Der Satz von Stone-Weierstraß

Vortrag zum Proseminar Analysis, 28.06.2010

Valentina Gerber, Sabrina Kielmann

Aus der Vorlesung Analysis I und II kennen wir das Konzept des Approximierens. Uns wurden die Begriffe Taylor- und Bernsteinpolynome vorgestellt, die uns den Umgang mit reellen und komplexen Funktionen erleichtern.

Nun wollen wir dieses Konzept vertiefen. Wir schauen uns zuerst den Satz von Weierstraß an und gehen dann eine Stufe tiefer durch den Stone-Weierstraß,der Approximationen auf dem metrischen Raum ermöglicht. Um dies erfolgreich durchführen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Funktionenalgebra definieren und uns näher mit seinen Eigenschaften beschäftigen. Durch sorgfältige Vorarbeit können wir dann den Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß führen und schließen ab, indem wir den Satz direkt anwenden.

Inhaltsverzeichnis

§1 Approximationssatz von Weierstraß

In diesem Abschnitt wollen wir sämtliche Vorarbeit leisten um später leichter den Satz von Stone-Weierstraß beweisen zu können.

— *Funktionenalgebra* —

Zunächst müssen wir den Begriff Funktionenalgebra und die Eigenschaften dieser einführen.

(1.1) Definition (Funktionenalgebra)
Sei M ein kompakter metrischer Raum und $C^0(M, \mathbb{R})$ beziehungsweise $C^0(M)$ der vollständige reelle Raum der über M stetigen reellwertigen Funktionen. Wir bezeichnen $A \subseteq C^0(M)$ als *Funktionenalgebra*, wenn A bezüglich Addition, skalarer Multiplikation und der Multiplikation von Funktionen abgeschlossen ist, das heißt seien $f, g \in A$ und c eine reele Konstante, dann gilt:

$$f + g \in A,$$
$$cf \in A,$$
$$f \cdot g \in A.$$

Ein einfaches Beispiel ist das Folgende.

(1.2) Beispiel
Die Menge der Polynome ist eine Funktionenalgebra.
Denn wie wir aus der Analysis wissen, sind die Polynome sowohl bezüglich Addition als auch bezüglich Multiplikation und der skalaren Multiplikation abgeschlossen. ◇

Eine Funktionenalgebra kann noch zwei weitere Eigenschaften haben, welche uns später das Rechnen in metrischen Räumen erleichtern werden. Diese werden wir nun definieren.

(1.3) Definition
Sei $A \subseteq C^0(M)$ eine Funktionenalgebra.

(i) Eine Funktionenalgebra **verschwindet in einem Punkt** $p \in M$, wenn $f(p) = 0$ für alle $f \in A$ gilt.

(ii) Eine Funktionenalgebra A heißt **punktetrennend**, wenn zu jedem Paar $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$, ein $f \in A$ existiert mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. ◇

Auch für diese Eigenschaften gibt es ein anschauliches Beispiel.

(1.4) Beispiel
Die Funktionenalgebra der Polynome mit 0 als konstanten Term verschwindet im Punkt $x = 0$. ◇

— *Approximationssatz von Weierstraß* —

Es sei eine stetige, nicht differenzierbare Funktion gegeben. Um mit dieser Funktion besser arbeiten zu können, wollen wir diese Funktion leicht verändern und sie in eine Funktion überführen, mit der wir schon viel Erfahrung haben und die viele „nette“, uns bekannte Eigenschaften besitzt. Die wohl bekannteste und umgänglichste Funktion ist das Polynom. Deshalb werden wir versuchen Elemente aus der Menge der stetigen Funktionen durch Polynome zu approximieren.

Da wir für den Beweis des Approximationssatzes Bernsteinpolynome brauchen, werden wir uns vorab mit den besonderen Eigenschaften folgender Funktion:

$$r_k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ k, n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

beschäftigen.

(1.5) Bemerkungen
Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} r_k(x) = 1,$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$ ◇

Beweis
a) Betrachten wir die uns schon bekannte Binomische Formel mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

Ersetzt man nun y durch $1-x$, erhält man $\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$.

b) Nun betrachten wir die erste und zweite Ableitung der Binomischen Formel nach x und erhalten:

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k} \ ,$$
$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k} \ .$$

Ersetzt man nun wieder y durch $1-x$ und multipliziert die erste Ableitung mit x und die zweite mit x^2, erhält man:

$$nx = x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) \ ,$$
$$n(n-1)x^2 = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x) \ .$$

Nun kann man die Summe der zweiten Ableitung auch schreiben als

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) - \sum_{k=0}^{n} k r_k(x).$$

Verschmilzt man nun die Erkenntnisse aus der ersten und zweiten Ableitung ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) = n(n-1)x^2 + \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) = n(n-1)x^2 + nx \ .$$

Verwendet man nun dazu a) erhält man:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 r_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) - 2nx \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) + (nx)^2 \sum_{k=0}^{n} r_k(x) \\
&= n(n-1)x^2 + nx - 2(nx)^2 + (nx)^2 \\
&= -nx^2 + nx = nx(1-x).
\end{aligned}$$

□

Nun sind wir soweit den Approximationssatz von Weierstraß zu formulieren und zu beweisen. Dieser legt den Grundstein für den Satz von Stone-Weierstraß. Der Letztere ist zwar eine Verallgemeinerung des Approximationssatzes, kann ohne diesen jedoch nicht bewiesen werden.

(1.6) Satz (Approximationssatz)
Die Menge der Polynome ist dicht in $C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, das heißt für jedes $f \in C^0[a,b]$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p , so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \,. \qquad \diamond$$

Beweis
Ohne Einschränkungen der Allgemeinheit untersuchen wir statt dem Intervall $[a,b]$ das Intervall $[0,1]$. Da das Intervall abgeschlossen ist, gilt weiterhin die gleichmäßige Stetigkeit, welche wir für den Beweis brauchen. Außerdem wissen wir, dass eine Folge stetiger Funktionen auf einem kompaktem Intervall gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Auch das Maximum der Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ lässt sich bestimmen, weil es ein abgeschlossenes Intervall ist.

Zu der stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}, x \in [0,1] \,,$$

welche uns schon aus der Vorlesung Analysis II, VII (3.8) als Bernsteinpolynom bekannt ist. Wir überprüfen nun die Tatsache, dass die Folge der Bernsteinpolynome $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \to \infty$ auf $[0,1]$.

Nun greifen wir auf die Funktion und die Eigenschaften aus Bemerkung (1.5), die wir so eben bewiesen haben, zurück. Da wir in diesem Beweis nur $x \in [0,1]$ betrachten, sind die hier verwendeten r_k immer positiv.
So erhalten wir :

$$p_n(x) \overset{\text{Def } r_k}{=} \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) r_k(x),$$
$$f(x) \overset{(1.5)\text{a)}}{=} \sum_{k=0}^{n} f(x) r_k(x).$$

Daraus können wir folgern, dass

$$p_n - f = \sum_{k=0}^{n} (f(\frac{k}{n}) - f)r_k.$$

Fehlt also nur noch zu zeigen, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} (f(\frac{k}{n}) - f)r_k$ kleiner ist als ε. Dazu spalten wir die Summe in zwei Teile auf. Im ersten Teil untersuchen wir die Elemente, für die $\frac{k}{n}$ in der Nähe von x liegt, und im zweiten Teil Elemente, für die $\frac{k}{n}$ weiter weg von x liegt.
Das Ganze lässt sich auch formal aufschreiben: Wir nutzen die gleichmäßige Konvergenz der Funktion f auf dem geschlossenen Intervall $[0, 1]$ aus, um zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, so dass gilt:

$$|f(i) - f(j)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } |i - j| < \delta.$$

Dafür konstruieren wir zwei Mengen, so dass sie diese beiden Eigenschaften haben:

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N}_0 : |\tfrac{k}{n} - x| < \delta\} \text{ und } K_2 = \mathbb{N}_0 \setminus K_1 \, .$$

Nun können wir die Summe aufspalten:

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)|r_k(x) \\ &= \sum_{k \in K_1} |f(\frac{k}{n}) - f(x)|r_k(x) + \sum_{k \in K_2} |f(\frac{k}{n}) - f(x)|r_k(x) \end{aligned}$$

und abschätzen.
Die Faktoren $|f(\frac{k}{n}) - f(x)|$ aus der ersten Summe lassen sich durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abschätzen, aufgrund der Konstruktion der Menge K_1, in der $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ gilt. Da $\sum\limits_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$ immer noch gilt, ist die erste Summe kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Um die zweite Summe abzuschätzen benutzen wir (1.5)b) und folgern:

$$\begin{aligned} nx(1 - x) &= \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) \\ &\geq \sum_{k \in K_2} (k - nx)^2 r_k(x) \\ &\geq \sum_{k \in K_2} (n\delta)^2 r_k(x). \end{aligned}$$

Da max $x(1-x) = \frac{1}{4}$ für alle x aus dem Intervall $[0,1]$ gilt, können wir die folgende Abschätzung machen:

$$\sum_{k \in K_2} r_k(x) \leq \frac{nx(1-x)}{(n\delta)^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Durch die Norm $M := ||f||$ können wir die Faktoren $|f(\frac{k}{n}) - f(x)|$ aus der zweiten Summe durch $2M$ abschätzen und wissen, dass es für alle $x \in [0,1]$ ein $N_0(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $n > N_0(\varepsilon)$ gilt :

$$\sum_{k \in K_2} |f(\tfrac{k}{n}) - f(x)| r_k(x) \leq \frac{M}{2n\delta^2} < \frac{M}{2N_0\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

also für $N_0 \geq \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$.
Da wir nun beide Summen erfolgreich abgeschätzt haben, können wir nun folgern, dass für $n \to \infty$ und für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Nun können wir nachvollziehen, wie wir eine Funktion durch Polynome approximieren können. Auch ist uns nun das Zustandekommen der Polynome bekannt, auf die später im Stone-Weierstraß zurückgegriffen wird.

— *Hilfsaussagen* —

Der Satz von Stone-Weierstraß ist sehr umfangreich, so dass einige Hilfsaussagen ausgelagert werden um später im Beweis mehr Übersicht zu haben.

(1.7) Lemma
Sei $A \subseteq C^0(M, \mathbb{R})$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Funktionenalgebra, weiter seien die voneinander verschiedenen Punkte p_1 und p_2 und die Konstanten c_1 und c_2 in $\mathbb{R}$ gegeben, dann existiert eine Funktion $f \in A$ mit $f(p_1) = c_1$ und $f(p_2) = c_2$. $\diamond$

Beweis
Wähle g_1,$g_2 \in A$ so, dass $g_1(p_1) \neq 0 \neq g_2(p_2)$. Dann gehört $g = g_1^2 + g_2^2 \in A$ und $g(p_1) \neq 0 \neq g(p_2)$. Wähle $h \in A$ so, dass h die Punkte p_1 und p_2 trennt und betrachte die Matrix

$$H := \begin{bmatrix} a & ab \\ c & cd \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} g(p_1) & g(p_1)h(p_1) \\ g(p_2) & g(p_2)h(p_2) \end{bmatrix}.$$

Nach Konstruktion sind $a, c \neq 0$ und $b \neq d$. Da die Determinante von H

$$\det(H) = acd - abc = ac(d - b) \neq 0$$

ist, hat H den Rang 2 und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\xi + ab\eta &= c_1 \\ c\xi + cd\eta &= c_2 \end{aligned}$$

hat eine Lösung (ξ,η). Denn aus Lineare Algebra wissen wir, dass ein Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix eine Determinate ungleich 0 hat, eindeutig lösbar ist.
Dann ist $f = \xi g + \eta gh \in A$ und $f(p_1) = c_1$, $f(p_2) = c_2$. □

(1.8) Lemma
Der Abschluss einer Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$ ist wieder eine Funktionenalgebra. ◇

Beweis
Sei A eine Funktionenalgebra in $C^0(M)$ und $g \in \overline{A}$.
Das bedeutet,dass $g \in \{f \in C^0(M) | f$ ist Berührungspunkt von $A\}$. Es ist offensichtlich, dass alle $f \in A$ bezüglich Addition, Multiplikation und skalarer Multiplikation abgeschlossen sind. Nun müssen wir noch $f \notin A$ betrachten. Aus Analysis II (VII (2.4)) wissen wir, dass eine Folge stetiger Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Auch diese Funktionen sind bezüglich Addition, Multiplikation und skalarer Multiplikation abgeschlossen.

(1.9) Hilfssatz
Sei A eine Funktionenalgebra, dann ist $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$. ◇

Beweis
„$\supset$“
Sei $f \in \overline{\overline{A}}$
Dies bedeutet, dass $f \in \{v \in C^0(M, \mathbb{R}) | v \in \overline{A}$ oder v ist Häufungspunkt von $\overline{A}\}$.
Daraus folgt, dass $\overline{A} \cap U_\lambda(f)$ ungleich der leeren Menge ist.
Das heißt es existiert ein $g \in \overline{A} \cap U_\lambda(f)$, insbesondere ist $g \in \overline{A}$. Wenn g in $\overline{A}$ liegt,

ist es entweder Element oder Häufungspunkt von A.
Das heißt es existiert ein h in $A \cap U_{\lambda - d(f,g)}(g)$. Da die Umgebung $U_{\lambda - d(f,g)}(g)$ um y eine Teilmenge der Umgebung $U_\lambda(f)$ von f ist, liegt h insbesondere in $A \cap U_\lambda(f)$.
Das heißt $A \cap U_\lambda(f)$ ist nicht leer, also liegt f im Abschluss von A.
„$\subset$"
Sei $f \in \overline{A}$, dann liegt f auch im Abschluss von $\overline{A}$, also $f \in \overline{\overline{A}}$.
Damit haben wir gezeigt, dass $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$. □

Mit Hilfe dessen wir das folgende Lemma beweisen.

(1.10) Lemma
Sei A eine eine Funktionenalgebra in $C^0(M)$, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Sei $f \in \overline{A}$, dann ist auch $|f| \in \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ der Abschluss von A in $\mathrm{C}^0(M)$ ist. ◇

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz, existiert ein Polynom p, so dass $\sup\{|p(y) - |y|| : |y| \leq ||f||\} < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$
$|y|$ ist eine stetige Funktion, welche auf dem Intervall $[-||f||, ||f||]$ definiert ist. Der konstante Term von p ist kleiner gleich $\frac{\varepsilon}{2}$, da $|p(0) - |0|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $q(y) = p(y) - p(0)$.
Dann ist q ein Polynom dessen konstanter Term Null ist und $(*)$ wird zu
$|q(y) - |y|| < \varepsilon$
Setze $q(y) = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n$ und $g = a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$.
Da (1.8) besagt, dass $\overline{A}$ eine Algebra ist, ist $g \in \overline{A}$. Wenn $x \in M$ ist und $y = f(x)$ ist, dann ist zudem
$|g(x) - |f(x)|| = |q(y) - |y|| < \varepsilon$.
Daher ist $|f| \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ mit Hilfssatz (1.9). □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir das Folgende zeigen.

(1.11) Lemma
Sei A eine punktetrennende Funktionenalgebra, die in keinem Punkt verschwindet und seien $f, g \in \overline{A}$. Dann sind $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ auch Funktionen in $\overline{A}$. ◇

Beweis
Sei A punktetrennende Funktionenalgebra, die in keinem Punkt verschwindet und seien $f, g \in \overline{A}$. Das Maximum und das Mininum zweier Funktionen kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\max\{f,g\} := \tfrac{f+g}{2} + \tfrac{|f-g|}{2}$$
$$\min\{f,g\} := \tfrac{f+g}{2} - \tfrac{|f-g|}{2}.$$

Dann liegen Maximum und Minimum zweier Funktionen aus $\overline{A}$ wegen der Abgeschlossenheit von Funktionenalgebren und dem Lemma (1.10) wieder in $\overline{A}$. Wiederholungen zeigen, dass das Maximum und das Minumum endlich vieler Funktionen aus $\overline{A}$ wieder in $\overline{A}$ liegen. $\square$

Da die Vorarbeiten jetzt geleistet wurden, können wir uns nun dem Beweis vom Satz von Stone-Weierstrass widmen.

§2 Der Satz von Stone-Weierstraß

In diesem Abschnitt werden wir den Satz von Stone-Weierstraß beweisen. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Approximationsatzes von Weierstraß auf Funktionenalgebren in $C^0(M, \mathbb{R})$, wobei M ein kompakter metrischer Raum ist.

(2.1) Satz (Stone-Weierstraß)
Sei A eine Funktionsalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$ wie in (1.1) definiert, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Dann liegt A dicht in $C^0(M)$:
Zu gegebenen $F \in C^0(M)$ und $\varepsilon > 0$ ist ein $G \in A$ gesucht, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$F(x) - \varepsilon < G(x) < F(x) + \varepsilon. \text{ (**)} \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $F \in C^0 M$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir versuchen nun $G \in \overline{A}$ zu finden, so dass der Graph von G im ε-Schlauch von F liegt. Wir halten zunächst alle unterschiedlichen Punkte $p, q \in M$ fest. Nach Lemma (1.7) kann man eine Funktion $H_{pq} \in A$ finden mit gegebenen Werten für p, q, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$H_{pq}(p) = F(p) \text{ und } H_{pq}(q) = F(q).$$

Nun halten wir p fest und lassen q variieren. Aus der Stetigkeit von H_{pq} folgt, dass jedes $q \in M$ eine Umgebung U_q hat, so dass aus $x \in U_q$ folgt, dass

$$F(x) - \varepsilon < H_{pq}(x)$$

ist. (1)
$H_{pq}(x) - F(x) + \varepsilon$ ist wieder eine stetige Funktion in x, welche positiv an der Stelle $x = q$ ist. H_{pq} löst lokal lokal ein Teil unseres Problems (**) (siehe Bild 1).

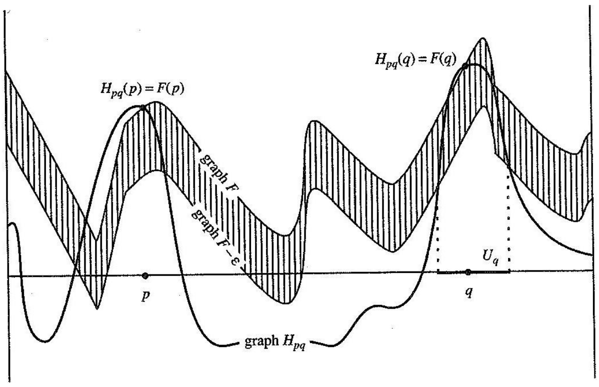

Bild 1: In einer Umgebung von q löst H_{pq} das Problem (**) im Sinne von (1)

Die Kompaktheit von M impliziert, dass nur endliche viele dieser Umgebungen U_q notwendig sind um die Menge M zu überdecken, seien diese Umgebungen $U_{q_1}, \ldots, U_{q_n}$. Definiere G_p wie folgt

$$G_p(x) = \max\{H_{pq_1}(x), \ldots, H_{pq_n}(x)\}$$

Dann ist $G_p \in \overline{A}$ nach Lemma (1.11) und

$$G_p(p) = F(p) \text{ und } F(x) - \varepsilon < G_p(x) \text{ für alle } x \in M \text{ (2).}$$

(siehe Bild 2)

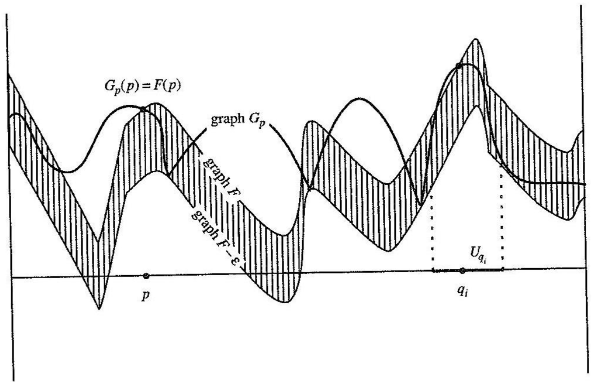

Bild 2: G_p ist das Maximum von H_{pq_i}, $i = 1, \ldots, n$.

Stetigkeit impliziert, dass jedes p eine Umgebung V_p hat, so dass aus $x \in V_p$ folgt, dass

$$G_p(x) < F(x) + \varepsilon. \text{ (3)}$$

(siehe Bild 3)

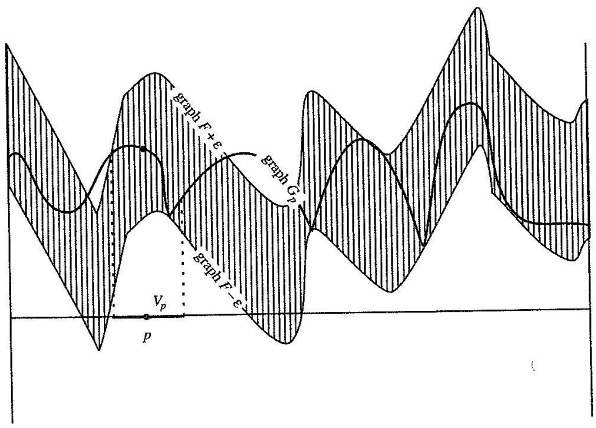

Bild 3: $G_p(p) = F(p)$ und G_p löst (**) überall

Da M kompakt ist, überdecken endliche viele dieser Umgebungen die Menge M, seien diese $V_{p_1}, \dots, V_{p_m}$ genannt. Setze

$$G(x) = \min\{G_{p_1}(x), \dots, G_{p_m}(x)\}.$$

Wir wissen nach Lemma (1.11), dass $G \in \overline{A}$ ist und die Stetigkeit zusammen mit den oben bewiesenen Punkte (2), (3) impliziert dass

$$F(x) - \varepsilon < G(x) < F(x) + \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ ist.}$$

(siehe Bild 4)

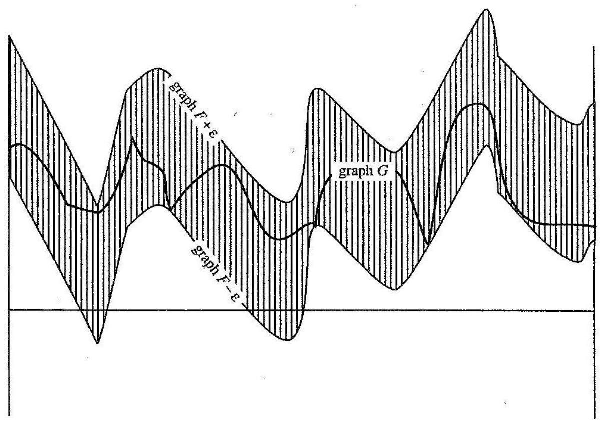

Bild 4: Der Graph von G liegt im ε-Schlauch von F □

§3 Anwendungen

Nun wollen wir die Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß an Hand der folgenden zwei Beispielen demonstrieren.

(3.1) Korollar
Wenn M eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist, dann kann P als Funktionenalgebra aller Polynome in den k reellen Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gewählt werden. Dann liegt P dicht in C^0M. ◇

Beweis
Die Menge der reellen Polynome in $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation untereinander und mit Skalaren. Es ist leicht zu zeigen, dass dies auch für Polynome in k reelen Variablen $(x_1, \ldots, x_k)$ gilt.
Für $f, g \in P, a \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_k) + g(x_1,\ldots,x_k) &= (f+g)(x_1,\ldots,x_k) \in P \\ f(x_1,\ldots,x_k) \cdot g(x_1,\ldots,x_k) &= (f \cdot g)(x_1,\ldots,x_k) \in P \\ a \cdot f(x_1,\ldots,x_k) &\in P. \end{aligned}$$

Da $a \cdot x_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und bei der Multiplikation und Addition der Funktionen kann man komponenten Weise vorgehen und erhält damit wieder den Fall für Polynome in $\mathbb{R}$, das heißt das eindimensionale Verhalten von Funktionen

überträgt sich auf k-dimensionales Verhalten, aufgrund von Unabhängigkeit der Variablen $x_1, \ldots, x_k$ und der komponenten Weise Betrachtung der Funktionen.
Also ist P eine Funktionenalgebra.
Sie verschwindet in keinem Punkt, da zum Bespiel die Funktion jeden Punkt auf Eins abbildet, das heißt die Funktion $f\colon (x_1, \ldots, x_k) \mapsto 1$ bildet die Null auf Eins ab, was ungleich Null ist.
K ist punktetrennend, da für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^k$ eine Funktion existiert,für die $f(y_1) \neq f(y_2)$ für $y_1 \neq y_2$, nämlich die Identität $f_i\colon (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i$ für $i = 1, \ldots, k$.
Nach dem Satz von Stone-Weierstraß folgt, dass P dicht in $C^0 M$ liegt. □

Ein weitere interessante Anwendung ist die Approximation von 2π-periodischen Funktion in $\mathbb{R}$.
Um dies zeigen zu können, ist es vorher noch notwendig, eine Folgerung aus dem gerade bewiesenem Satz von Stone-Weierstraß zu ziehen. Dieser gilt nämlich nur für reelwertige Funktionen, wobei für die Approximation von reellen trigonometrischen Funktionen eine komplexe Version des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß benötigt wird.
Diese Folgerung wird nun gezeigt.

(3.2) Satz (Komplexer Stone-Weierstraß)
Sei M ein kompakter metrischer Raum und A eine Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{C})$ wie in (1.1) definiert, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist, und enthalte A zusätzlich noch zu jedem $p \in A$ auch das Konjugierte $\overline{p}$. Dann liegt A dicht in $C^0(M, \mathbb{C})$. ⋄

Beweis
Es sei $P_{\mathbb{R}}$ und $C^0(M, \mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen Polynome aus A beziehungsweise aus $C^0(M)$.
Offensichtlich ist $P_{\mathbb{R}}$ eine Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$, die in keinem Punkt verschwindet, da die Funktion, die alles auf das Einselement abbildet enthalten ist.
Für alle komplexwertige Funktionen g auf M ist der Real- Imaginärteil gegeben durch

$$\operatorname{Re} g := \tfrac{g+\overline{g}}{2} \text{ und } \operatorname{Im} g := \tfrac{g-\overline{g}}{2i}.$$

Nach den Vorrausstezungen liegen sowohl Real- als auch Imaginärteil von allen $p \in A$ in $P_{\mathbb{R}}$. Die Funktion $h\colon x \mapsto x + ix \in A$ mit dem Realteil $\operatorname{Re} h = \frac{h+\overline{h}}{2} = x$ und dem Imaginärteil $\operatorname{Im} h = \frac{h-\overline{h}}{2i} = x$ bildet zwei beliebige Punkte x_1, x_2 aus M mit $x_1 \neq x_2$ stets auf unterschiedliche Punkte ab, da $(\operatorname{Re} h)(x_1) \neq (\operatorname{Re} h)(x_2)$ und

$(\operatorname{Im} h)(x_1) \neq (\operatorname{Im} h)(x_2)$. Also ist $P_{\mathbb{R}}$ punktetrennend.
Daraus ergibt sich insgesamt mit dem reellen Satz von Stone-Weierstraß, dass $P_{\mathbb{R}}$ dicht in $C^0(M, \mathbb{R})$ liegt.
Nun können wir zu einem gegebenen $f \in C^0(M, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ zwei Funktionen u und v aus $P_{\mathbb{R}}$ finden, so dass f durch sie approximiert wird, also

$$\| \operatorname{Re} f - u \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ und } \| \operatorname{Im} f - v \| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

ist. Da aber $u + iv$ zu A gehört und die obigen Abschätzungen ergeben, dass

$$\|f - (u + iv)\| = \| \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f - (u + iv)\| \leq \| \operatorname{Re} f - u\| + \| \operatorname{Im} f - v\| < \varepsilon,$$

liegt A dicht in $C^0(M, \mathbb{C})$. □

Nun kann man mit Hilfe des komplexen Satzes von Stone-Weierstraß zeigen, dass die stetigen komplexen Funktionen auf dem Einheitskreis S^1 durch Funktionen der Form $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ approximiert werden können.

(3.3) Korollar
Sei S^1 der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Dann gibt es zu jeder stetigen komplexen Funktion $f \in C^0(S^1, \mathbb{C})$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k \right| < \varepsilon \text{ für alle } z \in S^1.$$

Das heißt, die Menge $\mathcal{P} := \{f \colon S^1 \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k, c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $C^0(S^1, \mathbb{C})$. ◇

Beweis
Als erstes ist zu zeigen, dass $\mathcal{P}$ eine Funktionenalgebra ist.

1. Abgeschlossenheit bezüglich Addition:
   Für $f, g \in \mathcal{P}$ und $e_k := c_k + d_k \in \mathbb{C}$ für $k = -\max\{n, m\}, \ldots, \max\{n, m\}$ gilt:
   $$\begin{aligned} (f+g)(z) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k + \sum_{k=-m}^{m} d_k z^k = \sum_{k=-\max\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} (c_k + d_k) z^k \\ &= \sum_{k=-\max\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} e_k z^k \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

2. Abgeschlossenheit bezüglich skalarer Multiplikation:
   Für $f \in \mathcal{P}$ und $d \in \mathbb{C}$ mit $e_k := d \cdot c_k$ für $k = -n, \ldots, n$ gilt:
   $(d \cdot f)(z) = d \cdot \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k = \sum\limits_{k=-n}^{n} (d \cdot c_k) z^k = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k z^k \in \mathcal{P}$
3. Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation:
   Für $f, g \in \mathcal{P}$ und $e_k := \sum\limits_{j=-k}^{k} c_j \cdot d_{k-j}$ für $k = -(n+m), \ldots, n+m$ gilt:
   $(f \cdot g)(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k \cdot \sum\limits_{k=-m}^{m} d_k z^k$
   $\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum\limits_{k=-(n+m)}^{n+m} \left(\sum\limits_{j=-k}^{k} c_j \cdot d_{k-j} \right) z^k = \sum\limits_{k=-(n+m)}^{n+m} e_k z^k \in \mathcal{P}$

Daraus folgt, dass $\mathcal{P}$ eine Funktionenalgebra von ist.

Sie verschwindet in keinem Punkt, da die Funktion $f \colon z \mapsto \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ für $n = 0$ und $c_0 := 1$ alle $z \in S^1$ auf Eins abbildet, da für alle $z \in S^1$: $\sum\limits_{k=0}^{0} 1 \cdot z^k = z^0 = 1$ gilt.
Sie ist punktetrennend, da das Polynom $h := id_{S^1}$ die Identität ist mit $h(z) = z = \sum\limits_{k=-1}^{1} c_k z^k$ mit $c_1 = c_0 = 0$ und $c_1 = 1$.
Weiter gilt für $z \in S^1$, dass $\overline{z} = z^{-1}$ ist, was man mit den Konjugationsregeln sieht. Wenn p in der Menge $\mathcal{P}$ liegt, dann folgt mit $p(z) := \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, dass $\overline{p}(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{z}^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k (\frac{1}{z})^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot z^{-k}$ und damit $\overline{p}$ auch in $\mathcal{P}$ liegt.
Da $\mathcal{P}$ eine punktetrennende Funktionenalgebra in $C^0(S^1, \mathbb{C})$ ist und in keinem Punkt verschwindet und zu jedem $p \in \mathcal{P}$ auch das Konjugierte in $\mathcal{P}$ ist, folgt mit dem komplexen Satz von Stone-Weierstraß, dass $\mathcal{P}$ dicht in $C^0(S^1, \mathbb{C})$ liegt.
Also kann eine beliebige stetige komplexe Funktion auf S^1 durch eine Funktion der Form $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ approximiert werden. □

Da wir dies nun gezeigt haben können wir nun die gewünschte Approximation von 2π-periodischen Funktionen in $\mathbb{R}$ zeigen, da hierfür eine kurzzeitige Transformation ins Komplexe benötigt wird.

(3.4) Korollar
Jede 2π-periodische stetige Funktion in $x \in \mathbb{R}$ kann gleichmäßig durch ein trigonometrisches Polynom $T(x) = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos kx + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \sin kx$ approximiert werden.

Das heißt die Menge $\mathcal{T} := \{T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \sin kx,$ $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, .., n, n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $C^0(\mathbb{R})$. ◇

Beweis
Sei nun $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und 2π-periodisch.
Jedes $z \in S^1$ kann nach Analysis I (IV(5.11)) durch $z = e^{i\varphi}$ mit einem eindeutig bestimmten $\varphi \in [0, 2\pi)$, dem Argument von z, dargestellt werden. Daher wird durch $g(e^{i\varphi}) := f(\varphi)$, mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, eine Funktion $g \in C^0(S^1, \mathbb{R})$ definiert.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es nach (3.3) $c_{-n}, \ldots, c_0, \ldots, c_n$, so dass

$$\left| g(e^{i\varphi}) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi} \right| < \varepsilon \text{ für alle } \varphi \in [0, 2\pi)$$

ist. Setzt man nun $c_k := a_k + ib_k$, mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und stellt $e^{ik\varphi}$ in der Form $e^{ik\varphi} = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$ dar, ist

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi} = \sum_{k=-n}^{n} a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi + i \sum_{k=-n}^{n} b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi$$

und mit (3.2) folgt sofort

$$\left| f(\varphi) - \sum_{k=-n}^{n} a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi \right| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Der Imaginärteil wird durch Null approximiert, also

$$\left| 0 - \sum_{k=-n}^{n} b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

das heißt beim Approximieren wird der Imaginärteil immer kleiner und man kann die Abschäzung wie folgt annehmen:

$$\left| f(\varphi) - \sum_{k=-n}^{n} a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi \right| < \varepsilon \text{ für alle } \varphi \in [0, 2\pi). \ (1)$$

Dies sieht der Funktion durch die wir approximieren möchten schon ähnlich, man muss aber noch eine leichte Umformung vornehmen um zum Ziel zu gelangen.
Da die auftretenden trigonometrischen Funktionen gerade beziehungsweise ungerade sind, kann man die obige Summe auch in der Form

$$\underbrace{a_0}_{=:\alpha_o} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_{-k} + a_k)}_{=:\alpha_k} \cos k\varphi + \underbrace{(b_{-k} - b_k)}_{=:\beta_k} \sin k\varphi$$

mit den reelen Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ schreiben. Dieses Polynom ist immer 2π-periodisch.
Da weiterhin f 2π-periodisch ist, gilt die Abschätzung (1) sogar für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
Das heißt mit der 2π-Periodizität von f und der Umformung ergibt sich, dass

$$\left| f(\varphi) - \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi \right) \right| < \varepsilon \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}$$

Das heißt f lässt sich beliebig gut durch $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi$ approximieren.
Das heißt T liegt dich in $C^0 S^1$. $\square$

Literatur

[1] C. C. Pugh: Real Mathematical Analysis, Springer Science+Business Media, Inc., USA, (2002), pp. 217-228.

[2] A. Krieg: Analysis I, RWTH Aachen, Aachen, (2007).

[3] A. Krieg: Analysis II, RWTH Aachen, Aachen, (2008).

[4] H.Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner Verlag, Wiesbaden, (2004), pp. 64-66.