Vervollständigung

Verwendete Definitionen

(0.1) Definition (Metrik)
Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Nonnegativität
   $d(x, x) = 0$ (Punkte haben zu sich selbst den Abstand 0),
2. Definitheit
   $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Punkte mit Abstand 0 sind identisch, nicht-identische können nicht Abstand 0 haben.),
3. Symmetrie
   $d(x, y) = d(y, x)$,
4. Dreiecksungleichung
   $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. ◇

(0.2) Definition (Äquivalenzrelation)
Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. Reflexivität
   Für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in R$.
2. Symmetrie
   Für alle $a, b \in M$, für die $(a, b) \in R$ gilt, ist auch $(b, a) \in R$.
3. Transitivität
   Für alle $a, b, c \in M$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ gilt, dass auch $(a, c) \in R$.

Üblicherweise schreibt man: $a \sim_R b$ oder einfach $a \sim b$ statt $(a, b) \in R$. ◇

(0.3) Definition (Cauchy Folge in metrischen Räumen)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchy Folge, wenn gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N} :\ m > N, n > N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ◇

(0.4) Definition (Vollständigkeit in metrischen Räumen)
Ein metrischer Raum (M, d) ist vollständig, falls jede Cauchy Folge in M ein Grenzwert in M besitzt, mit anderen Worten: Jede Cauchy Folge in M konvergiert in M. ◇

(0.5) Definition (Isometrie)
Sind zwei metrische Räume (M_1, d_1), (M_2, d_2) gegeben, und $f\colon M_1 \to M_2$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $d_2\left(f(x), f(y)\right) = d_1(x, y)$, dann heißt f Isometrie von M_1 nach M_2. $\diamond$

(0.6) Definition (Metrischer Unterraum)
(M, d) sei ein metrischer Raum. Jede Teilmenge $A \subseteq M$ wird zu einem Unterraum $(A, d|_{A\times A})$ durch Einschränken der Metrik von $M \times M$ auf $A \times A$.
Anders ausgedrückt
$\exists$ Isometrie f, so dass $A := f(M) \subset M$ und $d_A = d_M|_{A\times A}$ $\diamond$

(0.7) Definition (Dichter Teilraum)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann heißt A dicht in M falls $\overline{A} = M$ ist.
Folgerung:
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann ist äquivalent:

1. A ist dicht in M
2. $\forall\, \epsilon > 0\ \ \forall\, x \in M\ \ \exists\, y \in A : \ \ d(x, y) < \epsilon$ $\diamond$