Vervollständigung

Vortrag zum Seminar zur Analysis in metrischen Räumen, 31.05.2010

Benedikt Niemöller & Henrik Gerhards

§ 1 Vollständigkeit

- (I) Das Vervollständigungstheorem für metrische Räume
  - (1) Ziel des Vortrags
  - (2) Hilfssatz
  - (3) Vervollständigungstheorem
  - (4) Anwendung
- (II) Beweis des Vervollständigungstheorem
  - (1) Konstruktion von $\hat{M}$
    - (a) Definition der Menge $\mathcal{C}$ und der Co-Cauchy Eigenschaft
    - (b) Beweis von $\sim_{\mathcal{C}_0}$ ist Äquivalenzrelation
    - (c) Definition von $\hat{M}$ und dazugehöriger Metrik D
  - (2) Beweis der Existenz von $\hat{M}$ als Vervollständigung von M
    - (a) Beweis der Wohldefiniertheit der Metrik D
      - (i) Existenz des Grenzwertes
      - (ii) Eindeutigkeit des Grenzwertes
      - (iii) Erfüllung der Metrik Bedingungen
    - (b) Beweis von M ist metrischer Unterraum $\hat{M}$
      - (i) Elemente von M besitzen Repräsentanten in $\hat{M}$
      - (ii) M Metrik d läßt sich aus $\hat{M}$ Metrik D ableiten
    - (c) Beweis der Vollständigkeit von $\hat{M}$
      - (i) Definition von Cauchy Folgen in $\hat{M}$
      - (ii) Hilfsbehauptung
      - (iii) Beweis der Vollständigkeit von $\hat{M}$ durch ϵ-Abschätzungen
  - (3) Beweis der Eindeutigkeit von $\hat{M}$ als Vervollständigung von M

§1 Vollständigkeit

— *(I) Vervollständigungstheorem für metrische Räume* —

(1.1) Beispiel
Alle abgeschlossen Unterräume des Euklidischen Raumes sind vollständig (siehe Vortrag 4 Cauchy Folgen und Kompaktheit, Satz (1.7). ◇

(1.2) Satz
Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $p, q, x, y \in M$, dann gilt

$$|d(p,q) - d(x,y)| \leq d(p,x) + d(q,y).$$ ◇

(1.3) Satz (Vervollständigungstheorem)
Jeder metrische Raum M mit der Metrik d kann zu einem metrischen Raum $\hat{M}$ mit einer Metrik D vervollständigt werden. ◇

(1.4) Bemerkung
Jeder metrische Raum M kann als Unterraum eines vollständigen, metrischen Raumes $\hat{M}$ angesehen werden, welcher dann als Vervollständigung bezeichnet wird und durch M eindeutig bestimmt ist. ◇

— *(II) Beweis des Vervollständigungstheorem* —

(1) Konstruktion von $\hat{M}$

(1.5) Definition
Sei $\mathcal{C} := \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy Folge in } M\}$ die Menge der Cauchy Folgen in M. ◇

(1.6) Definition (Co-Cauchy Eigenschaft)
Zwei Cauchy Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (M, d) sind genau dann Co-Cauchy, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$ ◇

(1.7) Satz
Die Co Cauchy Eigenschaft definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_{Co}$ auf $\mathcal{C}$, also

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{Co} (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$ ◇

(1.8) Definition
Sei $\hat{M} := \mathcal{C}/_{\sim_{Co}} = \{P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mid (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge in $M\}$ die Menge der $\sim_{Co}$ Äquivalenzklassen. ◇

(1.9) Definition
Sei $P := [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}],\ Q := [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Auf $\hat{M}$ sei durch

$$D(P,Q) := \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

eine Metrik definiert, wobei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ Repräsentanten der Äquivalenzklasse $P,\ Q \in \hat{M}$ sind. ◇

(2) $\hat{M}$ existiert als Vervollständigung von M

(1.10) Satz
$(\hat{M}, D)$ ist ein vollständiger, metrischer Raum und (M, d) ist metrischer Teilraum von M. ◇

(3) $\hat{M}$ ist eindeutig als Vervollständigung von M

(1.11) Satz
$\hat{M}$ ist eindeutig als Vervollständigung von M ◇