Kompaktheit und Überdeckungen

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 17.05.2010

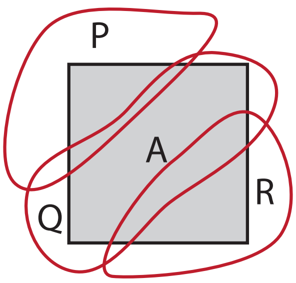
Min Ge, Niklas Fischer

In diesem Vortrag werden die Eigenschaften von kompakten, metrischen Räumen vertieft. Unser Ziel ist es Techniken zu erlernen, um die Kompaktheit von Mengen feststellen zu können. Insbesondere werden wir uns mit der Beziehung zwischen Überdeckungs- und Folgenkompaktheit auseinandersetzen. Weiterhin führen wir einen neuen Begriff, die Totalbeschränktheit, ein. Dieser ermöglicht uns zu überprüfen, ob ein metrischer Raum kompakt ist. Nebenbei beweisen wir die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

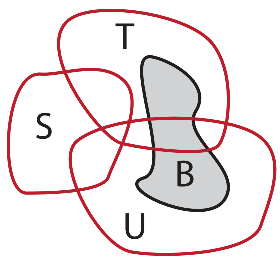
§1 Überdeckungskompaktheit

Zwar ist der Begriff der Überdeckungen bildlich gut vorstellbar, jedoch sind Aussagen über die Überdeckungskompaktheit einer Menge nur schwer zu treffen. Deshalb stellen wir in diesem Abschnitt einen Zusammenhang zwischen Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit her.

— *Einleitung* —



(a)



(b)

Abbildung 1: Beispiele verschiedener Überdeckungen

(1.1) Definition (Überdeckung)
Eine Menge $\mathcal{U}$ heißt *Überdeckung* von A, wenn A in der Vereinigung der zu $\mathcal{U}$ gehörenden Elemente (welche auch Mengen sind) enthalten ist. $\diamond$

(1.2) Beispiele
1. Die Menge $\mathcal{U} = \{P, Q, R\}$ überdeckt A. (Siehe Abbildung 1a)
2. $\mathbb{R}$ wird von $\{\{x\}|x \in \mathbb{R}\}$ überdeckt.
3. $\mathbb{Z}^2$ wird überdeckt von $\{\mathbb{R}^2\}$.
4. $(0, 1]$ wird überdeckt von $\left\{[\frac{1}{n}, 1], n \in \mathbb{N}\right\}$. $\diamond$

(1.3) Definition (Reduktion, Teilüberdeckung)
Wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ beide A überdecken und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ ist (damit ist gemeint, dass jede Menge, die Element von $\mathcal{V}$ ist, auch Element von $\mathcal{U}$ ist) dann heißt $\mathcal{V}$ *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$. Man sagt auch: *$\mathcal{U}$ reduziert sich zu $\mathcal{V}$*. $\diamond$

(1.4) Beispiele
1. B wird von $\mathcal{V} = \{S, T, U\}$ überdeckt. $\mathcal{V}' = \{T, U\}$ ist eine Teilüberdeckung. (Siehe Abbildung 1b)
2. $[0, 4]$ wird von $\mathcal{U} = \{[0, 1], [1, 2], [2, 4]\}$ und $\mathcal{V} = \{[0, 2], [2, 4]\}$ überdeckt. $\mathcal{V}$ ist keine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, denn $[0, 2] \notin \mathcal{U}$.
3. Die Überdeckung $\mathcal{U} = \left\{[\frac{1}{n}, 1]|n \in \mathbb{N}\right\}$ von $A = (0, 1]$ kann nicht auf eine endliche Teilüberdeckung reduziert werden, da, nach der Wegnahme von beliebig vielen Elementen der Überdeckung $\mathcal{U}$, noch unendlich viele Elemente von $\mathcal{U}$ benötigt werden um A zu überdecken. $\diamond$

(1.5) Definition (endliche Überdeckung)
Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt endlich, wenn die Mächtigkeit von $\mathcal{U}$ in $\mathbb{N}_0$ liegt. $\diamond$

(1.6) Definition (offene Überdeckung)
Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt *offen*, wenn jedes Element von $\mathcal{U}$ eine offene Menge ist. $\diamond$

(1.7) Beispiele
1. Sei $A = [0, 4]$. So sind $\mathcal{U} = \{(-1, 5)\}$ und $\mathcal{V} = \{(-1, 1), (0, 4), (3, 5)\}$ offene Überdeckungen von A.
2. Jede Menge A hat eine offene, endliche Überdeckung, denn es existiert immer eine offene Menge M, die alle Elemente von A enthält. $\mathcal{U} = \{M\}$ ist also eine offene, endliche Überdeckung von A. $\diamond$

(1.8) Definition (Überdeckungskompakheit)
Wenn sich jede offene Überdeckung von A auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lässt, heißt A *überdeckungskompakt*. $\diamond$

(1.9) Beispiel
Die Menge $(0,1]$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht überdeckungskompakt, da die Überdeckung

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

zwar offen ist, $\mathcal{U}$ sich jedoch nicht auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lässt. $\diamond$

(1.10) Bemerkung
Zu zeigen, dass eine Menge A überdeckungskompakt ist, gestaltet sich schwierig, da wir überprüfen müssen, ob alle offenen Überdeckungen von A sich auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lassen. Wir werden uns nun damit beschäftigen Techniken zu entwickeln, um überdeckungskompakte Mengen schneller zu erkennen. $\diamond$

(1.11) Lemma (Überdeckungskompaktheit endlicher Mengen)
Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist überdeckungskompakt. $\diamond$

Beweis
Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung der Menge $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wähle für jedes $1 \leq i \leq n$ eine offene Menge W_i aus $\mathcal{U}$, die x_i enthält. Dann ist $\{W_i | 1 \leq i \leq n\}$ eine offene endliche Teilüberdeckung von A. Somit ist A ist überdeckungskompakt. $\square$

(1.12) Bemerkung
Obwohl uns das Lemma (1.11) ein Stück unserem Ziel näher bringt Aussagen über die Überdeckungskompaktheit einer Menge zu machen, so hilft eine Aussage, die sich auf endliche Mengen beschränkt nur sehr wenig weiter. Wie sieht es mit unendlichen Mengen aus? Im Folgenden werden wir zeigen, dass in metrischen Räumen die Folgenkompaktheit einer Menge äquivalent zu ihrer Überdeckungskompaktheit ist. Für diesen Beweis brauchen wir aber noch ein Lemma, mit dem sich der nächste Abschnitt befasst. $\diamond$

— *Die Lebesguezahl* —

(1.13) Definition (Lebesguezahl)
Eine *Lebesguezahl* für eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von A ist eine positive reelle Zahl λ, die so gewählt ist, dass es für jedes $a \in A$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $U_\lambda(a) \subset W$ gibt. Dabei ist U_λ von a abhängig, aber λ für alle $a \in A$ konstant. $\diamond$

(1.14) Lemma
Jede offene Überdeckung einer folgenkompakten Menge hat eine Lebesguezahl λ, die echt größer als 0 ist. $\diamond$

Beweis
Angenommen die Aussage gelte nicht. So gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ einer folgenkompakten Menge A. Für jedes $\lambda > 0$ gibt es dann ein $a \in A$ so, dass $U_\lambda(a)$ in keiner Teilmenge W von $\mathcal{U}$ liegt.

Nehmen wir an, dass $\lambda := \frac{1}{n}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A sei, bei der für jedes a_n gilt, dass $U_{\frac{1}{n}}(a_n)$ in keinem $W \in \mathcal{U}$ liegt.

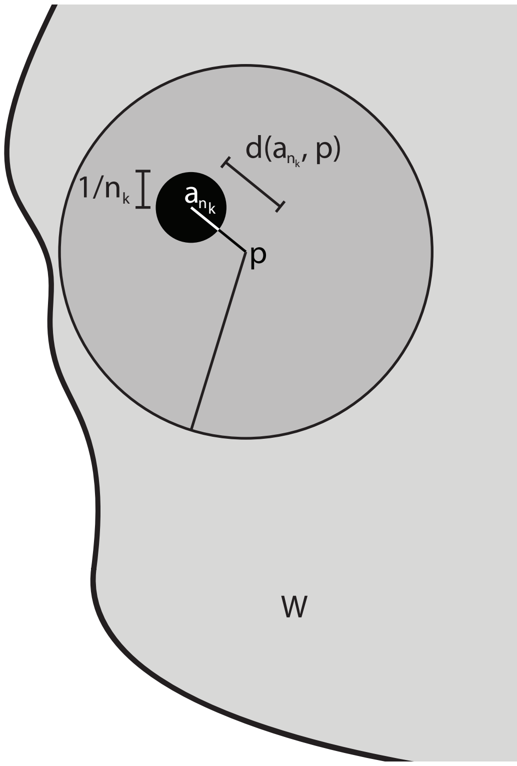


Abbildung 2: Die Menge $U_\lambda(p)$ (großer Kreis) enthält die Menge $U_{\frac{1}{n_k}}(a_{n_k})$ (kleiner Kreis), da $d(a_{n_k}, p) + \frac{1}{n_k} < r$

Weil A folgenkompakt ist, muss es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ geben, die gegen einen Wert $p \in A$ konvergiert und weil $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A ist, muss es ein $r > 0$ und ein $W \in \mathcal{U}$ mit $U_r(p) \subset W$ geben. Wenn k groß genug gewählt wird, dann gilt $d(a_{n_k}, p) < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$, also auch

$$d(a_{n_k}, p) + \frac{1}{n_k} < r$$

(siehe Abbildung 4). Damit muss $U_{\frac{1}{n_k}}(a_k) \subset U_r(p) \subset W$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gelten, was im Gegensatz zu der Annahme steht, dass es kein $W \in \mathcal{U}$, das alle $U_{\frac{1}{n}}(a_n)$ enthält, gibt. Wir schließen, dass $\mathcal{U}$ doch eine Lebesguezahl $\lambda > 0$ haben muss. □

— Folgen- und Überdeckungskompaktheit —

(1.15) Satz
Für eine Teilmenge A eines metrischen Raums sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist überdeckungskompakt.

b) A ist folgenkompakt. ◇

Beweis

1. Aus a) folgt b) durch Widerspruch:

   A sei eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raums. Wenn A nicht folgenkompakt ist, dann müsste eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A existieren, von der keine Teilfolge in A konvergiert. Also hätte jeder Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U_r(a)$ (r ist klein genug und abhängig von a) mit der Eigenschaft, dass nur endlich viele Folgenglieder von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ihr liegen.

   Die Menge $\{U_r(a) | a \in A\}$ ist eine offene Überdeckung von A und weil A überdeckungskompakt ist muss es eine endliche Teilüberdeckung

   $$\{U_{r_1}(a_1), U_{r_2}(a_2), \ldots, U_{r_k}(a_k)\}$$

   für alle $K \in \mathbb{N}$, geben. Weil $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in jeder dieser endlich vielen Umgebungen $U_{r_i}(a_i)$ nur endlich oft auftritt, folgt mit dem Cantorschen Diagonalverfahren[1], dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Folgenglieder hat. Dies ist ein Widerspruch. Also kann es $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht geben und A ist überdeckungskompakt.

2. Aus b) folgt a):

   Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung der folgenkompakten Menge A. Wir wollen $\mathcal{U}$ auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren.

   Nach dem Lemma (1.14) hat $\mathcal{U}$ eine Lebesguezahl $\lambda > 0$. Wähle nun ein beliebiges $a_1 \in A$ und ein $W_1 \in \mathcal{U}$, sodass $U_\lambda(a_1) \subset W_1$ erfüllt ist.

[1] Vgl. Krieg, Analysis I, Satz II(2.4)

- Wenn $A \subset W_1$ dann reduziert sich $\mathcal{U}$ auf die endliche Teilüberdeckung $\{W_1\}$, die aus einer einzigen Menge besteht. Die Behauptung aus a) folgt b) ist bewiesen.
- Falls dies nicht der Fall ist, wählen wir ein weiteres noch nicht überdecktes $a_2 \in A$ und ein $W_2 \in \mathcal{U}$, sodass $U_\lambda(a_2) \subset W_2$ gilt.

Entweder $\mathcal{U}$ lässt sich auf die endliche Teilüberdeckung $\{W_1, W_2\}$ reduzieren (und der Beweis ist vollbracht), oder wir führen die oben beschriebene Methodik weiter. Schließlich kommen wir auf eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A und eine Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}$, sodass

$$U_\lambda(a_n) \subset W_n$$

und

$$a_{n+1} \in (A \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_n))$$

für $n \in N$ ist.

Wir zeigen nun, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Widerspruch führen. Wegen der Folgenkompaktheit von A hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit einem Grenzwert $p \in A$. Für hinreichend große k gilt $d(a_{n_k}, p) < \lambda$ und $p \in U_\lambda(a_{n_k}) \subset W_{n_k}$. Alle a_{n_l} mit $l > k$ liegen außerhalb von W_{n_k}.

Da p aber in W_{n_k} liegt können sie sich p nicht mehr annähern, was ihrer Konvergenz gegen p widerspricht. Also endet der Prozess des Punkte a_n und Überdeckungen W_n Suchens und $\mathcal{U}$ lässt sich auf eine endliche Teilüberdeckung $\{W_1, \ldots, W_n\}$ von A reduzieren. Also ist $\mathcal{U}$ überdeckungskompakt. □

(1.16) Bemerkung
Der Begriff „kompakt“ kann nun für jede Menge, die a) oder b) erfüllt gebraucht werden. ◇

(1.17) Beispiel
Das oben besprochene Beispiel einer Überdeckung der Menge $(0,1] \in \mathbb{R}$ kann nun aus einem anderen Blickwinkel betrachtet werden. Da $(0,1]$ nicht abgeschlossen und beschränkt ist, was, wie wir aus der Analysis I wissen, äquivalent zur Folgenkompaktheit einer Menge ist, wissen wir nun auch, nach Satz (1.15), dass A nicht überdeckungskompakt ist. ◇

§2 Totalbeschränktheit

Der Satz von Heine-Borel besagt, dass eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^m$ genau dann kompakt ist, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist. Jedoch gilt diese Aussage nicht in allgemeinen metrischen Räumen.

(2.1) Beispiel
Wir betrachten die Menge $A := [3, 4] \cap \mathbb{Q}$.
A ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{Q}$. Aber A ist nicht kompakt, da zum Beispiel, die Folge $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} = (3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415, \ldots)$ gegen π konvergiert. Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit auch gegen π, das aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. $\diamond$

Aus dem letzten Beispiel wissen wir, dass die Beschränktheit und Abgeschlossenheit keine hinreichende Bedingung für die Kompaktheit eines metrischen Raums ist.

Wie sieht es aber mit vollständigen metrischen Räumen aus?

(2.2) Beispiel
Mit der diskreten Metrik $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ können wir den metrischen Raum auf $\mathbb{N}$ vervollständigen. Denn falls eine Folge auf $\mathbb{N}$ konvergiert, so liegt ihr Grenzwert in $\mathbb{N}$. Aber $(\mathbb{N}, d)$ ist nicht kompakt, da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = k$ keine Teilfolge in $\mathbb{N}$ hat, die konvergiert. $\diamond$

Um das Heine-Borel Lemma für den metrischen Raum zu verallgemeinern, müssen wir einen neuen Begriff, die *Totalbeschränktheit*, einführen.

(2.3) Definition (Totalbeschränktheit)
Eine Teilmenge $A \subset M$ ist *totalbeschränkt*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von A durch ε-Umgebungen gibt. $\diamond$

(2.4) Satz (Verallgemeinerter Satz von Heine-Borel)
Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist.

Beweis

„$\Rightarrow$" Sei A eine kompakte Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums. Dann ist A abgeschlossen, denn aus der Kompaktheit folgt, dass alle Häufungspunkte in A liegen.
Sei $\mathcal{U} := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in A\}$ für $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von A. Da A kompakt ist, folgt aus dem Satz (1.8), dass $\mathcal{U}$ überdeckungskompakt ist. Somit kann $\mathcal{U}$ auf eine endliche Teilüberdeckung von A reduziert werden. Folglich ist A totalbeschränkt.

„$\Leftarrow$ “ Sei M ein vollständiger metrischer Raum sowie $A \subset M$ abgeschlossen und totalbeschränkt. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, für $k \in \mathbb{N}$.
Um die Kompaktheit von A zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass A folgenkompakt ist. Da A totalbeschränkt ist, existiert eine endliche Überdeckung $\mathcal{U}_1$ von A durch ε_1-Umgebungen mit

$$\mathcal{U}_1 := \{U_{\varepsilon_1}(p_{11}), U_{\varepsilon_1}(p_{12}), \ldots, U_{\varepsilon_1 2}(p_{1m})\},$$

wobei $p_{1j} \in M$ mit $j = 1, \ldots, m$.

Wegen des Cantorschen Diagonalverfahrens nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass unendliche viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U_{\varepsilon_1}(p_{11})$ liegen. Wir wählen nun einen Punkt, der

$$a_{n_1} \in A_1 = A \cap U_{\varepsilon_1}(p_{11})$$

erfüllt. Da jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt ist, ist A_1 totalbeschränkt. Analog wie eben sei $\mathcal{U}_2$ eine endliche Überdeckung von A_1 durch ε_2-Umgebungen. $U_{\varepsilon_2}(p_{21}) \in \mathcal{U}_2$ besitzt unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle wieder einen Punkt aus der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n_2} \in A_2 = A_1 \cap U_{\varepsilon_2}(p_{21}),$$

wobei $n_2 > n_1$. Siehe Abbildung 3.

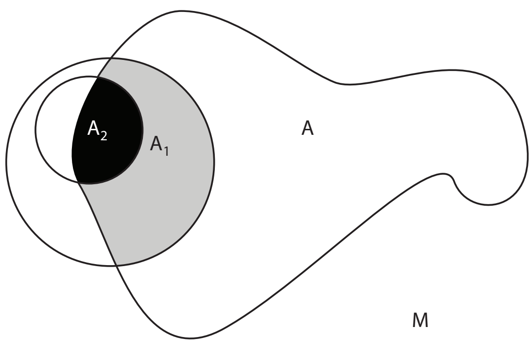


Abbildung 3

Wir wiederholen dieses Verfahren induktiv. Wähle somit

$$a_{n_k} \in A_k = A_{k-1} \cap U_{\varepsilon_k}(p_{k1}),$$

wobei $n_k > n_{k-1}$. Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Cauchy Folge, da für alle $k, l > K$,

$$a_{n_k}, a_{n_l} \in A_K \quad \text{und} \quad d(a_{n_k}, a_{n_l}) \leq \operatorname{diam}(A_K) \leq 2\varepsilon_K = \frac{2}{K}$$

gilt. Weil M vollständig ist, konvergiert $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in M. Weil $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ außerdem eine Folge in A ist und A abgeschlossen ist, liegt deren Grenzwert p in A. Also ist A folgenkompakt. □

(2.5) Korollar
Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist. ◇

Beweis

„$\Rightarrow$" Sei M ein kompakter metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Aufgrund der Kompaktheit von M, existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in M kovergent ist.
Falls eine Cauchy Folge eine Teilfolge hat, die in M konvergent ist, konvergiert diese Cauchy Folge auch in M. Folglich konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M. Da wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig gewählt haben, folgt weiter, dass jede Cauchy Folge in M konvergent ist. Somit ist M vollständig.[2]
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von M. Da M kompakt ist, ist M überdeckungskompakt. Folglich lässt sich $\mathcal{U}$ auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren. Somit ist M totalbeschränkt.

„$\Leftarrow$" Da jeder metrische Raum in sich selbst abgeschlossen ist, folgt aus dem Satz (2.4) direkt, dass M kompakt ist. □

§3 Perfekte metrische Räume

(3.1) Definition
Ein metrischer Raum M heißt *perfekt* wenn jedes $p \in M$ ein Häufungspunkt von M ist. ◇

(3.2) Beispiel

a) $\mathbb{N}$ ist nicht perfekt.
Denn sei $x \in \mathbb{N}$, und $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so ist $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{N} = \{x\}$. Somit kann kein Punkt in $\mathbb{N}$ ein Häufungspunkt sein.

[2]Das heißt: Jeder kompakte metrische Raum M ist vollständig.

b) $[a, b]$ ist perfekt.
Denn sei $x \in [a, b]$, so enthält die Umgebung $U_\varepsilon(x)$ für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte von $[a, b]$.

c) $\mathbb{Q}$ ist perfekt.
Denn sei $x \in \mathbb{Q}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine ε-Umgebung von x mit $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Es ist klar, dass $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}$ eine unendliche Menge ist. Folglich ist x ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$. Da x ein beliebiger Punkt in $\mathbb{Q}$ ist, ist jeder Punkt in $\mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt. Folglich ist $\mathbb{Q}$ perfekt.

(3.3) Lemma
Jeder nicht leere, perfekte, vollständige, metrische Raum ist überabzählbar.

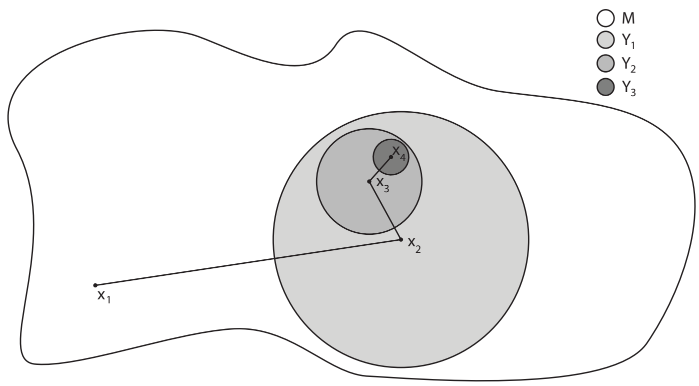


Abbildung 4: Die Grafik zeigt die inneinander verschachtelten, immer kleiner werdenden, Umgebungen $Y_1, \ldots, Y_n$ und wie alle Punkte $x_1, \ldots, x_n$ von der Umgebung Y_n ausgeschlossen werden.

Beweis
Wir nehmen an, dass M ein nicht leerer, perfekter, vollständiger aber abzählbarer metrischer Raum sei. Wegen der Abzählbarkeit und Perfektheit von M setzen wir

$$M := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Sei $y_1 = x_2$, $r_1 = \min\left\{1, \frac{1}{2}d(x_1, y_1)\right\}$ sowie $Y_1 = \widehat{U}_{r_1}(y_1)$ eine abgeschlossene Umgebung von y_1 mit dem Radius r_1. Offensichtlich wurde der Punkt x_1 aus Y_1 ausgeschlossen. Weil M perfekt ist, ist jedes x_n mit $n \in \mathbb{N}$ ein Häufungspunkt von M. Somit liegen unendlich viele Punkte in der Umgebung $U_{r_1}(y_1)$, welche eine offene Umgebung des Häufungspunkts y_1 ist. Wähle einen Punkt y_2 aus $U_{r_1}(y_1)$ mit $y_2 \neq x_2$ und setze nun $Y_2 := \widehat{U}_{r_2}(y_2)$ mit

$$r_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}d(y_2, x_2), (r_1 - d(y_1, y_2))\right\}.$$

Nun wurden die Punkte x_1 und x_2 aus Y_2 ausgeschlossen und Y_2 liegt geschachtelt in Y_1. Wenn wir dieses Verfahren weiter iterieren, bekommen wir eine geschachtelte Mengenfolge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \ldots \supset Y_n := \widehat{U}_{r_n}(y_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus Y_n wurden die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausgeschlossen. Da der Radius $r_n \leq \frac{1}{n}$ ist, ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von M folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in M.$$

existiert. Weil alle Y_n für $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen und ineinander verschachtelt sind, liegt y auch in jedem Y_n. Jedoch ist $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn jedes x_n wurde von dem entsprechenden Y_n ausgeschlossen. Folglich liegt y nicht in M. Dies ist ein Widerspruch zur Vollständigkeit von M.

(3.4) Korollar
$\mathbb{R}$ und $[a, b]$ sind überabzählbar. ◇

Beweis
$\mathbb{R}$ ist nicht leer, vollständig und perfekt. Aus Lemma (3.3) folgt direkt die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Aus der Kompaktheit von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ folgt, dass $[a, b]$ vollständig und perfekt ist. Offensichtlich ist $[a, b]$ nicht leer. Nach dem Lemma (3.3) ist $[a, b]$ überabzählbar. □

(3.5) Korollar
Ein nicht leerer, perfekter und vollständiger metrischer Raum ist überall überabzählbar in dem Sinne, dass jede r-Umgebung überabzählbar ist. ◇

Beweis
Sei A ein nicht leerer, perfekter und vollständiger metrischer Raum und $U_r(p)$ eine r-Umgebung des Punktes $p \in A$.
Da A perfekt ist, ist $U_r(p)$ auch perfekt. Folglich ist $\overline{U_{\frac{r}{2}}(p)}$ perfekt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist wieder vollständig. Somit ist $\overline{U_{\frac{r}{2}}(p)}$ vollständig und offensichtlich ist $\overline{U_{\frac{r}{2}}(p)}$ nicht leer. Somit folgt aus dem Lemma (3.3), dass $\overline{U_{\frac{r}{2}}(p)}$ überabzählbar ist. Da $\overline{U_{\frac{r}{2}}(p)} \subset U_r(p)$ ist, folgt direkt die Überabzählbarkeit von $U_r(p)$.

Literatur

[1] Pugh, Charles Chapman. *Real Mathematical Analysis* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002, Seiten 88-95

[2] Krieg, Aloys. *Analysis I* Lehrstuhl A für Mathematik, Aachen, 2004