Faltung und Gute Kerne

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 19.07.2010

Lars Grötschel , Elisa Friebel

Im ersten Abschnitt "Faltung" definieren und beschäftigen wir uns mit der Faltung, die die grundliegende Operation des zweiten Abschnittes ist. Im zweiten Abschnitt "Gute Kerne" suchen wir dann Kerne mit besonderen Eigenschaften, sodass sie sich, gefaltet mit einer Funktion, deren Identität annähern. Das Ziel dieses Vorgehens besteht darin auf ein Kriterium für Konvergenz von Fourier-Reihen zu schließen.

§1 Faltung

Die Faltung zweier Funktionen spielt eine grundliegende Rolle in der Fourier-Analysis. Es tritt natürlich im Kontext der Fourier-Reihen aber zusätzlich auch in der allgemeineren Analysis von Funktionen in anderen Gebieten auf. Der besondere Vorteil der Faltung ist, dass man mit ihrer Hilfe eine Fourier-Reihe als eine Faltung von einer Funktion mit einem Kern darstellen kann, die man dann besser untersuchen kann.

Führen wir zunächst den Begriff der Faltung ein:

(1.1) Definition (Faltung)
Seien zwei 2π-periodische integrierbare Funktionen f, g auf $\mathbb{R}$ gegeben, dann ist die Faltung $f * g$ auf $[-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy. \qquad \diamond$$

Da die Funktionen periodisch sind, können wir auch die Variablen wie folgt verändern.

(1.2) Korollar
Seien zwei 2π-periodische integrierbare Funktionen f, g auf $\mathbb{R}$ gegeben, dann können wir die Faltung von Definition (1.1) auch wie folgt schreiben:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy. \qquad \diamond$$

Die Faltung kann man als gewichteten Mittelwert von f auf dem Kreis verstehen.

Die Rolle der Faltung lässt sich mit der punktweisen Multiplikation $f(x)g(x)$ vergleichen, da es diese sogar in einigen Fällen ersetzt.

Für uns ist die Faltung von Interesse, da man mit ihrer Hilfe die Partialsumme einer Fourier-Reihen wie folgt beschreiben kann:

(1.3) Korollar
Sei f eine 2π-periodische integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, dann lässt sich die N-te Partialsumme dieser Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ schreiben als

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x),$$

wobei D_N der N-te Dirichlet Kern ist. $\diamond$

Mit dieser Erkenntnis reicht es den N-ten Dirichlet-Kern zu untersuchen um Aussagen über die N-te Partialsumme $S_N(f)$ treffen zu können.

Wir werden nun einige Eigenschaften der Faltung von integrierbaren 2π-periodischen Funktionen näher betrachten.

(1.4) Satz
Seien f, g, h integrierbare 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$,

(ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ für ein c $\in \mathbb{C}$,

(iii) $f * g = g * f$,

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(v) $f * g$ ist stetig,

(vi) $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$. $\diamond$

Generell:
(i) bis (iv) zeigt die Linearität, Assoziativität und Kommutativität der Faltung. Nach (v) gilt, dass Faltung immer stetig ist. Besonders interessant ist Aussage (vi), die deutlich macht, dass der Fourierkoeffizient vom Produkt zweier Funktionen f und g nicht gleich dem Produkt der Fourierkoeffizienten von f und g ist, also
$\widehat{f \cdot g}(n) \neq \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

Um Satz (1.4)(v) für stetige Funktionen zu zeigen, brauchen wir einige Hilfsaussagen, um den Satz auch auf alle integrierbaren, beschränkten 2π-periodischen Funktionen zu erweitern.

(1.5) Lemma

Sei f eine auf dem Kreis integrierbare und durch B beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$, das heißt $B \geq |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wie in Beweis zu (1.4).

Dann existiert eine Folge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ von stetigen Funktionen auf dem Kreis, für die gilt:

$$\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |f_k(x)| \leq B \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \longrightarrow 0 \qquad \text{für } k \longrightarrow \infty. \qquad \diamond$$

§2 Gute Kerne

Dieser Abschnitt handelt von guten Kernen und deren charakteristischen Eigenschaften. Wir werden sehen, dass Funktionen mit Hilfe von Faltung mit guten Kernen approximiert werden können.

Zunächst definieren wir, was unter guten Kernen zu verstehen ist.

(2.1) Definition (gute Kerne)
Sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von Kernen. $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißen *gute Kerne*, wenn sie folgende Vorausetzungen erfüllen:

a) für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$$

b) es existiert ein $M > 0$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M,$$

c) für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \to 0, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

◇

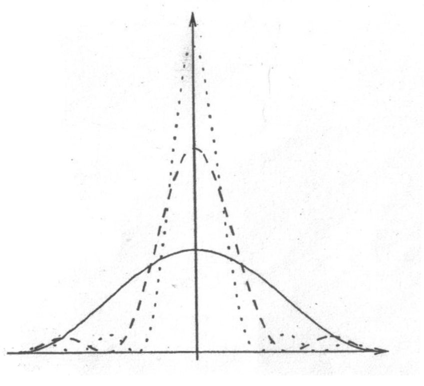

Abbildung 1: Familie guter Kerne

Man kann gute Kerne als Gewichtsverteilungen auf den Kreis interpretieren. Die 1. Eigenschaft guter Kerne stellt sicher, dass die Verteilung normiert bleibt, das heißt die Summe aller 1 ergibt. Die 3. Eigenschaft sorgt dafür, dass die guten Kerne für große n ihre „Masse“ im 0-Punkt konzentrieren. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung (1) eine Familie guter Kerne.

Die Kombination aus guten Kernen (2.1) und Faltung führt uns sofort zu folgender Aussage.

(2.2) Satz
Sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von guten Kernen, und f eine integrierbare Funktion über einem Kreis. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

für alle Punkte x, in denen f stetig ist. Wenn f stetig ist, dann ist der Limes gleichmäßig. ◇

Aufgrund dieses Resultats wird die Faltung mit einer Familie $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ auch als approximierende Identität bezeichnet. In diesem Kontext ist die Faltung der „gewichtete Durchschnitt“ von $f(x-y)$, während die guten Kerne Gewichtsfunktionen bilden; für große n verschwinden die Kerne in allen Punkten außer in denen nahe 0 und nimmt in 0 einen Wert nahe 1 an. Es wird also im Limes der Funktionswert von f an der Stelle x gewertet und zwar mit dem Wert 1.

(2.3) Bemerkung
Rückwirkend auf (1.3)

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$$

stellt sich die Frage, ob der Dirichlet-Kern ein guter Kern ist. Dann würde mit Satz (2.2) folgen, dass die Fourier-Reihe von f in allen Stetigkeitspunkten x gegen $f(x)$ konvergieren würde.
Es zeigt sicht, dass die 1. Eigenschaft guter Kerne vom Dirichlet-Kern erfüllt wird. Allerdings erfüllt der Dirichlet-Kern nicht die 2.Vorraussetzung für gute Kerne, denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq c \log N, \qquad \text{für } N \to \infty.$$

◇

Als Anwendung dieses Satzes ergibt sich, dass zum Beispiel Féjer-Kerne eignen, die Identität von Funktionen anzunähern.

(2.4) Lemma
Die Féjer-Kerne $\{F_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ aus Vortrag 10 (2.4) sind gute Kerne. $\diamond$

(2.5) Definition
Der Ausdruck

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x)$$

beschreibt das N-te Cesàro-Mittel der Fourier-Reihe mit den Partialsummen S_N von f. $\diamond$

(2.6) Satz
Ist f auf dem Kreis integrierbar, dann ist die Fourier-Reihe von f konvergent im Sinne von Cesàro gegen f, in allen Punken, in denen f stetig ist. $\diamond$

Es zeigt sich also, dass wir mit den schon bekannten Féjer-Kernen mithilfe von Satz (2.2) eine 2π-periodische integrierbare Funktion in allen x, in denen f stetig ist approximieren können.

Abschließend können wir also sagen, dass Stetigkeit kein ausreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Fourier-Reihe ist. Allerdings können wir nun die Konvergenz der Fourier-Reihe im Sinne von Cesàro gegen die Funktion in allen Stetigkeitspunkten der Funktion zeigen.