Kompaktheit und gleichgradige Stetigkeit

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 14.06.2010

Manon Wieschermann
Matthias Klupsch

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Kompaktheit von Teilräumen vom Raum der stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N), den wir mit $\mathcal{C}^0(M, N)$ bezeichnen. Hierbei werden meistens $M = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $N = \mathbb{R}$ und d_M, d_N die jeweils durch den Betrag induzierte Metriken sein. Deshalb werden wir kurz $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ schreiben. Es soll die Frage geklärt werden, welche Teilmengen von $\mathcal{C}^0$ kompakt sind und wann Funktionenfolgen in $\mathcal{C}^0$ Häufungspunkte besitzen.

§1 Einführung in die Kompaktheit in $\mathcal{C}^0$

In diesem Abschnitt zeigen wir, warum der Raum der stetigen Funktionen bei der Betrachtung von Kompaktheit Probleme bereiten kann. Zuvor noch eine

(1.1) Bemerkung (Norm und Metrik)
Auf $\mathcal{C}^0$ lässt sich die folgende Norm definieren:

$$\|f\| = \sup\{\ |f(x)|\ \mid\ x \in [a, b]\ \}.$$

Die dadurch auf $\mathcal{C}^0$ induzierte Metrik ist gegeben durch

$$d(f, g) := \sup\{\ |f(x) - g(x)|\ \mid\ x \in [a, b]\ \}.$$

Bezüglich dieser Metrik ist $\mathcal{C}^0$ vollständig, das heißt, dass alle Cauchy-Folgen in $\mathcal{C}^0$ konvergieren.
Im Folgenden werden nur diese Norm und diese Metrik auf $\mathcal{C}^0$ verwendet. $\diamond$

— *Einführendes Beispiel* —

Zunächst erinnern wir an den

(1.2) Satz (von Heine-Borel)

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist kompakt.

b) A ist abgeschlossen und beschränkt. $\diamond$

Dabei gilt die Folgerung "a) $\Rightarrow$ b)" sogar für beliebige metrische Räume, die Umkehrung muss allerdings nicht immer zutreffen, wie wir noch sehen werden.
Nach Heine-Borel sind abgeschlossene und beschränkte Räume im $\mathbb{R}^m$ also stets kompakt. Im $\mathcal{C}^0$ gilt das in dieser Form nicht.

(1.3) Lemma

Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathcal{B} = \{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1 \}$ ist abgeschlossen und beschränkt, aber keine kompakte Teilmenge von $\mathcal{C}^0$. $\diamond$

Beweis

Zunächst zeigen wir die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $\mathcal{B}$.
Abgeschlossenheit: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{B}$ mit Grenzwert f.
Da $\|f_n\| \leq 1$ und die Norm stetig ist, folgt

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|,$$

also liegt f in $\mathcal{B}$. Somit ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen.
Beschränktheit: Betrachte $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Dann ist $\mathcal{B} \subset \{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\| < 2 \} = U_2(g)$, wobei $U_2(g)$ die 2-Umgebung um g bezeichnet. Damit ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen als Teilmenge einer ε-Umgebung.
$\mathcal{B}$ ist aber nicht kompakt: Die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge in $\mathcal{B}$, sie besitzt aber keine konvergente Teilfolge. Angenommen sie würde eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ haben und ihr Grenzwert sei f. Dann wäre

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Aber f ist nicht stetig und damit liegt der Grenzwert f von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathcal{C}^0$. $\square$

Der Grund für die Problematik ist, dass der Raum $\mathcal{C}^0$ unendlich-dimensional ist. Im Folgenden werden wir erläutern, unter welchen zusätzlichen Bedingungen eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathcal{C}^0$ kompakt ist.
Es folgt ein kleiner Hilfssatz, den wir später benötigen werden.

(1.4) Lemma
Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ kompakt. Dann gilt:

a) A besitzt eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge.

b) Sei D dicht in A. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge D_δ von D, sodass es zu jedem $a \in A$ ein $x \in D_\delta$ gibt mit $d(x,a) < \delta$. $\diamond$

Beweis

a) Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere $\mathcal{U}_{\frac{1}{n}} = \{ U_{\frac{1}{n}}(a) \mid a \in A \}$. Offensichtlich handelt es sich bei $\mathcal{U}_{\frac{1}{n}}$ um eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ welche weiterhin A überdeckt. Zu jedem $U \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ wähle ein $a_U \in A$ mit $U = U_{\frac{1}{n}}(a_U)$. Definiere dann für $n \in \mathbb{N}$

$$D_{\frac{1}{n}} = \{ a_U \mid U \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \}.$$

Nun gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ ein $x \in D_{\frac{1}{n}}$ mit $d(x,a) < \frac{1}{n}$. Dann ist

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$$

als abzählbare Vereinigungen endlicher Mengen abzählbar und damit eine abzählbare Teilmenge von A.
Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in D_{\frac{1}{n}}$ mit $d(a,a_n) < \frac{1}{n}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann ist $d(a,a_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a. Da a beliebig war, ist jedes $a \in A$ Häufungspunkt von D und damit $\overline{D} = A$.

b) Zu $\delta > 0$ definiere $\mathcal{U}_\delta := \{ U_\delta(y) \mid y \in D \}$. Da D dicht in A liegt, gibt es zu jedem $a \in A$ ein $y \in D$ mit $a \in U_\delta(y)$, also ist $\mathcal{U}_\delta$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{I}_\delta = \{U_1, \ldots, U_n\}$ von $\mathcal{U}_\delta$ mit $n \in \mathbb{N}$, welche weiterhin A überdeckt. Zu jedem $1 \leq k \leq n$ wähle ein $y_k \in D$ mit $U_k = U_\delta(y_k)$, dann ist die gesuchte Menge gegeben durch

$$D_\delta := \{ y_k \mid 1 \leq k \leq n \}.$$

Da jede kompakte Menge dicht in sich selbst liegt, kann (1.4) b) auch ohne explizite Nennung einer dichten Teilmenge verwendet werden.

— Gleichgradige Stetigkeit —

Nun wollen wir die für diesen Vortrag entscheidene Definition angeben:

(1.5) Definition (Gleichgradige Stetigkeit)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$.

i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in M$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [a, b]$ mit $d(x, t) < \delta$ folgt:
$$|f_n(x) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in M$ mit $d(s, t) < \delta$ folgt:
$$|f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon.$$
Dabei ist zu beachten, dass δ nur von ε und nicht von n abhängen darf. Gleichmäßig gleichgradige Stetigkeit werden wir im Folgenden als gleichgradige Stetigkeit bezeichnen.

Diese Definition lässt sich leicht auf Mengen von Funktionen erweitern.
Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ eine Menge von Funktionen. Dann heißt $\mathcal{E}$ *gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $f \in \mathcal{E}$ und alle $s, t \in M$ mit $d(s, t) < \delta$ folgt:
$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$
Dabei hängt δ nicht von einem speziellen f ab. ◇

(1.6) Beispiele

1. Ist die Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0$ endlich, so ist sie gleichgradig stetig.
2. Die Folge $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist nicht gleichgradig stetig.

zu 1. Sei $\mathcal{E} = \{ f_1, f_2, \cdots, f_n \}$, dann ist f_k für jedes $k \leq n$ stetig und wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig. Für jedes $k \leq n$ und $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta_k > 0$, sodass für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta_k$ gilt:
$$|f_k(s) - f_k(t)| < \varepsilon.$$
Definiere $\delta = \min\{ \delta_k \mid k \leq n \}$, dann gilt für alle $k \leq n$ und alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$:
$$|f_k(s) - f_k(t)| < \varepsilon.$$
Damit ist $\mathcal{E}$ gleichgradig stetig.

zu 2. Sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{\pi}{2n} < \delta$, dann ist

$$\left| f_n(0) - f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right| = \left| \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 1.$$

Hervorzuheben bei diesem Beispiel ist die Tatsache, dass alle f_n gleichmäßig stetig (da stetig auf dem kompaktem Definitionsbereich) und zusätzlich auch noch beschränkt sind (da $|cos(nx)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$), trotzdem aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig stetig ist. ◇

§2 Der Satz von Heine-Borel für $\mathcal{C}^0$

Jetzt wollen wir beginnen, die Kompaktheit von Mengen von Funktionen im $\mathcal{C}^0$ zu analysieren.

— *Der Satz von Arzela-Ascoli* —

Zunächst wenden wir uns einem grundlegenden Satz über gleichgradige Stetigkeit zu. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen gleichgradiger Stetigkeit und gleichmäßiger Konvergenz.

(2.1) Satz (Satz von Arzela-Ascoli)
Jede beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen in $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. ◇

Beweis
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen in $\mathcal{C}^0$.
Sei $D := \{d_1, d_2, \dots\}$ eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $[a,b]$. Diese existiert nach 1.4 a), möglich wäre zum Beispiel $D = \mathbb{Q} \cap [a,b]$.
Dann ist $(f_n(d_1))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge, die in $\mathbb{R}$ konvergiert, also $f_{1,k}(d_1) \to y_1$ für $k \to \infty$.
Dann ist wieder $(f_{1,k}(d_2))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, die ebenfalls eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(f_{2,k}(d_2))_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, also $f_{2,k}(d_2) \to y_2$ für $k \to \infty$.
Wenn man dies induktiv weiterführt, erhält man:

$$(f_{m,k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Teilfolge von } (f_{m-1,k})_{k\in\mathbb{N}}$$
$$\text{und für alle } j \leq m \text{ folgt } f_{m,k}(d_j) \to y_j \text{ für } k \to \infty.$$

Wähle $k(1)$ so, dass für alle $k \geq k(1)$ gilt:

$$|f_{1,k}(d_1) - y_1| < 1$$

Sind $k(1), \ldots, k(m-1)$ schon konstruiert so wähle $k(m) > k(m-1)$, sodass für alle $k \geq k(m)$ und $j \leq m$ gilt:

$$|f_{m,k}(d_j) - y_j| < \frac{1}{m}$$

Betrachte dann die Diagonalfolge $g_m(x) := f_{m,k(m)}(x)$ für $x \in D$. Diese konvergiert für alle $x \in D$.
Wir behaupten, dass $g_m(x)$ für jedes $x \in [a,b]$ konvergiert und dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist.
Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{C}^0$ bzgl. der Supremumsnorm reicht es zu zeigen, dass $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $s, t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$, folgt:

$$|g_m(s) - g_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Da $[a,b]$ kompakt und D dicht ist, ist es nach (1.4) b) möglich, ein $J > 0$ zu finden, sodass jedes $x \in [a,b]$ in einer δ-Umgebung von d_j mit $j \leq J$ liegt.
Da $\{d_1, \ldots, d_J\}$ endlich ist und $g_m(d_j)$ für jedes d_j konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $l, m \geq N$ und alle $j \leq J$ gilt

$$|g_m(d_j) - g_l(d_j)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Für $l, m \geq N$ und $x \in [a,b]$ wähle d_j mit $j \leq J$ und $|d_j - x| < \delta$. Dann folgt mit (1) und (2) und der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_l(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(d_j)| + |g_m(d_j) - g_l(d_j)| + |g_l(d_j) - g_l(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}^0$, die aufgrund der Vollständigkeit von $\mathcal{C}^0$ auch in $\mathcal{C}^0$ konvergiert. □

Dieser Beweis führt uns zu einem weiteren Resultat:

(2.2) Satz (Fortssetzungssatz von Arzela-Ascoli)
Konvergiert eine gleichgradig stetige Folge von Funktionen im $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ punktweise auf einer dichten Teilmenge des Definitionsbereiches, so konvergiert die Folge auf dem gesamten Definitionsbereich gleichmäßig. ◇

Beweis
Dies entspricht in (2.1) dem Beweisteil, in dem gezeigt wurde, dass $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. □

Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt zudem noch folgendes

(2.3) Korollar
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, deren Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind.
Wenn es ein x_0 gibt, sodass $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, so hat die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert. ◇

Beweis
Sei $M > 0$ eine obere Schranke, sodass $|f_n'(x)| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a,b]$ gilt.
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach dem Mittelwertsatz gleichgradig stetig,
denn für $|s-t| < \delta$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$|f_n(s) - f_n(t)| = |f_n'(\theta)||s-t| \leq M\delta$$

für ein θ zwischen s und t.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$ und man erhält, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s,t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$ gilt:

$$|f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_0 \in [a,b]$, sodass $|f_n(x_0)| \leq C$ für ein $C > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung für $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| \\ &\leq M|x - x_0| + C \\ &\leq M|b-a| + C.\end{aligned}$$

Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt im $\mathcal{C}^0$. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. □

— *Heine-Borel für Funktionenräume* —

Der nächste Satz stellt nun den Zusammenhang zur Kompaktheit her und ist eigentlich eine topologische Version des Satzes von Arzela-Ascoli:

(2.4) Satz (Satz von Heine-Borel für Funktionenräume)
Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig ist. $\diamond$

Beweis

"$\Rightarrow$": Angenommen $\mathcal{E}$ sei kompakt.
Dann ist $\mathcal{E}$ nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ gleichgradig stetig ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{E}$ kompakt ist gibt es wegen (1.4) b) eine endliche Menge $M = \{ f_1, \dots, f_n \} \subset \mathcal{E}$, sodass zu jedem $f \in \mathcal{E}$ ein k , $1 \leq k \leq n$, existiert, sodass $f \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_k)$. Da die Menge M endlich ist, ist sie gleichgradig stetig (vgl. Beispiel 1.6 a)). Es gibt also ein $\delta > 0$ sodass aus $|x - y| < \delta$ für alle $1 \leq k \leq n$ stets $|f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Sei nun $f \in \mathcal{E}$ beliebig.
Es gibt ein k, sodass $d(f, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}$, daher gilt für $|x - y| < \delta$ mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{E}$ gleichgradig stetig.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{E}$ andererseits abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig.
Wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ ist, dann existiert nach Arzela-Ascoli eine konvergente Teilfolge, die gleichmäßig konvergiert. Da $\mathcal{E}$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in $\mathcal{E}$. Also ist $\mathcal{E}$ kompakt. $\square$

§3 Fazit

Damit ist jetzt klar, wie man den Satz von Heine-Borel auf Funktionenräume erweitern kann. Zusätzlich zu den Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt muss man noch gleichgradige Stetigkeit prüfen. Dann kann man auf Kompaktheit des Raumes schließen. Obwohl in den Beweisen stets von $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ ausgegangen wurde, gelten die Resultate, insbesondere der Satz von Arzela-Ascoli auf Grund von (1.4) a), für alle Funktionenräume $\mathcal{C}^0(M,\mathbb{R})$, solange M kompakt ist.