§1 Metrische Räume

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des metrischen Raumes einführen und an einigen Beispielen illustrieren.

— Definition und Beispiele —

(1.1) Definition (Metrischer Raum)
Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$, und $d : M \times M \to [0, \infty)$ eine Abbildung. Das Paar (M, d) heißt *metrischer Raum*, falls d folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ erfüllt:

(i) **Positiv-Definitheit:**
$d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) **Symmetrie:**
$d(x, y) = d(y, x)$

(iii) **Dreiecksungleichung:**
$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Die Funktion d nennt man *Metrik* auf M. Im Folgenden werden wir verkürzend statt (M, d) oft M als metrischen Raum bezeichnen. ◇

(1.2) Bemerkung
Man muss in der Definition die Nichtnegativität nicht fordern, da diese bereits von (i) und (iii) impliziert wird. ◇

Es ist leicht einzusehen, dass die Teilmenge N eines metrischen Raumes M selbst ein metrischer Raum ist, wenn wir die Einschränkung $d|_{N \times N} : N \times N \to [0, \infty)$ betrachten. Wir nennen dies einen *Unterraum* des metrischen Raumes M.

(1.3) Beispiele

1. Auf $\mathbb{R}$ kann man durch

$$| \cdot | : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y|$$

eine Metrik definieren.

2. Sei m eine natürliche Zahl. Auf der Menge $\mathbb{R}^m$ kann man durch

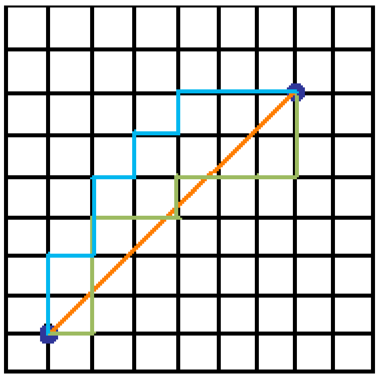
$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}$$

   eine Metrik definieren. Diese wird auch *euklidische Metrik* genannt nach Euklid von Alexandria.

3. Eine weitere Metrik auf dem $\mathbb{R}^m$ ist durch

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$$

   gegeben. Man bezeichnet sie als *Manhattan-Metrik,* da sie im Spezialfall $m = 2$ wie ein Wohnblock in Manhattan visualisiert werden kann (hierbei beschreibt die orangefarbene Strecke die euklidische Metrik, die blaue/grüne Linie verkörpert zwei mögliche Wege der Manhattan-Metrik):



4. Man kann auf jeder Menge M eine Metrik durch

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, (m,n) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } m \neq n \,, \\ 0, & \textit{sonst} \,. \end{cases}$$

   definieren. Diese bezeichnet man als *diskrete Metrik.* ◇

— Folgen —

(1.4) Definition (Folgen)
Sei M ein metrischer Raum und $a : \mathbb{N} \to M$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in M. Dann bezeichnet man a als *Folge* in M. Statt das Bild von $n \in \mathbb{N}$ mit $a(n)$ zu bezeichnen, ist die Notation a_n verbreitet. ◇

(1.5) Definition (Teilfolgen einer Folge)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in M. Falls eine streng monoton wachsende Abbildung $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass $b_n = a_{c(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, nennt man $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Bei einer Teilfolge lässt man also einige Glieder der Ursprungsfolge aus. ◇

Der Begriff der *Konvergenz* einer Folge lässt sich ebenfalls problemlos auf den allgemeinen Fall einer Folge in einem metrischen Raum übertragen, wenn man von der Metrik gebrauch macht.

(1.6) Definition (Konvergenz einer Folge)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen $a \in M$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $d(a, a_n) < \varepsilon$ gilt. Man nennt a dann auch den *Grenzwert* oder *Limes* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt dafür $a_n \to a$ für $n \to \infty$. ◇

(1.7) Satz
Der Grenzwert einer im metrischen Raum M konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. ◇

(1.8) Satz
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. ◇

§2 Stetigkeit

Im ersten Semester beschränkten wir uns auf die Untersuchung von Abbildungen mit reellem (komplexem) Definitions- und Wertebereich. Wir wollen nun Abbildungen von einem metrischen Raum in einen anderen betrachten und das bekannte Konzept der Stetigkeit, das wir bereits bei reellen (komplexen) Funktionen kennengelernt haben, übertragen.

(2.1) Definition (Stetigkeit)
Seien $(M, d_1), (N, d_2)$ metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f *stetig* im Punkt $x_0 \in M$ ist, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in M$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ die Ungleichung $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ folgt. Falls f in jedem Punkt aus M stetig ist, sagt man auch, dass f *stetig* auf M ist. ◇

(2.2) Bemerkung
Falls $M, N \subset \mathbb{R}$ und $d_1 = d_2 = |\cdot|$ ist, stimmt diese Definition mit der aus dem reellen Fall bekannten überein. ◇

(2.3) Satz (Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen)
Seien $(M, d_1), (N, d_2)$ metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung von M nach N. Die Abbildung f ist genau dann im Punkt $x_0 \in M$ stetig, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. $\diamond$

(2.4) Satz (Verknüpfung stetiger Funktionen)
Seien M, N, P metrische Räume und $f : M \to N, g : N \to P$ stetige Abbildungen. Dann ist $g \circ f : M \to P$ stetig. $\diamond$

(2.5) Beispiel
Für jeden festen Punkt m eines metrischen Raumes (M, d) ist die Abbildung
$d_M : M \to \mathbb{R}, x \mapsto d(m, x)$ stetig, wenn man $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik versieht. $\diamond$

(2.6) Bemerkung
Die Folgenbedingung liefert eine einfache Möglichkeit, zu entscheiden, ob eine konkrete Abbildung stetig ist oder nicht. $\diamond$

§3 Homöomorphismen

In der Mathematik versucht man häufig, Objekte, die gewisse Eigenschaften gemeinsam haben oder unter manchen Gesichtspunkten übereinstimmen, in Klassen bzw. Mengen zusammenzufassen.

So kennen wir aus dem 1. Semester bereits bijektive Abbildungen als Werkzeug, um zu entscheiden, welche Mengen wir als gleichmächtig betrachten wollen, und damit für uns unter dem Aspekt der Mächtigkeit ununterscheidbar sind.

Des Weiteren haben wir für $D \subseteq \mathbb{R}$ die stetigen Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ in der Menge $C^0(D)$ wiedergefunden.

Im Fall metrischer Räume werden uns stetige Abbildungen mit einigen zusätlichen Eigenschaften als zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung, welche Räume wir in einer Kategorie zusammenfassen wollen, dienen.

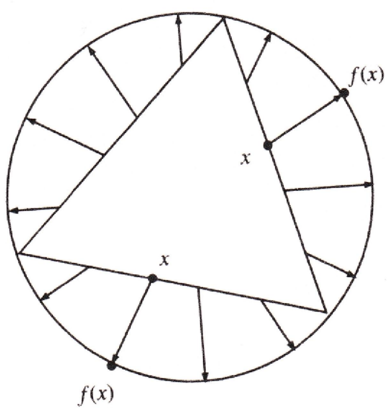
(3.1) Definition (Homöomorphismus)
Seien M, N metrische Räume.
Eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ wird *Homöomorphismus* genannt, wenn f stetig ist und eine ebenfalls stetige Umkehrabbildung besitzt. Man sagt dann auch, dass die metrischen Räume *homöomorph* sind und schreibt dafür kurz $X \cong Y$. $\diamond$

(3.2) Satz
In der Tat wird durch $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der metrischen Räume definiert.

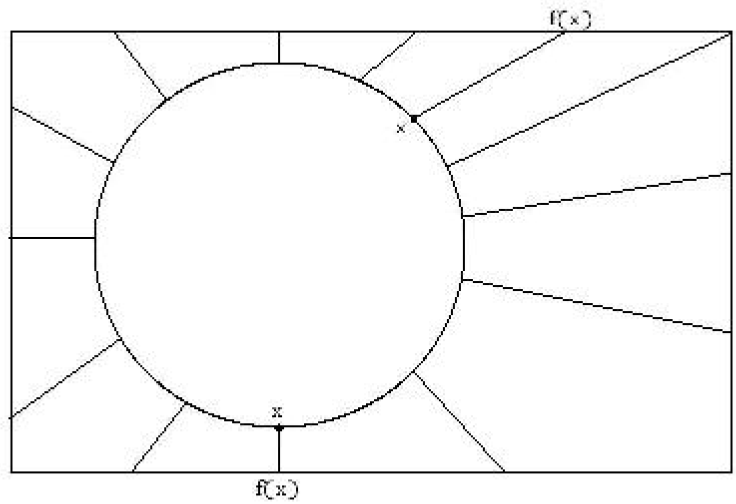
(3.3) Bemerkung
Die Äquivalenzklassen nennt man in diesem Fall auch *Homöomorphieklassen.* $\diamond$

Anschaulich ist ein Homöomorphismus eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, die durch Dehnen, Strecken oder andersartige Verformungen, ohne den Raum zu zerschneiden oder zerreißen, ineinander überführt werden können.

(3.4) Beispiel
An dem folgendem Bild kann man *sehen*, dass der Umfang des Kreises homöomorph zum Umfang des Dreiecks ist. $\diamond$



Dasselbe gilt für Kreise und Rechtecke (im $\mathbb{R}^2$):



Man könnte der Ansicht sein, dass die Stetigkeit der Umkehrfunktion durch die Stetigkeit der Abbildung impliziert wird. Dass dies nicht gilt, zeigt das folgende Gegenbeispiel.

(3.5) Beispiel
Wir betrachten $I := [0, 2\pi)$ und die Funktion $f : I \to S^1, x \mapsto (\cos x, \sin x)$, wobei $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in der Ebene ist. $\diamond$

(3.6) Bemerkung
Wir haben die Unstetigkeit der Umkehrabbildung belegt. Damit ist nicht bewiesen, dass es überhaupt keine homöomorphe Abbildung von I nach S^1 gibt. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir zuerst einen weiteren Begriff ein. $\diamond$

(3.7) Definition (Folgenkompaktheit)
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist *folgenkompakt,* wenn jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen einen Punkt $x_0 \in A$ konvergiert. $\diamond$

(3.8) Satz
Das stetige Bild einer folgenkompakten Menge ist folgenkompakt. $\diamond$

(3.9) Lemma (Folgenkompaktheit des Einheitsquadrates)
Die Menge $A = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1 \ \wedge\ -1 \le y \le 1\}$ versehen mit der euklidischen Metrik ist folgenkompakt. $\diamond$

(3.10) Lemma
Das Intervall $[0, 2\pi)$ ist nicht folgenkompakt. $\diamond$

(3.11) Satz
S^1 und I sind nicht homöomorph. $\diamond$

(3.12) Beispiel
Als Beispiel zweier metrischer Räume, die zueinander homöomorph sind, führen wir $\mathbb{R}$ und das offene Intervall $(-1, 1)$ (jeweils mit der Standardmetrik versehen) an. $\diamond$

Literatur

[1] C. C. Pugh: *Real Mathematical Analysis,* Springer Science+Business Media, Inc., USA, (2002), 51–59, 76.

[2] R. Walter: *Einführung in die Analysis, Band 1,* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, (2007), 271.

[3] A. Krieg: *Analysis I, RWTH Aachen,* Aachen, (2007).

[4] O. Forster: *Analysis 2,* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, (2008), 18.