet. Anschließend sollen eine Möglichkeit Kompaktheit auf Metrischen Räumen allgemein zu definieren, sowie einige Sätze, die zur Untersuchung kompakter Mengen dienen, eingeführt werden.

§1 Cauchy-Folgen und Beschränktheit

In diesem Abschnitt werden Cauchy-Folgen auf metrischen Räumen eingeführt, sowie das Konzept der Vollständigkeit mit ihnen erläutert.

— *Cauchy Folgen und Vollständigkeit* —

(1.1) Definition (Cauchy-Folgen auf metrischen Räumen)
Eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum M mit Metrik d heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n > N$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $d(p_m, p_n) < \varepsilon$ ist.
Also wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so dass: } \forall m, n > N \text{ mit } m, n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } d(p_m, p_n) < \varepsilon \qquad \diamond$$

Aus (1.1) folgern wir das folgende Lemma:

(1.2) Lemma
Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. $\diamond$

Beweis
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ konvergent und M ein metrischer Raum. Somit existiert ein eindeutiger Grenzwert p (vgl. Vortrag 1 Satz (1.7)). Nun betrachen wir $d(p_n, p)$, wobei d die Metrik des entsprechenden metrischen Raumes M ist. Aus der Konvergenz der Folge folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n, k > N$. Nach Dreiecksungleichung gilt:

$$d(p_n, p_k) \leq d(p_n, p) + d(p_k, p) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Die folgende Definition der Vollständigkeit ist der aus der Analysis I bekannten ähnlich:

(1.3) Definition (Vollständigkeit von metrischen Räumen)
Ein Metrischer Raum M ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in M einen Grenzwert in M besitzt. ◇

(1.4) Satz
Bezüglich der Metrik $d(x, y) := |x - y|$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ ein vollständiger metrischer Raum. ◇

Beweis
Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Setze

$$A = \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{N} : a_n = x\}$$

Wähle $\varepsilon = 1$, so existiert nach dem Cauchy-Krierium ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \; \forall m, n \geq N_1$$

Also gilt:

$$|a_n - a_{N_1}| < 1 \; \forall n \geq N_1$$

Die Menge $B := \left\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{N_1}, a_{N_1} + 1, a_{N_1} - 1, \right\}$ ist, da endlich, beschränkt. Nun wähle man ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $B \subset [-M, M]$. Es folgt, $A \subset [-M, M]$. Wähle nun

$$S = \{s \in [-M, M] | \exists \text{ unendlich viele } n \in \mathbb{N} : a_n \geq s\}$$

Es gilt $S \neq \emptyset$, da $-M \in S$ und M ist eine obere Schranke von S. Da $S \subset \mathbb{R}$ folgt:

$$\exists b \in \mathbb{R} : b = \sup(S).$$

Nun zeigt man, dass a_n gegen b konvergiert.
Dazu ist zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - b| < \varepsilon \; \forall n \geq N.$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, folgt:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{2} \; \forall n, m \geq N_2$$

Da $b = sup(S)$ gilt: $b + \frac{\varepsilon}{2} \notin S$. Da a_n nur endlich oft größer als $b + \frac{\varepsilon}{2}$ ist, existiert ein $N_3 \in \mathbb{N}$, $N_3 \geq N_2$ so dass

$$a_n \leq b + \tfrac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq N_3$$

Da $b = sup(S)$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass ein $s \in S$ existiert, womit

$$a_n \geq s > b - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Also gibt es ein $N > N_3$ so dass $a_N \geq s > b - \frac{\varepsilon}{2}$. Da $N > N_3$ ist $a_N < b + \frac{\varepsilon}{2}$, also insgesamt

$$a_N \in (b - \tfrac{\varepsilon}{2}, b + \tfrac{\varepsilon}{2})$$

Da $N \geq N_2$ folgt

$$|a_n - b| \leq |a_n - a_N| + |a_N - b| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

was die Konvergenz zeigt. □

Somit erfüllt $\mathbb{R}$ die Umkehrung von Lemma (1.2).
Jedoch gilt diese Folgerung, dass Cauchy-Folgen konvergieren nicht immer, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich, und später nochmals als Satz formuliert wird.

(1.5) Beispiel
Mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ bildet $\mathbb{Q}$ einen metrischen Raum. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in diesem metrischen Raum. Wir konstruieren sie rekursiv, indem wir an der ersten Stelle mit 1 beginnen und danach jeweils an der n-ten Stelle der Folge die $(n-1)$-te Nachkommastelle von $\sqrt{2}$ dazu addieren.
Folglich sei

$$r_1 = 1, r_2 = 1.4, r_3 = 1.41, r_4 = 1.414, r_5 = 1.4142, r_6 = 1.41421, \cdots$$

Nun wähle man zu einem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > -\log_{10} \varepsilon$. Dann gilt aufgrund der Konstruktion der Folge für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k, n > N$, dass $|r_k - r_n| \leq 10^{-N} < \varepsilon$. Somit ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, da diese Folge in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, und Grenzwerte eindeutig sind, jedoch $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ nicht existiert konvergiert die Folge nicht in $\mathbb{Q}$. $\diamond$

Folgt direkt aus (1.2) und (1.5).

(1.6) Korollar
$(\mathbb{R}^m, ||*||_p)$ ist ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der p-Norm $(||*||_p)$.$\diamond$

Beweis
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^m$.
Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass:

$$||p_n - p_k||_p < \varepsilon \text{ für alle } n, k > N.$$

Also gilt:

$$(\sum_{i=1}^{m} |p_{ni} - p_{ki}|^p)^{1/p} < \varepsilon \text{ für alle } n, k \geq N.$$

Nun seien $(p_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $1 \leq i \leq m$ Komponentenfolgen von (p_n) und (p_k). Somit sind $p_{ni}, p_{ki} \in \mathbb{R}\ \forall n, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m$. Aus

$$\sum_{i=1}^{m} |p_{ni} - p_{ki}|^p < \varepsilon^p$$

folgt:

$$|p_{ni} - p_{ki}|^p < \varepsilon^p.$$

Also sind die Komponentenfolgen Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Somit konvergieren sie mit Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Da also alle Komponentenfolgen einer Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^m$ konvergieren folgt, dass auch alle Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^m$ konvergieren. □

(1.7) Satz
Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist ein vollständiger metrischer Raum. ◇

Beweis
Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes M. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ und sei p_n Cauchy-Folge in A.
Daraus folgt, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, liegt der Grenzwert p von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M. Da A abgeschlossen ist liegt der Grenzwert wiederum auch in A. Somit ist A vollständig. □

(1.8) Korollar
Jede abgeschlossene Teilmenge des euklidischen Raumes ist ein vollständiger metrischer Raum ◇

Beweis
Da der Euklidischer Raum ein vollständiger metrischer Raum ist, folgt diese Aussage als Spezialfall von (1.7). □

— *Beschränktheit* —

(1.9) Definition (Beschränktheit auf metrischen Räumen)
Eine Teilmenge S eines metrischen Raumes M ist genau dann beschränkt, wenn ein $p \in M$ und ein $r > 0$ existieren, so dass

$$S \subset U_r(p) \subset M$$

ist. ◇

(1.10) Beispiel
Der Inhalt der Ellypse $x^2 + 4 \cdot y^2 = 4$ stellt eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ dar.

(1.11) Satz
Jede Cauchy-Folge bildet eine beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes. ◇

Beweis
Man wähle $\varepsilon = 1$. Nun existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt:

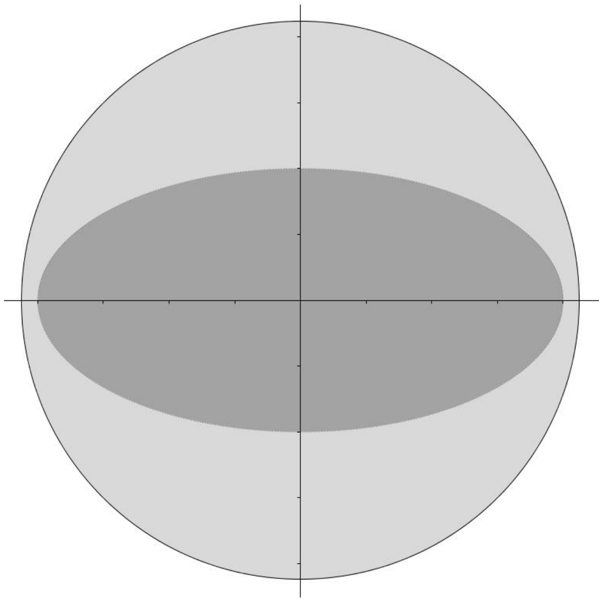

Abbildung 1: Beispiel 1.10

$$d(p_n, p_m) < 1 \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}$$

In Symbolen:

$$\exists \;\; N \in \mathbb{N} \;\; \forall \;\; m, n \geq N : \;\; d(p_n, p_m) < 1 \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}$$

Nun wählt man

$$r > 1 + \max(d(p_1, p_2), \cdots, d(p_1, p_N))$$

Nach der Dreiecksungleichung liegt also p_n ganz in einer Umgebung $U_r(p_1)$. Denn alle Punkte haben einen Abstand kleiner als r von p_1 . Somit ist die von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gebildete Teilmenge nach Definition beschränkt. □

(1.12) Lemma
Sei M ein vollständiger metrischer Raum. Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M ist eine beschränkte Teilmenge von M. ⋄

Beweis
Folgt als Spezialfall aus (1.11) und (1.2), da konvergente Folgen Cauchy-Folgen sind. □

(1.13) Lemma
Beschränktheit ist keine topologische Eigenschaft. ⋄

Beweis
Wäre Beschränktheit eine topologische Eigenschaft, so müssten Homöomorphismen sie erhalten. Da aber $(-1,1)$ beschränkt ist und $p : (-1,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\frac{\pi x}{2})$ bijektiv und stetig ist, und eine stetige, bijektive Umkehrabbildung existiert, jedoch $(-1,1)$ beschränkt, aber $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist, handelt es sich bei der Beschränktheit nicht um eine topologische Eigenschaft. $\square$

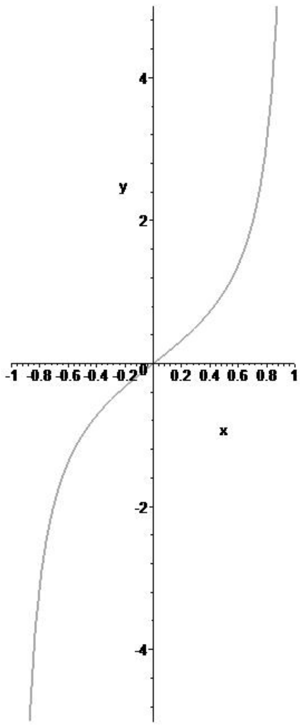

Abbildung 2: Lemma 1.13

(1.14) Definition (Beschränktheit einer Funktion)
Eine Funktion $f : M \to N$, mit M, N metrische Räume heißt genau dann beschränkt, wenn ihre Bildmenge eine beschränkte Teilmenge ihrer Zielmenge ist. $\diamond$

(1.15) Beispiel
Die Funktion $x \mapsto \sin(x)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, obwohl ihr Graph

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\right\}$$

nicht beschränkt ist. $\diamond$

§2 Kompaktheit

— *Kompaktheit* —

(2.1) Definition (Kompaktheit)
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M nennt man *(folgen)kompakt* falls zu jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen ein $a \in A$ konvergiert. ◇

Da jede Folge in einer endlichen Menge diese Bedingung erfüllt sind alle endlichen Mengen (speziell die leere Menge) kompakt.

(2.2) Satz
Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt. ◇

Beweis
Alle endlichen Mengen, auch $\emptyset$ sind natürlicherweise beschränkt.
Abgeschlossen sind sie, weil jede Folge in einer dieser Mengen wenigstens einen Wert unendlich oft treffen muss. Unendlich viele verschiedene Werte können nicht getroffen werden, weil die Menge endlich ist. Der Wert beziehunhsweise die unendlich oft getroffenen Werte sind somit Grenzwert bzw. Häufungspunkte dieser Folge und liegen in der Menge. Betrachten wir im Folgenden unendliche Mengen.

a) A ist abgeschlossen:
Angenommen, A ist eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M und sei weiterhin p ein Häufungspunkt von A. Es existiert also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$. Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $q \in A$ konvergiert. Da alle Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren, folgt $p = q$. Also ist A abgeschlossen.

b) A ist beschränkt.
Angenommen A sei unbeschränkt.
Wähle man $p \in A$ fest und $a_n \in A$ derart, dass $d(p, a_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Da A kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Folge ist also beschränkt nach Lemma (1.11), was ein Widerspruch zu $\lim\limits_{k\to\infty} d(p, a_{n_k}) = \infty$ ist. Also ist A beschränkt. □

Die Umkehrung des Satzes (2.2), eine abgeschlossene und beschränkte Menge sei kompakt, gilt nur in bestimmten Ausnahmefällen.

(2.3) Satz
Das abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ ist kompakt. $\diamond$

Beweis

1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ eine Folge in $[a, b]$, die ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ konstant ist. Diese besitzt natürlicherweise einen Grenzwert in $[a, b]$ gegen den auch jede ihrer Teilfolgen konvergiert. Betrachten wir also ab jetzt Folgen, die nicht konstant werden.

2) Wähle $C = \{x \in [a, b] \,|x_n$ ist endlich oft kleiner gleich $x\}$. Es gilt $a \in C$, also ist C nach unten beschränkt. Außerdem ist b eine obere Schranke von C. Da $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ein vollständiger angeordneter Körper ist, existiert ein $c \in [a, b] \subset R$, wobei $c = \sup(C)$ ist.

3) Nun zeigt man, das eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen c konvergiert.
Angenommen, diese gibt es nicht. Also liegen nur endlich viele Folgeglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Intervall $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Das würde jedoch bedeuten, dass $c + \varepsilon \in C$. Dann wäre $c \neq \sup(C)$, und das ist ein Widerspruch zu 2).
Also existiert eine Teilfolge, die gegen c konvergiert und somit ist $[a, b]$ kompakt.

Die Verallgemeinerung auf mehrere metrische Räume erhalten wir im folgenden Satz:

(2.4) Satz
Das kartesische Produkt von m kompakten Mengen, $m \in \mathbb{N}$, ist kompakt. $\diamond$

Beweis
Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion nach m.
Seien im folgenden alle $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kompakte Teilmengen eines beliebigen metrischen Raumes. Die A_k müssen nicht Teilmengen desselben metrischen Raumes sein.

(IA) Sei n=1 Trivial
Sei $n = 2$
Wähle die Folge $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset A_1 \times A_2$. Da A_1 kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $p \in A_1$ konvergiert. In A_2 existiert eine Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $q \in A_2$ konvergiert.
Da alle Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren, gilt $\lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_{k_l}}) = p \in A_1$. Also konvergiert $((a_{n_{k_l}}, b_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $(p, q) \in A_1 \times A_2$. Als entsprechende Metrik könnte man $d_K((a_{n_{k_l}}, b_{n_{k_l}}), (p, q)) = d_{A_1}(a_{n_{k_l}}, p) + d_{A_2}(b_{n_{k_l}}, q)$ wählen. (vgl. auch Vortrag 3 Lemma (4.3))

(IV) Das kartesische Produkt m kompakter Mengen ist kompakt.

(IS) Es gilt nun

$$\prod_{n=1}^{m+1} A_n = \prod_{n=1}^{m} A_n \times A_{m+1}$$

Dabei ist $\prod\limits_{n=1}^{m} A_n$ nach Induktionsvorrausetzung, A_{m+1} nach Vorrausetzung kompakt. Aus dem Induktionsanfang für $m = 2$ ist bekannt, dass das kartesische Produkt zweier kompakter Mengen ebenfalls kompakt ist. Somit folgt die Behauptung. □

Aus dem bewiesenen Satz folgt sofort das

(2.5) Korollar
Der Quader $\prod\limits_{n=1}^{m} [a_n, b_n]$ ist kompakt. ◇

Beweis
Die Behauptung folgt sofort aus den Sätzen (2.3) und (2.4). □

(2.6) Satz (Satz von Bolzano-Weierstrass)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^m$ besitzt eine konvergente Teilfolge. ◇

Beweis
Eine beschränkte Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ befindet sich in einem Quader. Somit gilt $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \prod\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k] =: B$. Dieser Quader ist nach Korollar (2.5) kompakt. Nach der Definition von Kompaktheit existiert also eine konvergente Teilfoge von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die innerhalb von B konvergiert. □

Um herauszufinden, ob eine Menge kompakt ist, hilft der folgende Satz.

(2.7) Satz
Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt. ◇

Beweis
Sei A eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge C und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Folglich liegt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in C. Da C kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $q \in C$ konvergiert. Da (a_{n_k}) (wie auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) in A liegt und A abgeschlossen ist, folgt, dass q in A liegt. Also ist A kompakt. □

Ein Spezialfall, in dem die Umkerung von Satz (2.2) gilt, wird beschrieben im folgenden Satz.

(2.8) Satz (Satz von Heine-Borel)
Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist kompakt. ◇

Beweis
Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt. Es folgt, dass Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, so dass $A \subset \prod_{n=1}^{m} [a_n, b_n] =: B$ ist. Nach Korollar (2.5) gilt, dass B kompakt ist. Somit folgt mit der Vorrausseztung, dass A abgeschlosen ist und Satz (2.7), dass A ebenfalls kompakt ist. □

Zu beachten ist aber, dass abgeschlossene und beschränkte Mengen nicht in jedem metrischen Raum kompakt sind. Eine Menge, die nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist, muss bezüglich $\mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt sein.

(2.9) Beispiel
Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist beschränkt. Abgeschlossen ist sie als Teilmenge von $\mathbb{Q}$, weil ihr Komplement bezüglich $\mathbb{Q}$ offen ist.
Die Folge der Zahlen $r_1 = 0.7$, $r_2 = 0.78$, $r_3 = 0.785$, $r_4 = 0.7853\cdots$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{4}$, wobei $\frac{\pi}{4}$ in $[0, 1]$ ist, aber $\frac{\pi}{4} \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist. Da alle Teilfolgen konvergenter Folgen gegen denselben Wert konvergieren, ist $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ nicht kompakt. ◇

— Folgen geschachtelter kompakter Mengen —

(2.10) Definition (Folgen geschachtelter Mengen)
Eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt geschachtelt, genau dann, wenn gilt:
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \cdots$. Ihr Schnitt ist gegeben durch
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{p | \forall n \in \mathbb{N} : p \in A_n\}$. ◇

(2.11) Beispiel
Sei $A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{n}\right\}$. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geschachtelte Folge, die man sich als Kreise in der Ebene vorstellen kann. Es ist hierbei $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(0, 0)\}$. ◇

(2.12) Beispiel
Sei $A_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 + \frac{1}{n}\right\}$. Hierbei ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. ◇

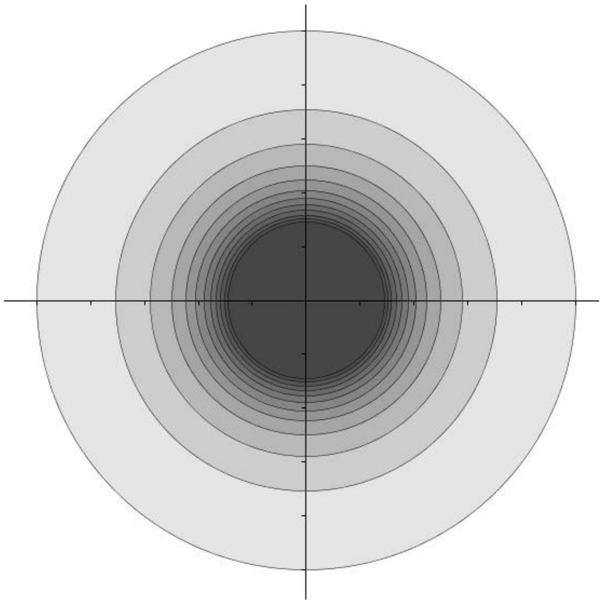

Abbildung 3: Beispiel 2.11

Geschachtelte Folgen sind besonders wichtig im Bereich der Intervallschachtelungen. Diese können ein nützliches Hilfsmittel sein, um die reelen Zahlen einzuführen.

(2.13) Satz

Der Schnitt einer geschachtelten Folge nicht leerer, kompakter Mengen ist nicht leer und kompakt. ◇

Beweis

a) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geschachtelte Folge nicht leerer, kompakter Mengen. Da alle A_n kompakt sind, sind sie auch alle nach Satz (2.2) abgeschlossen. Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, dass heißt, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =: A$ ist abgeschlossen. Da sämtliche A_n und speziell A Teilmengen von A_1 sind, sind sie nach Satz (2.7) kompakt.

b) Um zu zeigen, dass A nicht leer ist, wählen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass a_n in A_n liegt.
Diese Folge liegt komplett in A_1, und da A_1 kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $p \in A_1$ konvergiert. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}/\{1\}}$ liegt nach Definition der geschachtelten Folge komplett in A_2, und da A_2 kompakt ist, existiert wieder dieselbe Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $n_k \neq 1$ gelten muss, die gegen p konvergiert. Induktiv folgt, dass p in allen A_n liegen muss, also gilt $p \in A$. Damit ist der Schnitt nicht leer. □

Ein weiteres Charakteristikum von Mengen ist ihr Durchmesser.

(2.14) Definition (Durchmesser einer Menge)
Sei $S \subset M$, wobei M ein metrischer Raum und $d(x,y)$ die zu M gehörende Metrik ist. Der Durchmesser einer nicht-leeren Menge S ist das Supremum der Abstände der Elemente von S:

$$diam(S) = sup\,\{d(x,y)|x,y \in S\}$$

Mit dem Durchmesser erhält man eine Möglichkeit, Intervallschachtelungen zu definieren.

(2.15) Satz
Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge geschachtelter, nicht-leerer, kompakter Mengen mit einen Durchmesser, der gegen 0 konvergiert, dann ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ein einzelner Punkt. ◇

Beweis
Sei $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass A Teilmenge von A_n ist, folgt $diam(A)(A_n)$ für alle $n \in N$, insgesamt also $diam(A) = 0$.
Weil unterschiedliche Punkte in einem metrischen Raum immer einen Abstand echt größer 0 haben, folgt, dass A höchstens einen einzelnen Punkt beinhalten kann.
Nach Satz (2.13) muss A mindestens einen Punkt enthalten. Daraus folgt die Behauptung. □

Dabei ist die Beschränkung dieser Aussagen auf *kompakte* Mengen zu beachten.

(2.16) Beispiel
Sei A_n die Menge der Punkte eines offenen Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$ und Radius $\frac{1}{n}$. Die Folge dieser Mengen ist geschachtelt und nicht leer. Ihr Schnitt jedoch ist leer, da der Grenzwert der Punkt $(0,0)$ ist, der in keiner der Mengen enthalten ist. ◇

— *Stetigkeit und Kompaktheit* —

Nun untersuchen wir wie sich kompakte Mengen unter stetigen Funktionen verhalten.

(2.17) Satz
Ist $f : M \to N$, wobei M, N metrische Räume sind, eine stetige Funktion und ist A eine kompakte Teilmenge von M, dann ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von N. Somit sind Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen kompakt. ◇

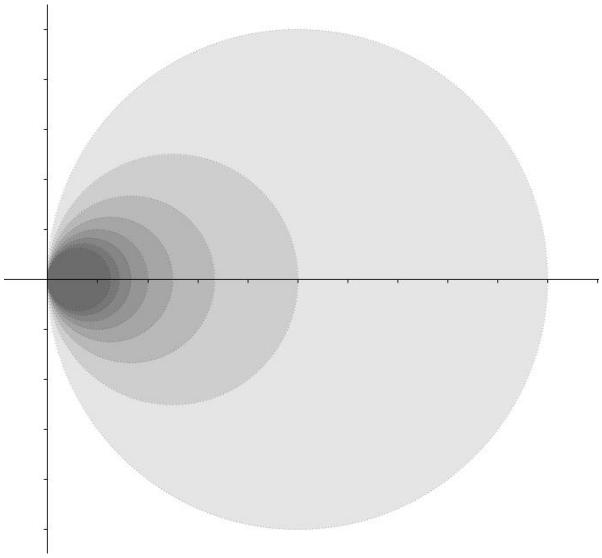

Abbildung 4: Beispiel 2.16

Beweis
Sei A eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M.
Zu einer Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ wähle $a_n \in A$ derart, dass $f(a_n) = b_n$.
Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $q \in A$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt aus dem ersten Vortrag:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(q) \in f(A)$$

.

Folglich hat eine Folge in $f(A)$ eine Teilfolge, die gegen einen Wert in $f(A)$ konvergiert und somit ist $f(A)$ kompakt. □

Ein besonders wichtiger Satz für viele weitere Beweise ist der Folgende.

(2.18) Satz (Satz von Minimum und Maximum)
Eine reelwertige Funktion über einer kompakten Menge ist beschränkt. Sie nimmt Minimum und Maximum an. ◇

Beweis
Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und A eine kompakte Teilmenge von M.
Nach Satz (2.17) ist $f(A)$ ebenfalls kompakt und somit nach Satz (2.2) abgeschlossen und beschränkt. Also existieren $o, u \in \mathbb{R}$ so dass gilt:

$$o = max(f(A)) \text{ und } u = min(f(A)).$$

Also existieren Punkte $p, P \in \mathbb{R}$ so dass fr alle $a \in A$ folgende Ungleichung giltt:

$$u = f(p) \leq f(a) \leq f(P) = o$$

. $\square$

Literatur

Pugh, Charles Chapman: Real Mathematival Analysis: Springer Verlag, 2002
Krieg, Aloys: Analysis I, Aachen 2007