Einführung in die Fourier-Reihen

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 05.07.2010

André Stollenwerk, Eva-Maria Seifert

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit dem Problem, inwiefern sich Funktionen mittels Sinus und Cosinus, das heißt periodischen Funktionen, approximieren lassen. Diese Darstellungen sind sowohl in der Mathematik als auch in der Physik von großer Bedeutung und haben in viele Bereichen Anwendung.

§1 Fourier-Reihen: Definitionen

Wir betrachten im Folgenden periodische Funktionen.

(1.1) Definition (periodische Funktionen)
Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt *periodisch* mit Periode $L > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+L) = f(x).$$

(1.2) Bemerkung
Hat f die Periode L, so hat die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := f(\frac{L}{2\pi}x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

die Periode 2π. ◇

Im Folgenden setzen wir voraus, dass f Riemann-integrierbar ist, auf jedem beschränkten Intervall. Wir wollen nun wissen, welche Funktionen eine Reihendarstelung der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad (I)$$

besitzen. Dazu schauen wir uns zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen, für die eine solche Darstellung existieren. Wir stellen uns also die Frage: "Besitzt eine Funktion f eine Reihendarstellung der Form (I), wie müssen wir dann die Koeffizienten a_n und b_n bestimmen?"

(1.3) Definition (trigonometrisches Polynom)
Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrisches Polynom der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, falls sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \text{mit } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Alternativ zu der obigen reellen Darstellung existiert noch eine komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C},\ \text{für } k = -n, \ldots, n.$$

◇

Analog zur Analysis lässt sich nun die Definition einer trigonometrischen Reihe aufschreiben.

(1.4) Definition (trigonometrische Reihe)
Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrische Reihe, falls sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \text{mit } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \text{für } k \in \mathbb{N}$$

oder

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}, \text{,für } k \in \mathbb{Z}.$$

◇

Damit können wir nun, die spezielle trigonometrische Reihe, die Fourier-Reihen definieren.

(1.5) Definition (Fourier-Reihen)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ der Länge $L = b - a$ mit $a < b$ integrierbare Funktion, dann heißen

i) die Fourier-Reihe von f

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{L}.$$

Man schreibt auch

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

um zu verdeutlichen, dass die Reihe auf der rechten Seite die Fourier-Reihe von f ist.

ii) der n-te Fourier-Koeffizient von f für $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = c_n := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} \mathrm{d}x.$$

iii) die k-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f

$$S_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

◇

(1.6) Bemerkung
Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, inwiefern sich eine Funktion f als trigonometrische Reihe beziehungsweise Fourier-Reihe darstellen lässt. Das heißt wir wollen die Koeffizienten a_n, b_n und c_n gerade so auffassen, dass sie eine gute Approximation darstellen und die Fourier-Reihe gegen f konvergiert. Im Idealfall würde gleichmäßige Konvergenz vorliegen, welche wir im Folgenden auch annehmen. ◇

Weiterhin sind die von uns gewählten Integrationsgrenzen zur Bestimmung der Koeffizienten nicht relevant, wie das folgende Lemma zeigt.

(1.8) Lemma
Ist f periodisch mit Periode p und integrierbar auf jedem abgeschlossenen Intervall, dann ist $\int_a^{a+p} f(x)dx$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}$. Weiter gilt für $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{falls } f \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{falls } f \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

◇

Hierdurch erhalten wir letztendlich unsere Definition der Fourier-Reihe wie in (1.3) angegeben für Funktionen auf allgemeinen Intervallen $[a, b] \in \mathbb{R}$. Da heißt, das Entscheidende bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist lediglich die Periode oder anderes ausgedrückt das Intervall auf dem wir unsere Funktion f durch eine trigonometrische Reihe approximieren wollen.
Allgemein gilt also nach obigem Lemma für die Fourier-Koeffizienten von f:

$$\hat{f}(n) = c_n := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} \mathrm{d}x \quad , \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

(1.9) Satz
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion, so ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch:

$$f(x) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(nx) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(nx)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

◇

Wir wollen nun weitere Eigenschaften der Fourier-Reihen betrachten.

(1.10) Satz
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion, dann gilt:

i) Ist f gerade, dann ist

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n),$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos(nx).$$

ii) Ist f ungerade, dann ist

$$\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n),$$
$$f(x) \sim \hat{f}(0) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(nx).$$

◇

(1.11) Satz
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische integrierbare Funktion. Wenn $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ gilt, dann ist die Fourier-Reihe von f reellwertig. ◇

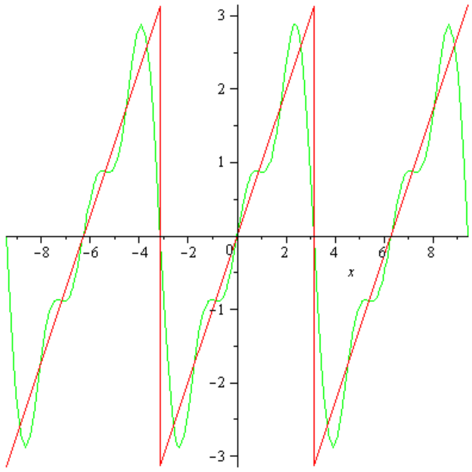
§2 Beispiele und spezielle Fourier-Reihen

Im Folgenden betrachten wir nun einige Beispiele von Fourier-Reihen.

(2.1) Beispiele

i) Sei $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, x \to x$, dann gilt:

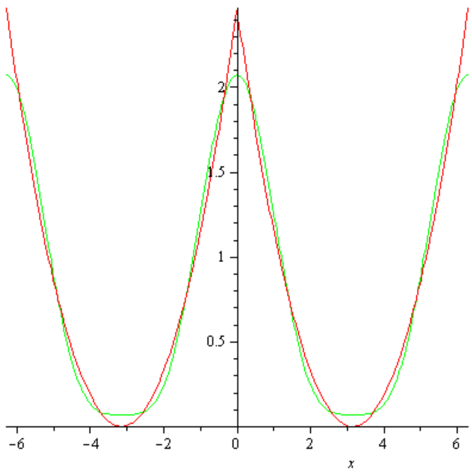
$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}.$$



Graph von f mit Partialsumme 3.

ii) Sei $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \to \frac{(\pi-x)^2}{4}$, dann gilt:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$



Graph von f mit Partialsumme 2.

iii) Sei $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}, x \to \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha}$, dann gilt:

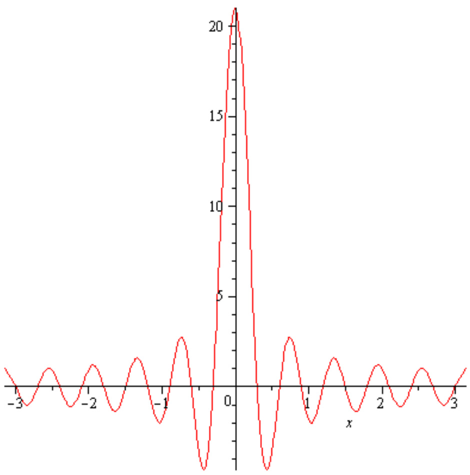
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\alpha+n} \quad ,\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

◇

(2.2) Definition (Dirichlet-Kern)
Das trigonometrische Polynom definiert auf $[-\pi,\pi]$ durch:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad , \text{für } N \in \mathbb{Z}^+$$

nennt man den N-ten Dirichlet Kern. ◇



10-ter Dirichlet Kern.

(2.3) Satz
Der N-te Dirichlet Kern ist weiterhin gegeben durch:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} & x \neq 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad N \in \mathbb{Z}^+.$$

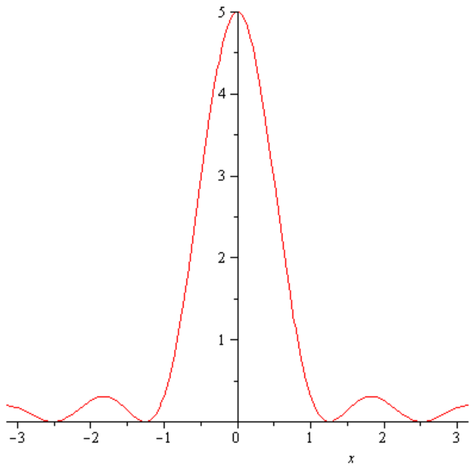
◇

In Anlehnung an den Dirichlet-Kern gibt es noch den Fejér-Kern, welcher das geometrische Mittel über die Summe der Dirichlet-Kerne darstellt. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, dass der Fejér-Kern positiv ist.

(2.4) Definition (Fejér-Kern)
Der Fejér-Kern n-ten Grades ist gegeben durch:

$$F_n := \frac{1}{n}(D_0 + D_1 + ... + D_{n-1}),$$

wobei D_i der i-te Dirichlet-Kern (für $i = 0, \ldots, n-1$) ist.

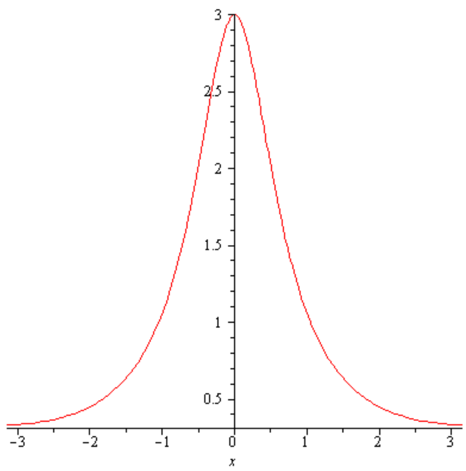


Fejér-Kern vom Grad $n = 5$. ◇

(2.5) Definition (Poisson Kern)
Die Funktion P_r, genannt der Poisson Kern, ist definiert für $x \in [-\pi, \pi]$ und $0 \leq r < 1$ durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe:

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

◇



Poisson Kern für $r = \frac{1}{2}$.

(2.7) Satz
Der Poisson Kern ist weiterhin gegeben für $x \in [-\pi, \pi]$ und $0 \leq r < 1$ durch:

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \qquad \diamond$$