Vervollständigung

Vortrag zum Seminar zur Analysis in metrischen Räumen, 31.05.2010

Benedikt Niemöller & Henrik Gerhards

§ 1 Vollständigkeit

(I) Das Vervollständigungstheorem für metrische Räume

- (1) Ziel des Vortrags
- (2) Hilfssatz
- (3) Vervollständigungstheorem
- (4) Anwendung

(II) Beweis des Vervollständigungstheorem

- (1) Konstruktion von $\hat{M}$
  - (a) Definition der Menge $\mathcal{C}$ und der Co-Cauchy Eigenschaft
  - (b) Beweis von $\sim_{C_0}$ ist Äquivalenzrelation
  - (c) Definition von $\hat{M}$ und dazugehöriger Metrik D
- (2) Beweis der Existenz von $\hat{M}$ als Vervollständigung von M
  - (a) Beweis der Wohldefiniertheit der Metrik D
    - (i) Existenz des Grenzwertes
    - (ii) Eindeutigkeit des Grenzwertes
    - (iii) Erfüllung der Metrik-Bedingungen
  - (b) Beweis von M ist metrischer Unterraum $\hat{M}$
    - (i) Elemente von M besitzen Repräsentanten in $\hat{M}$
    - (ii) M Metrik d lässt sich aus $\hat{M}$ Metrik D ableiten
  - (c) Beweis der Vollständigkeit von $\hat{M}$
    - (i) Definition von Cauchy Folgen in $\hat{M}$
    - (ii) Hilfsbehauptung
    - (iii) Beweis der Vollständigkeit von $\hat{M}$ durch ϵ-Abschätzungen
- (3) Beweis der Eindeutigkeit von $\hat{M}$ als Vervollständigung von M

§ 1 Vollständigkeit

— *(I) Vervollständigungstheorem für metrische Räume* —

(1) Ziel des Vortrags

Viele metrische Räume sind vollständig. Wir wollen im ersten Teil zeigen, dass Vollständigkeit eine Eigenschaft ist, die potentiell jedem metrischen Raum zukommen kann. Im zweiten Teil folgt dann eine Anwendung unserer Ergebnisse, dahingehend dass $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruiert wird.

(1.1) Beispiel

Alle abgeschlossen Unterräume des Euklidischen Raumes sind vollständig (siehe Vortrag 4 Cauchy Folgen und Kompaktheit, Satz (1.7). ◇

Es folgt ein Hilfssatz, welcher im Grunde nur eine Anwendung der Dreiecksungleichung darstellt, sich aber im Laufe des Beweises als sehr nützlich erweisen wird.

(2) Hilfssatz

(1.2) Satz

Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $p, q, x, y \in M$, dann gilt

$$|d(p,q) - d(x,y)| \leq d(p,x) + d(q,y). \qquad \diamond$$

Beweis

Aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie der Metrik folgt für $p, q, x, y \in M$ gilt:

$$d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,q) + d(q,y) \qquad \text{und} \tag{1}$$
$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,y) + d(y,q) = d(x,p) + d(x,y) + d(q,y) \tag{2}$$

Falls $d(p,q) \geq d(x,y)$

$$d(p,q) - d(x,y) \underset{(1)}{\geq} d(p,q) - d(x,p) - d(p,q) - d(q,y) = -d(p,x) - d(q,y) \tag{3}$$
$$d(p,q) - d(x,y) \underset{(2)}{\leq} d(p,x) + d(x,y) + d(y,q) - d(x,y) = d(p,x) + d(q,y) \tag{4}$$

Daraus folgt

$$-d(p,x) - d(q,y) \underset{(3)}{\leq} d(p,q) - d(x,y) \underset{(3)}{\geq} d(p,x) + d(q,y)) \tag{5}$$

Falls $d(p,q) \leq d(x,y)$

$$d(x,y) - d(p,q) \underset{(1)}{\leq} d(x,p) + d(p,q) + d(q,y) - d(p,q) = d(p,x) + d(q,y) \tag{6}$$

$$d(x,y) - d(p,q) \underset{(2)}{\geq} d(x,y) - d(x,p) - d(x,y) - d(q,y) = -d(p,x) - d(q,y) \tag{7}$$

Aus beiden folgt daher

$$-d(p,x) - d(q,y) \underset{(7)}{\leq} d(x,y) - d(p,q) \underset{(6)}{\leq} d(p,x) + d(q,y) \tag{8}$$

Für ein $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $l \in \mathbb{R}$ gilt trivial:

$$-k \leq l \leq k \Rightarrow |l| \leq k \tag{9}$$

Also folgt insgesamt

$$|d(p,q) - d(x,y)| \underset{(5),(8),(9)}{\leq} d(p,x) + d(q,y). \qquad \square$$

(3) Vervollständigungstheorem
Dieses Theorem ist das Herzstück des Vortrages und mit seinem Beweis werden wir uns gesamten ersten Teil beschäftigen.

(1.3) Satz (Vervollständigungstheorem)
Jeder metrische Raum M mit der Metrik d kann zu einem metrischen Raum $\hat{M}$ mit einer Metrik D vervollständigt werden. ◇

(1.4) Bemerkung
Jeder metrische Raum M kann als Unterraum eines vollständigen, metrischen Raumes $\hat{M}$ angesehen werden, welcher dann als Vervollständigung bezeichnet wird und durch M eindeutig bestimmt ist. ◇

(4) Anwendung
Ein bereits aus der Vorlesung Analysis I bekanntes Beispiel ist, dass der metrische Raum $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ vervollständigt wird. Dies werden wir im zweiten Teil des Vortrags ausführlich zeigen.

— *(II) Beweis des Vervollständigungstheorem* —

(1) Konstruktion von $\hat{M}$
Zunächst konstruieren wir den metrischen Raum $\hat{M}$ aus M. Daf"r benötigen wir zuerst zwei Definitionen.

(a) Definition der Menge $\mathcal{C}$ und der Co-Cauchy Eigenschaft

(1.5) Definition
Sei $\mathcal{C} := \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge in $M\}$ die Menge der Cauchy Folgen in M. ◇

(1.6) Definition (Co-Cauchy Eigenschaft)
Zwei Cauchy Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (M,d) sind genau dann Co-Cauchy, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n) = 0.$$ ◇

(b) Beweis von $\sim_{Co}$ ist Äquivalenzrelation

(1.7) Satz
Die Co Cauchy Eigenschaft definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_{Co}$ auf $\mathcal{C}$, also

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n) = 0.$$ ◇

Beweis
Die Binäre Relation $\sim_{Co}$ muss reflexiv, symmetrisch, transitiv sein.
Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen in M

(i) Reflexivität
Es ist zu zeigen, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.
Für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt trivial

$$d(p_n,p_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

also folgt

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n,p_n) = 0$$

und damit

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (p_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(ii) Symmetrie
Es ist zu zeigen, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent zu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt nach Symmetrie der Metrik

$$d(p_n, q_n) = d(q_n, p_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

also folgt

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \lim_{n\to\infty} d(q_n, p_n)$$

und damit

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (p_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(iii) Transitivität
Es ist zu zeigen, dass aus $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} d(q_n, r_n) = 0$$

also gilt mit positiver Definitheit und Dreiecksungleichung

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(p_n, r_n) \leq \lim_{n\to\infty} (d(p_n, q_n) + d(q_n, r_n)) = 0 + 0 = 0$$

und damit

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}. \square$$

(c) Definition von $\hat{M}$ und dazugehöriger Metrik D
Wir definieren nun den metrischen Raum $(\hat{M}, D)$, der (M, d) vervollständigen wird.

(1.8) Definition
Sei $\hat{M} := \mathcal{C}/_{\sim_{Co}} = \{P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mid (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy Folge in } M\}$ die Menge der $\sim_{Co}$ Äquivalenzklassen. ◇

(1.9) Definition
Sei $P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}],\ Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Auf $\hat{M}$ sei durch

$$D(P, Q) := \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

eine Metrik definiert, wobei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ Repräsentanten der Äquivalenzklasse $P,\ Q \in \hat{M}$ sind. ◇

Im nächsten Schritt werden wir zeigen, dass der definierte, metrische Raum $(\hat{M}, D)$ auch tatsächlich ein vollständiger, metrischer Raum ist.

(2) $\hat{M}$ existiert als Vervollständigung von M

(1.10) Satz
$(\hat{M}, D)$ ist ein vollständiger, metrischer Raum und (M, d) ist metrischer Teilraum von M. ◇

Der Beweis dieses Satzes erfordert die Wohldefiniertheit der Metrik D, die Teilraumeigenschaft von (M, d) zu $(\hat{M}, D)$ und natärlich die Vollständigkeit von $(\hat{M}, D)$.

(a) Beweis der Wohldefiniertheit der Metrik D auf $\hat{M}$
Die Wohldefiniertheit erfordert die Existenz des Grenzwertes, seine Eindeutigkeit und insbesondere, dass die Eindeutikgeit unabhängig vom gewählten Repräsentanten ist.

(i) Existenz des Grenzwertes
Sei $\epsilon > 0$, da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen in M sind, gilt

$$\exists\ N_1 \in \mathbb{N} : |d(p_m, p_n)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ m, n \geq N_1, \tag{1}$$
$$\exists\ N_2 \in \mathbb{N} : |d(q_m, q_n)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ m, n \geq N_2. \tag{2}$$

Dann existiert ein $N := \max\{N_1, N_2\}$, so dass gilt

$$|d(p_m, p_n)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } |d(q_m, q_n)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ m, n \geq N$$

Mit (1.2) gilt für $p_m, p_n, q_m, q_n \in M$

$$\begin{aligned} |d(p_m, q_m) - d(p_n, q_n)| &\leq \underbrace{d(p_m, p_n)}_{\underset{(1)}{<}\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{d(q_m, q_n)}_{\underset{(2)}{<}\frac{\epsilon}{2}} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \forall m, n \geq N. \end{aligned}$$

Also ist $(d(p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ und da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gilt

$$\exists\ L \in \mathbb{R}, \text{ so dass } L = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n).$$

(ii) Eindeutigkeit des Grenzwertes
Seien $(\dot{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\dot{q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Co Cauchy Folgen zu $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) \qquad \text{und} \\ \dot{L} &= \lim_{n\to\infty} d(\dot{p}_n, \dot{q}_n). \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$, da $(d(p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}}, (d(\dot{p}_n, \dot{q}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen in $\mathbb{R}$ sind, gilt

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |d(p_n, q_n) - L| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq N_1, \tag{3}$$
$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |d(\dot{p}_n, \dot{q}_n - L| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq N_2. \tag{4}$$

Da die betrachteten Folgen Co-Cauchy Folgen zu $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, gilt

$$\exists\, N_3 \in \mathbb{N} : |d(p_n, \dot{p}_n)| < \frac{\epsilon}{6} \qquad \forall\, n \geq N_3, \tag{5}$$
$$\exists\, N_4 \in \mathbb{N} : |d(q_n, \dot{q}_n)| < \frac{\epsilon}{6} \qquad \forall\, n \geq N_4. \tag{6}$$

Es) existiert ein $N_5 := \max\{N_3, N_4\}$, so dass gilt

$$\begin{aligned} |d(p_n, q_n) - d(\dot{p}_n, \dot{q}_n)| &\leq d(p_n, \dot{p}_n) + d(q_n, \dot{q}_n) \\ &\underset{(5),(6)}{<} \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq N_5. \end{aligned} \tag{7}$$

Dann gilt $\forall\, n \geq \max\{N_1, N_2, N_5\}$ mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left|L - \dot{L}\right| &= \left|L - d(p_n, q_n) + d(p_n, q_n) - d(\dot{p}_n, \dot{q}_n) + d(\dot{p}_n, \dot{q}_n) - \dot{L}\right| \\ &\leq \underbrace{\left|L - d(p_n, q_n)\right|}_{\underset{(3)}{<}\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\left|d(p_n, q_n) - d(\dot{p}_n, \dot{q}_n)\right|}_{\underset{(7)}{<}\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\left|d(\dot{p}_n, \dot{q}_n) - \dot{L}\right|}_{\underset{(4)}{<}\frac{\epsilon}{3}} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} d(\dot{p}_n, \dot{q}_n) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$ Also ist der Grenzwert in D wohldefiniert.

(iii) Erfüllung der Metrikbedingungen
Jetzt müssen wir noch zeigen, dass D eine Metrik ist. Die Bedingungen an eine Metrik umfassen Symmetrie, Definitheit und Dreiecksungleichung. Die Nonnegativität lässt sich daraus immer ableiten.

(1) Symmetrie
Da d symmetrisch auf M ist und der Limes die Symmetrie erhält, ist auch D symmetrisch auf $\hat{M}$.

(2) Definitheit
Seien $P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}], Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ und $D(P,Q) = 0$, dann ist zu zeigen, dass $P = Q$ ist.

$$\begin{aligned} D(P,Q) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\Leftrightarrow P = Q. \end{aligned}$$

(3) Dreiecksungleichung
Seien $P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}], Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}], R := [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \hat{M}$, mit der Dreiecksungleichung für d folgt

$$\begin{aligned} D(Q,R) &= \lim_{n\to\infty} d(q_n, r_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (d(q_n, p_n) + d(p_n, r_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(q_n, p_n) + \lim_{n\to\infty} d(p_n, r_n) \\ &= D(Q,P) + D(P,R). \end{aligned}$$

Damit ist $(\hat{M}, D)$ ein metrischer Raum.

(b) $M \subset \hat{M}$
Sei $\hat{M}_0 := \{\bar{p} \in \hat{M} \mid \bar{p} = [(p)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist konstante Folge , $p \in M\}$. Wir zeigen, dass $\hat{M}_0 \subset \hat{M}$ gilt, dass eine surjektive Isometrie zwischen $(\hat{M}_0, D)$ und (M, d) existiert und dass $\hat{M}_0$ dicht in $\hat{M}$ liegt.

(i) $\hat{M}_0 \subset \hat{M}$
Dies ist klar nach Definition von $\hat{M}_0$

(ii) $(\hat{M}_0, D)$ ist isometrisch zu (M, d)
Es sei $i : M \to \hat{M}_0,\ p \mapsto [(p)_{n\in\mathbb{N}}]$.
Für $p, q \in M$ gilt

$$D(i(p), i(q)) = \lim_{n\to\infty} d((p)_{n\in\mathbb{N}}, (q)_{n\in\mathbb{N}}) = d(p,q).$$

Ausserdem ist i nach Definition surjektiv.
Also ist i eine surjektive Isometrie zwischen den metrischen Räumen (M, d) und $(\hat{M}_0, D)$.

(iii) $\hat{M}_0$ liegt dicht in $\hat{M}$
Sei $P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \hat{M}$ und $\epsilon > 0$.
Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist, gilt

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : d(p_r, p_s) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ r, s \geq N$$

und speziell gilt

$$d(p_N, p_k) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ k \geq N.$$

Sei nun $Q := [(p_N)_{n\in\mathbb{N}}] \in \hat{M}_0$, dann gilt

$$D(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_N, p_n) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Also liegt $\hat{M}_0$ dicht in $\hat{M}$

(c) $\hat{M}$ ist vollständig

(1) Definition von Cauchy Folgen in $\hat{M}$
Sei $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} = ([(p_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}], [(p_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}], [(p_n^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}], \dots, [(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}], \dots)$ eine Cauchy Folge von Äquivalenzklassen in $\hat{M}$, deren Konvergenz bezüglich der Metrik D behandelt wird. Zeige $\exists\ Q = [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]\ \in \hat{M}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = Q$.

(2) Hilfsbehauptung
Da D wohldefiniert ist, gilt
$\forall\ k \in \mathbb{N}\ \exists\ (p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$d(p_m^{(k)}, p_n^{(k)}) < \frac{1}{k} \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Alle Glieder dieser repräsentativen Folge aus P_k haben einen Abstand kleiner als $\frac{1}{k}$, nicht nur die mit hohem Index.
Um dies zu zeigen, wählen und fixieren wir zunächst eine beliebige Folge $(\tilde{p}_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in P_k$. Diese ist eine Cauchy Folge, also existiert ein von k abhängiges $N(k) \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(\tilde{p}_m^{(k)}, \tilde{p}_n^{(k)}) < \frac{1}{k} \qquad \forall\ m, n \geq N.$$

Die Glieder dieser repräsentativen Folge aus P_k besitzen erst ab einem bestimmten Index einen Abstand kleiner als $\frac{1}{k}$. Aus dieser beliebigen Cauchy Folge leiten wir nun folgende spezielle Cauchy Folge ab.

$$(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} := (\tilde{p}_{(n+N)}^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in P_k$$

Da beide Folgen denselben Grenzwert haben, gilt natürlich:
$(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (\tilde{p}_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, also befinden sich beide Folgen in deselben Äquivalenzklasse. Desweiteren erfüllt $(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Ungleichung (1) für alle Indices. Nun wählen wir $\forall\ k \in \mathbb{N}$ auf die gleiche Weise einen Repräsentanten $(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, die allesamt Ungleichung (1) für alle Indices erfüllen.

(3) Beweis der Vollständigkeit von $\hat{M}$ durch ϵ-Abschätzungen
Sei $Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(p_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}]$, dann wollen wir zeigen, dass $Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ in $\hat{M}$ liegt und $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = Q$, also dass $\hat{M}$ vollständig ist. Um dies zu beweisen, sei zunächst $\epsilon > 0$. Da $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} = ([(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\hat{M}$ ist, gilt

$$\exists\ N \geq \frac{3}{\epsilon} : \lim_{n\to\infty} d(p_n^{(k)}, p_n^{(l)}) = D(P_k, P_l) < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\ k,l \geq N \tag{2}$$

Sei also $k,l \geq N$, dann gilt mit (1) und der Dreiecksungleichung,

$$\begin{aligned} d(q_k, q_l) &= d(p_k^{(k)}, p_l^{(l)}) \\ &\leq d(p_k^{(k)}, p_n^{(k)}) + d(p_n^{(k)}, p_n^{(l)}) + d(p_n^{(l)}, p_l^{(l)}) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\underset{(1)}{<}\frac{\epsilon}{3}} + d(p_n^{(k)}, p_n^{(l)}) + \underbrace{\frac{1}{l}}_{\underset{(1)}{<}\frac{\epsilon}{3}} \end{aligned}$$

Die obige Ungleichung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d(q_k, q_l)$ ist unabhängig von n. Der Grenzwert von $d(p_n^{(k)}, p_n^{(l)})$ für $n \to \infty$ ist nach (2) $D(P_k, P_l) < \frac{\epsilon}{3}$

$$\begin{aligned} &< \frac{2\epsilon}{3} + \underbrace{d(p_n^{(k)}, p_n^{(l)})}_{\underset{(2)}{<}\frac{\epsilon}{3}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Also gilt $\forall\ k,l \geq N\ :\ d(q_k, q_l) < \epsilon$, damit ist $(q_{n\in\mathbb{N}})$ eine Cauchy Folge in M. Daraus wiederum folgt, dass $Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \hat{M}$
Sei $\epsilon > 0$, da $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M ist, gilt

$$\exists\ N \geq \frac{2}{\epsilon} : d(q_k, q_l) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ k,l \geq N.$$

Nun können wir zeigen, dass Q der Grenzwert für $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d(p_n^{(k)}, q_n) &\leq d(p_n^{(k)}, p_k^{(k)}) + d(\underbrace{p_k^{(k)}}_{=q_k}, q_n) \\ &= \underbrace{d(p_n^{(k)}, p_k^{(k)})}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{d(q_k, q_n)}_{<\frac{\epsilon}{2}} \\ &< \frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to\infty} d(p_n^{(k)}, q_n) = D(P_k, Q)$ gilt, folgt schliesslich $\lim_{n\to\infty} P_k = Q$ und endlich $\hat{M}$ ist vollständig.

(3) $\hat{M}$ ist eindeutig als Vervollständigung von M

Wir haben also gezeigt, dass $(\hat{M}, D)$ eine Vervollständigung von (M, d) ist. Jetzt müssen wir noch begründen, warum die Vervollständigung eindeutig ist bis auf Isometrie.

(1.11) Satz
$\hat{M}$ ist eindeutig als Vervollständigung von M. ◇

Beweis
Angenommen es gibt neben $(\hat{M}, D)$ einen weiteren vollständigen, metrischen Raum $(\tilde{M}, \tilde{D})$, welcher auch (M, d) vervollständigt. Nun ist zu zeigen, dass $(\hat{M}, D)$ und $(\tilde{M}, \tilde{D})$ isometrisch sind.
Sei $\epsilon > 0$ und P ein beliebiges Element aus $\hat{M}$. Dann existiert eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{M}_0$, so dass wegen der Vollständigkeit von $\hat{M}$ und der Dichtheit von M_0 in $\hat{M}$ gilt

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |D(P_n, P)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq N_1. \tag{1}$$

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{M}_0$ muss dann eine Cauchy Folge in $\hat{M}_0$ sein, weshalb ein $\tilde{P} \in \tilde{M}$ existiert mit

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : \left|D(P_n, \tilde{P})\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq N_2. \tag{2}$$

Desweiteren hängt $\tilde{P}$ nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{M}_0$ ab.

Sei hierzu $\epsilon > 0$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere Folge aus $\hat{M}_0$, welche in $\hat{M}$ gegen P konvergiert, also

$$\exists\, N_3 \in \mathbb{N} : \, |D(Q_n, P)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad\qquad \forall\, n \geq N_3. \tag{3}$$

Sei $\epsilon > 0$, dann gilt für $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(Q_n, \tilde{P}) &\leq \tilde{D}(Q_n, P_n) + \tilde{D}(P_n, \tilde{P}) \\
&= D(Q_n, P_n) + \tilde{D}(P_n, \tilde{P}) \\
&\leq D(\underbrace{Q_n, P}_{\underset{(3)}{<}\frac{\epsilon}{3}}) + D(\underbrace{P, P_n}_{\underset{(1)}{<}\frac{\epsilon}{3}}) + \tilde{D}(\underbrace{P_n, \tilde{P}}_{\underset{(2)}{<}\frac{\epsilon}{3}}) \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon \qquad \forall n \geq N
\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{D}(Q_n, \tilde{P}) = 0.$$

Jedem P in $\hat{M}$ ordnen wir so ein bestimmtes Element $\tilde{P}$ in $\tilde{M}$ zu. Die so entstehende Abbildung $j : \hat{M} \to \tilde{M}$ lässt die Elemente von $\hat{M}$ fest und ist surjektiv, da sowohl $\hat{M}$ als auch $\tilde{M}$ Vervollständigungen von M sind. So kann jedem Element aus $\hat{M}$ über M eindeutig ein entsprechendes Element von $\tilde{M}$ zugeordnet werden. Aus der Stetigkeit der Metrik folgt ferner, dass j eine Isometrie ist.
Seien hierzu $P, Q \in \hat{M}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximierende Folgen aus M, deren Grenzwert $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \tilde{M}$ bestimmt werden durch $\tilde{P} = j(P)$ und $\tilde{Q} = j(Q)$, so gilt, da die Metriken D und $\tilde{D}$ eingeschränkt auf M der Metrik d entsprechen:

$$\begin{aligned}
D(P, Q) &= \lim_{n\to\infty} D(P_n, Q_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(P_n, Q_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tilde{D}(P_n, Q_n) \\
&= \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{Q}) \\
&= \tilde{D}(j(P), j(Q))
\end{aligned}$$

□

Es ist also bewiesen, dass $(\hat{M}, D)$ und $(\tilde{M}, \tilde{D})$ bis auf Isometrie identisch sind und es daher Sinn macht von Eindeutigkeit der Vervollständigung zu reden.

§2 Alternative Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

Im zweiten Abschnitt wollen wir einen konkreten metrischen Raum vervollständigen. Wir werden $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit dem im ersten Abschnitt dargestellten Verfahren konstruieren. Jedoch ist dies keine alternative Konstruktion von $\mathbb{R}$, da dessen Vollständigkeit eine Vorraussetzung für die Metrik D war.

(2.1) Definition ($\hat{\mathbb{Q}}$)
Definiere $\hat{\mathbb{Q}}$ wie im ersten Abschnitt:

$\mathcal{C} := \{(p_n)_n | (p_n)_n$ Cauchyfolge in $\mathbb{Q}\}$,

$\hat{\mathbb{Q}} := \mathcal{C} \diagup_{\sim co}$.

Im Folgenden werden wir mit $\overline{p} \in \hat{\mathbb{Q}}$ immer den Repräsentanten einer konstanten Folge von Elementen $p \in \mathbb{Q}$ bezeichnen. Also:

$$\overline{p} = [(p, p, p, ...)] = [(p)_n] \text{ für } p \in \mathbb{Q}.$$

(2.2) Satz ($\hat{\mathbb{Q}}$ ist ein Körper)
Wir definieren auf $\hat{\mathbb{Q}}$ folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} P + Q &:= [(p_n + q_n)_n] \\ P - Q &:= [(p_n - q_n)_n] \\ P \cdot Q &:= [(p_n \cdot q_n)_n] \\ \frac{P}{Q} &:= [(\frac{p_n}{q_n})_n] \end{aligned}$$

mit $P = [(p_n)_n] \in \hat{\mathbb{Q}}$ und $Q = [(q_n)_n] \in \hat{\mathbb{Q}}$ und im Fall $\frac{P}{Q}$ mit $Q \neq \overline{0} = [(0, 0, 0, ...)]$.

Mit diesen Rechenregeln bildet $\hat{\mathbb{Q}}$ einen Körper. ◇

Beweis
Wir müssen dazu das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz, die Existenz der neutralen und der inversen Elemente zeigen.

Vertreterunabhängigkeit, Wohldefiniertheit:

Seien $(p_n)_n$ und $(p'_n)_n$ zwei Co-Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit Repräsentant P in $\hat{\mathbb{Q}}$ und $(q_n)_n$ und $(q'_n)_n$ zwei Co-Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit Repräsentant Q.

Aufgrund der Co-Cauchy-Eigenschaft von p und p' bzw. q und q' gilt:

$\lim_{n\to\infty} d(p_n, p'_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} d(q_n, q'_n) = 0$

Wir müssen zeigen, dass gilt: $\lim_{n\to\infty} d(p_n + q_n, p'_n + q'_n) = 0$

Mit der Positivität der Metrik gilt aber:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} d(p_n + q_n, p'_n + q'_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(p_n + q_n, p'_n + q_n) + d(p'_n + q_n, p'_n + q'_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(p_n, p'_n) + \lim_{n\to\infty} d(q_n, q'_n) = 0
\end{aligned}
$$

Analoges erhält man für die anderen Rechenregeln, es gilt daher:

$$
\begin{aligned}
P + Q = [(p_n)_n + (q_n)_n] = [(p'_n)_n + (q'_n)_n] = P + Q \\
P - Q = [(p_n)_n - (q_n)_n] = [(p'_n)_n - (q'_n)_n] = P - Q \\
P \cdot Q = [(p_n)_n \cdot (q_n)_n] = [(p'_n)_n \cdot (q'_n)_n] = P \cdot Q \\
\frac{P}{Q} = [\frac{(p_n)_n}{(q_n)_n}] = [\frac{(p'_n)_n}{(q'_n)_n}] = \frac{P}{Q}
\end{aligned}
$$

Somit sind die Rechenregeln unabhängig von der Wahl des Vertreters und somit wohldefiniert.

Seien $P = [(p_n)_n]$, $Q = [(q_n)_n]$ und $R = [(r_n)_n]$ in $\hat{\mathbb{Q}}$ beliebig.

Assoziativgesetz:

Es gilt:

$$P + (Q + R) = [(p_n + [(q_n + r_n)_n])_n] = [(p_n + q_n + r_n)_n] = [([(p_n + q_n)_n] + r_n)_n] = (P + Q) + R,$$

sowie

$$P \cdot (Q \cdot R) = [(p_n \cdot [(q_n \cdot r_n)_n])_n] = [(p_n \cdot q_n \cdot r_n)_n] = [([(p_n \cdot q_n)_n] \cdot r_n)_n] = (P \cdot Q) \cdot R.$$

Kommutativgesetz:

Es gilt:

$$P + Q = [(p_n + q_n)_n] = [(q_n + p_n)_n] = Q + P,$$

sowie

$$P \cdot Q = [(p_n \cdot q_n)_n] = [(q_n \cdot p_n)_n] = Q \cdot P.$$

Existenz neutraler Elemente:

Für $\overline{0} := [(0,0,0,...)]$ und $\overline{1} := [(1,1,1,...)]$ gilt:

$$P + \overline{0} = [(p_n + 0)_n] = [(p_n)_n] = P$$

und

$$P \cdot \overline{1} = [(p_n \cdot 1)_n] = [(p_n)_n] = P.$$

Existenz inverser Elemente:

Es gilt:

$$P + (-P) = [(p_n + (-p_n))_n] = [(p_n - p_n)_n] = [(0)_n] = \overline{0}$$

sowie

$$P \cdot \frac{1}{P} = [(p_n \cdot \frac{1}{p_n})_n] = [(\frac{p_n}{p_n})_n] = [(1)_n] = \overline{1}$$

mit $P \neq \overline{0}$. □

Damit haben wir gezeigt, dass $\hat{\mathbb{Q}}$ mit den obigen Rechenvorschriften einen Körper bildet. Auf diesem Körper können wir eine Ordnung definieren, doch dazu müssen wir zunächst erklären, was es bedeutet, wenn ein Element in $\hat{\mathbb{Q}}$ positiv ist.

(2.3) Definition (Positiv und Negativ)
Sei P $\in \hat{\mathbb{Q}}$ mit $P = [(p_n)_n]$
Falls für einen Vertreter $(p_n)_n$ von P und ein $\epsilon > 0$ gilt:

$$p_n \geq \epsilon \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

heißt P positiv.
Falls $-P$ positiv ist, heißt P negativ.
Wenn $Q - P$ positiv ist, schreiben wir: $P \prec Q$.
Für jede Cauchy Folge $(p_n)_n$ gilt entweder $(p_n)_n$ ist eine Nullfolge, oder es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $p_n \geq \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, oder es gibt ein $\epsilon < 0$ mit $p_n \leq \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(2.4) Satz (Ordnung)
$\prec$ ist eine Ordnung auf $\hat{\mathbb{Q}}$ und diese ist konsistent mit der gewöhnlichen Ordnung auf $\mathbb{Q}$ in dem Sinne, dass für $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$p < q \Leftrightarrow \overline{p} \prec \overline{q}.$$

◇

Beweis
Damit $\prec$ eine wohldefinierte Ordnung ist, müssen wir Transitivität, Reflexivität und Antisymmetrie zeigen.

Transitivität:

Sei $P \prec Q$ und $Q \prec R$. Dann gibt es ein ϵ, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$q_n - p_n > \frac{\epsilon}{2} \text{ und } r_n - q_n > \frac{\epsilon}{2}$$

Durch Umformen erhält man:

$$q_n > p_n + \frac{\epsilon}{2} \text{ und } r_n > q_n + \frac{\epsilon}{2}$$

Daraus folgt aber dann

$$r_n > q_n + \frac{\epsilon}{2} > p_n + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

und damit

$$r_n - p_n > \epsilon$$

also $P \prec R$. Somit ist $\prec$ transitiv.

Reflexivität:

$\prec$ ist irreflexiv, da $P \prec P$ implizieren würde, dass

$$p_n - p_n = 0 > \epsilon > 0$$

Deshalb gilt $P \not\prec P$ für alle $P \in \hat{\mathbb{Q}}$.

Antisymmetrie:

Sei ohne Einschränkung $P \prec Q$. Damit gilt für ein $\epsilon > 0$ und fast alle $n \in \mathbb{N}$:

$$q_n - p_n > \epsilon$$

Dann kann aber nicht gleichzeitig

$$p_n - q_n > \epsilon$$

gelten, also $Q \not\prec P$. Somit ist $\prec$ antisymmetrisch.

Konsistens der Ordnung:

Sei $\epsilon > 0$. Es gilt für alle $p, q \in \mathbb{Q}$:

$$p < q \Leftrightarrow q - p \geq \epsilon \Leftrightarrow \overline{q} - \overline{p} \geq \epsilon \Leftrightarrow \overline{p} \prec \overline{q}.$$

$\square$

Damit ist gezeigt, dass die Ordnung $\prec$ auf $\hat{\mathbb{Q}}$ verträglich ist mit der Ordnung $<$ auf $\mathbb{Q}$. Somit kann $\mathbb{Q}$ als Teilraum von $\hat{\mathbb{Q}}$ aufgefasst werden.

(2.5) Lemma
$\mathbb{Q}$ ist ein Teilraum von $\hat{\mathbb{Q}}$. $\diamond$

Beweis
Definiere zu allen Elementen $p \in \mathbb{Q}$ die zugehörige konstante Folge $(p, p, p, ...) = (p)_n$. Ihr Repräsentant $\overline{p}$ liegt dann in $\hat{\mathbb{Q}}$. Nach Satz (2.2) übertragen sich dann alle Rechenregeln und $\mathbb{Q}$ ist somit ein Teilraum von $\hat{\mathbb{Q}}$. $\square$

(2.6) Satz
Seien $P = [(p_n)_n] \in \hat{\mathbb{Q}}$ und $Q = [(q_n)_n] \in \hat{\mathbb{Q}}$. Dann gilt:

$$P \prec Q \Leftrightarrow \exists\, \epsilon > 0 \text{ und } N \in \mathbb{N} \text{ so, dass für alle } m, n \geq N \text{ gilt: } p_m + \epsilon < q_n$$

$\diamond$

Beweis
Sei $P \prec Q$. Also ist $Q - P$ positiv. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass gilt:

$$q_n - p_n \geq \epsilon \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit auch

$$q_n \geq p_n + \epsilon \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $(p_n)_n$ und $(q_n)_n$ Cauchy Folgen sind, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass gilt:

$$|q_n - q_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Damit gilt

$$q_n - q_m > -\frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Insbesondere gibt es ein $\delta := \frac{\epsilon}{2}$ so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$q_n - p_m = q_n - q_m + q_m - p_m > q_n - q_m + \epsilon > \frac{\epsilon}{2} = \delta.$$

Damit gilt aber auch

$$q_n > p_m + \epsilon$$

für alle $n, m \geq N$. Die Umkehrung gilt auch, da für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$q_n > p_n + \epsilon$$

Daraus folgt

$$q_n - p_n > \epsilon$$

und damit direkt, dass $Q - P$ positiv ist und somit $P \prec Q$. $\square$

(2.7) Satz (Cauchy-Vervollständigung $\hat{\mathbb{Q}}$ aus $\mathbb{Q}$)
$\hat{\mathbb{Q}}$ ist dann die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ und damit ein vollständiger metrischer Raum, der $\mathbb{Q}$ enthält und mit dessen Metrik konsistent ist. $\diamond$

Beweis
Sei $\mathcal{P} \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\hat{\mathbb{Q}}$, die nach oben beschränkt ist.
Wir behaupten, dass das Supremum von $\mathcal{P}$ die Äquivalenzklasse Q der Cauchyfolge $(q_0, q_1, q_2, ...)$ ist, die definiert ist durch:

- q_0 ist die kleinste ganze Zahl, so dass $\overline{q}_0$ obere Schranke von $\mathcal{P}$ ist.
- q_1 ist der kleinste Bruch mit Nenner 2^1, so dass $\overline{q}_1$ obere Schranke von $\mathcal{P}$ ist.
- ...
- q_n ist der kleinste Bruch mit Nenner 2^n, so dass $\overline{q}_n$ obere Schranke von $\mathcal{P}$ ist.

Wähle hierzu ein $P^* = [(p_n^*)] \in \mathcal{P}$, dies ist möglich, da $\mathcal{P} \neq \emptyset$.
Da $(p_n^*)_n$ eine Cauchy Folge ist, gibt es ein $N^* \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|p_m^* - p_n^*| < 1$$

für alle $m, n \geq N^*$ Damit gilt auch für alle $n \geq N^*$

$$|p_{N^*}^* - p_n^*| < 1$$

Also auch

$$p_{N^*}^* - p_n^* < 1$$

Insbesondere gilt für alle $n \geq N^*$

$$p_{N^*}^* - 1 < p_n^*$$

Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $n \geq N^*$ gilt:

$$p_{N^*}^* - 1 + \epsilon \leq p_n^*$$

Aus der Definition der Ordnung $\prec$ auf $\hat{\mathbb{Q}}$ folgt dann

$$[(p_{N^*}^* - 1, p_{N^*}^* - 1, p_{N^*}^* - 1, ...)] \preceq [(p_n^*)_n]$$

Daraus folgt:

$$\overline{p^*_{N^*} - 1} \prec P^*.$$

Damit kann eine ganze Zahl z mit $z < p^*_{N^*} - 1$ keine obere Schranke von P sein. Deshalb ist q_0 wohldefiniert. Damit sind die Anderen q_i auch wohldefiniert und bilden eine monoton fallende Folge
$q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_n \geq ...$
in $\mathbb{Q}$.

Nach Konstruktion gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|q_n - q_{n-1}| \leq (\frac{1}{2})^n$$

Für $m < n$ gilt:

$$0 \leq q_m - q_n = q_m - q_{m+1} + q_{m+1} - q_{m+2} + ... + q_{n-1} - q_n \leq (\frac{1}{2})^{m+1} + (\frac{1}{2})^{m+2} + ... + (\frac{1}{2})^n < (\frac{1}{2})^m$$

Damit ist $(q_n)_n$ eine Cauchyfolge und $Q = [(q_n)_n] \in \hat{\mathbb{Q}}$

Angenommen, Q ist nicht die obere Schranke von $\mathcal{P}$.
Dann gibt es ein $P = [(p_n)_n] \in \mathcal{P}$, so dass gilt: $Q \prec P$
Nach Satz (2.6) gibt es ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$q_N + \epsilon < p_n.$$

Denn mit $Q \prec P$ und der monoton fallenden Folge der q_i gilt:

$$q_N + \epsilon \leq q_0 + \epsilon \leq p_0.$$

Daraus folgt: $\overline{q_N} \prec P$.
Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\overline{q_N}$ nach Konstruktion obere Schranke von $\mathcal{P}$ ist.

Sei $R := [(r_n)_n] \prec Q$ eine kleinere obere Schranke von $\mathcal{P}$.
Nach Satz (2.6) gibt es ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt:
$r_m + \epsilon < q_n$

Sei $k \geq N$ mit $(\frac{1}{2})^k < \epsilon$, dann gilt für alle $m \geq N$:

$r_m < q_k - \epsilon < q_k - (\frac{1}{2})^k$.

Nach Satz (2.6) gilt $R \prec \overline{q_k - (\frac{1}{2})^k}$.

Dies führt aber zu einem Widerspruch, da R eine obere Schranke für $\mathcal{P}$ ist, $\overline{q_k}$ aber nach Konstruktion der kleinste Bruch mit Nenner 2^k war, der noch eine obere Schranke für $\mathcal{P}$ ist.

Damit ist Q die kleinste, obere Schranke, also das Supremum von $\mathcal{P}$. □

Daraus folgt, dass die Cauchy-Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ein vollständiger, angeordneter Körper ist.

(2.8) Satz (Cauchy-Vervollständigung $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$)
Aus der Eindeutigkeit nach §1 folgt die Isomorphie zum vollständigen, angeordneten Körper $\mathbb{R}$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Der metrische Raum $\mathbb{Q}$ wird durch $\mathbb{R}$ vervollständigt. ◇