Eindeutigkeit und Konvergenz von Fourierreihen

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 05.07.2010

Michael Amend & Jens Dodenhoff

Inhalt

Abbildungen

§1 Eindeutigkeit

(1.1) Satz
Eine beschränkte Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ist genau dann Rieman-Integrierbar, wenn f fast überall auf $[a, b]$ stetig ist. ◇

(1.2) Lemma
Wenn $\epsilon > 0$ ist, ist A_ϵ abgeschlossen und somit kompakt. ◇

(1.3) Satz
Sei f eine integrierbare Funktion auf dem Kreis und
$\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ so gilt:
$f(x) = 0$, falls f eine stetige Funktion im Punkt x ist.
Nach Satz (1.1) gilt also $f(x) = 0$ für fast alle x. ◇

(1.4) Korollar
Ist f eine periodische, stetige Funktion mit $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $f = 0$. ◇

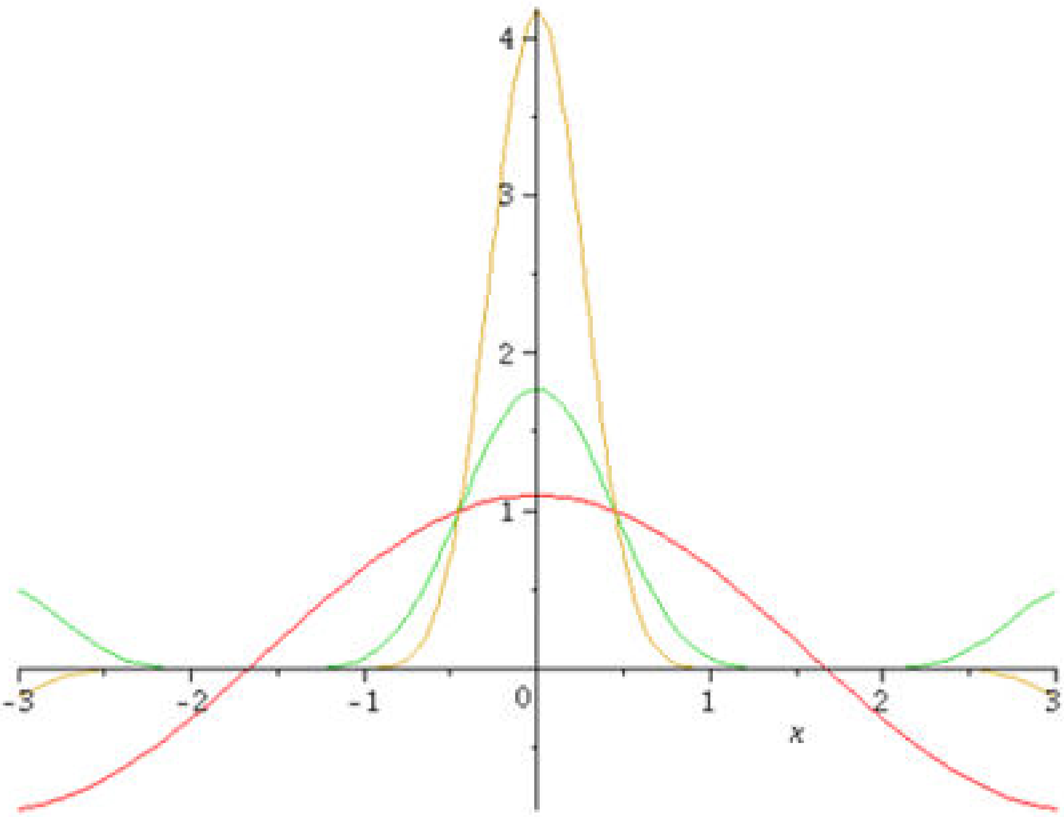

Abbildung 1: Die Funktionen p_1, p_6 und p_{15} mit $\epsilon = 0,1$.

(1.5) Korollar
Sei f eine stetige Funktion die auf dem Kreis definiert ist und die Fourierreihe von f sei absolut konvergent, das heißt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$. Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f, mit anderen Worten

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta) \qquad \text{gleichmäßig in } \theta. \qquad \diamond$$

§2 Konvergenz von Fourierreihen

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{C}^k(a,b)$ die Menge, der auf $(a,b) \in \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, insbesondere ist $\mathcal{C}^0(a,b)$ die Menge der auf (a,b) stetigen Funktionen und wir kürzen ab, $\mathcal{C}^k := \mathcal{C}^k(-\infty,\infty)$.

— Glatte Funktionen —

(2.1) Bemerkung
Das Korollar (1.5) liefert bereits eine Voraussetzung für die Konvergenz, nämlich die absolute Konvergenz. Bei der absoluten Konvergenz genügt es den Betrag der Fourierkoeffizienten zu betrachten, da $|e^{in\theta}| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$ gilt. $\diamond$

(2.2) Definition ($\mathcal{O}$-Notation)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion,

(i) dann ist $O(f)$ definiert als

$$O(f) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \forall n \geq N \text{ gilt } |g(n)| \leq c|f(n)|\} \quad (1)$$

(ii) oder alternativ, falls $f(n) \neq 0$ fast überall, als

$$O(f) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists C \in \mathbb{R}^+ : \lim_{n\to\infty} |\frac{g(n)}{f(n)}| \leq C\}. \quad (2)$$

Wir schreiben für eine Funktion g mit $g \in O(f)$ auch und im Folgenden $g = \mathcal{O}(f)$. Wenn wir in der zweiten Definition den Limes $n \to a$ bilden statt $n \to \infty$, schreiben wir $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ für $n \to a$. Es bedeutet, dass g durch f lokal beschränkt wird. $\diamond$

Vor dem nächsten Korollar beschreiben wir einige Eigenschaften der Fouriertransformation in einem Hilfssatz, die wir im Folgenden noch brauchen werden.

(2.3) Hilfssatz (Eigenschaften der Fourierkoeffizienten)
Seien $f \in \mathcal{C}^0$ 2π-periodisch, $f_a(t) = f(a+t)$ die Translation von f um $a \in \mathbb{R}$ und die Norm $||f||_1 := \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$. Dann gelten

(i)

$$|\widehat{f}(n)| \quad \leq \quad \frac{||f||_1}{2\pi} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z},$$

(ii)

$$\widehat{e^{i\cdot} f}(n) \quad = \quad \widehat{f}(n-1) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z},$$

und

(iii)

$$\widehat{f_a}(n) = e^{ina}\widehat{f}(n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}^l, l \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\widehat{f^{(k)}}(n) \quad = \quad (in)^k \widehat{f}(n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle} \quad k \leq l, k \in \mathbb{N}.$$

(2.4) Korollar
Sei $f \in \mathcal{C}^2$ und 2π-periodisch. Dann gilt

$$\widehat{f}(n) \quad = \quad \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^2}),$$

so dass die Fourierreihe von f absolut gleichmäßig gegen f konvergiert. $\diamond$

(2.5) Bemerkung
Man sieht, dass für Funktionen $f \in \mathcal{C}^k, k \geq 2$, die Fourierreihe umso schneller absolut konvergiert je höher das $k \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^k})$ für jedes $f \in \mathcal{C}^k$. $\diamond$

— *Hölder-stetige Funktionen* —

Nun betrachten wir den Fall für $k < 2$. Hierzu führen wir die *Hölder*-Bedingung ein.

(2.6) Definition (Hölder-Bedingung)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann erfüllt die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ die *Hölder*-Bedingung der Ordnung $\alpha \in (0, 1]$, falls ein $A > 0$ existiert, so dass gilt

$$\sup_{\theta \in U} |f(\theta + t) - f(\theta)| \leq A|t|^\alpha \quad \text{für alle} \quad t \in U.$$

Man nennt f auch *Hölder-stetig*, wenn f diese Bedingung erfüllt. $\diamond$

(2.7) Bemerkungen (Einordnung der Hölder-Stetigkeit)

(i) Man erkennt leicht, dass die Hölder-Bedingung eine Erweiterung der Lipschitz-Bedingung ist. Denn die Hölder-Bedinung entspricht für $\alpha = 1$ der Lipschitz-Bedingung.

(ii) Ebenfalls impliziert die Hölder-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich $\delta := \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{A}} > 0$ definieren, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Die Umkehrung gilt nicht wie das Beispiel (**??**)(ii) zeigt.

(iii) Im Grenzfall $\alpha = 0$ ist f eine beschränkte Funktion. $\diamond$

(2.8) Satz (von Riemann-Lebesgue für stetige Funktionen)
Seien $\widehat{f}(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen, stetigen Funktion f. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$. $\diamond$

(2.9) Folgerung
Seien $f \in \mathcal{C}^0(-\pi, \pi)$ 2π-periodisch und $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}^0(-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$, so konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle 0 gegen 0. $\diamond$

Hieraus folgt durch Transformation der *Konvergenzsatz*.

(2.10) Satz (Konvergenzsatz)
Seien $f \in \mathcal{C}^0(-\pi, \pi)$ 2π-periodisch, $\theta \in [-\pi, \pi]$ und $c \in \mathbb{C}$, so dass $\frac{f(\theta+t)-c}{t}$ integrierbar in einer Umgebung $U_\delta(\theta)$ für ein $\delta > 0$ ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle θ gegen den Wert c. $\diamond$

(2.11) Satz
Die Fourierreihe von f konvergiert gegen f, falls $f \in \mathcal{C}^0(-\pi, \pi)$ der Hölder-Bedingung der Ordnung $\alpha \in (0, 1]$ genügt. $\diamond$

Damit lässt sich also die Konvergenz auch für nicht differenzierbare Funktionen zeigen.

(2.12) Bemerkungen

(i) Nun haben wir die Menge an Funktionen f deren Fourierreihe gegen f konvergieren auf Hölder-stetige Funktionen ausgeweitet, das heißt nicht nur $f \in \mathcal{C}^0$ sind identisch mit der Grenzfunktion ihrer Fourierreihe.

(ii) Es ließe sich zeigen, dass Hölder-stetige Funktionen mit $\alpha > \frac{1}{2}$ sogar absolut konvergent sind.

(iii) Mit Satz (2.8) und dem Dirichlet-Kriterium können wir sogar schon die Konvergenz für alle integrierbaren Funktionen folgern. Die Folge der Partialsummen $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$, der Dirichlet-Kern, ist beschränkt und die Fourierkoeffizienten mit dem Satz (2.8) eine Nullfolge. Damit konvergiert die Fourierreihe, wenn auch nicht notwendigerweise absolut gegen f. $\diamond$

[1] [2]

Literatur

[1] Rami Shakarchi Elias M. Stein. *Fourier Analysis, an introduction*.

[2] Walter. *Analysis 2*. Springer, 6th edition.