Topologische Grundbegriffe I

Vortrag zum Proseminar Analysis, 26.04.2010

Nina Neidhardt und Simon Langer

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass topologische Konzepte, die uns schon für die Reellen Zahlen bekannt sind, allgemein für metrischen Räumen gelten.

§1 Offene und Abgeschlossene Mengen

Im Folgenden wollen wir offene und geschlossene Mengen definieren und ihre Eigenschaften betrachten.

(1.1) Definition (Berührungspunkt einer Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt p einen Berührungspunkt von S, wenn es eine Folge $(p_n)_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ in S gibt, die gegen $p \in M$ konvergiert. $\diamond$

(1.2) Definition (Abgeschlossene Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt S abgeschlossen, wenn alle Berührungspunkte von S in S enthalten sind. $\diamond$

(1.3) Definition (Offene Menge)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Man nennt S offen, wenn für alle $p \in S$ ein $r > 0$ existiert, so dass für alle $q \in M$ mit $d(p, q) < r$ gilt, dass q ein Element von S ist. $\diamond$

(1.5) Satz (Komplemente offener/abgeschlossener Mengen)
Die Offenheit und die Abgeschlossenheit einer Menge sind dual zueinander. Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen und das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen. $\diamond$

(1.6) Bemerkung (Offene/Geschlossene Mengen)
Viele Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, zum Beispiel das Intervall $(a, b]$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Auch sein Komplement ist weder offen noch abgeschlossen. Allerdings können Mengen auch gleichzeitig offen und abgeschlossen sein. Das bekannteste Beispiel ist die Menge der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und sein Komplement in $\mathbb{R}$, die leere Menge ($\emptyset$). Beide Mengen sind abgeschlossen und offen. $\diamond$

(1.7) Definition (Topologie von M)
Sei M ein metrischer Raum.
Die Topologie von M ist definiert als die Menge $\mathcal{T}$ aller offenen Teilmengen von M.$\diamond$

(1.8) Satz (Eigenschaften der Topologie von M)
Sei M ein metrischer Raum. Die Topologie von M hat folgende drei Eigenschaften:

a) Jede Vereinigung offener Teilmengen von M ist wiederum offen.

b) Jeder endliche Schnitt offener Teilmengen von M ist wiederum offen.

c) M und die leere Menge sind offen. $\diamond$

(1.9) Satz (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)
Sei M ein metrischer Raum.

a) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind wiederum abgeschlossen.

b) Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wiederum abgeschlossen.

c) M und die leere Menge sind abgeschlossen. $\diamond$

(1.10) Bemerkung (Unendl. Vereinigungen abgeschlossener Mengen)
Im Allgemeinen sind unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen.
Betrachten wir beispielsweise die Mengen $U_k = [\frac{1}{k}, 1]$, $k \in \mathbb{N}$.
Jede einzelne Menge ist abgeschlossen, ihre Vereinigung aber ist die Menge $(0, 1]$. In dieser Menge gibt es eine Folge $(p_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ mit $p_n = \frac{1}{n}$ deren Limes 0 ist und nicht in der Menge liegt. Daher ist sie nicht abgeschlossen. $\diamond$

(1.11) Definition (Die Menge der Berührungspunkte)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Die Menge der Berührungspunkte ist definiert als die Menge aller Punkte $p \in M$, für die gilt, dass p ein Berührungspunkt von S ist. Man schreibt dafür auch $\lim S$. $\diamond$

(1.12) Definition (Die r-Umgebung von p in M)
Sei M ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$.
Die r-Umgebung von p in M ist definiert als die Menge aller Punkte q für die gilt, dass $d(p, q) < r$ und $q \in M$. Man schreibt dafür auch $M_r(p)$. $\diamond$

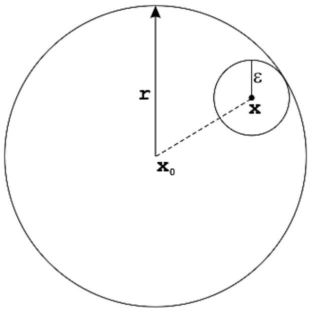
(1.13) Lemma
Sei M ein metrischer Raum, S eine Teilmenge von M, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) p ist ein Berührungspunkt von S.

b) Für alle $r > 0$ gilt: $M_r(p) \cap S \neq \emptyset$. ◇

(1.14) Satz (Die Menge der Berührungspunkte ist abgeschlossen)
Sei M ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von M.
Dann ist $\lim S$ abgeschlossen. ◇

(1.15) Satz (Die r-Umgebung von p in M ist offen)
Sei M ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $M_r(p)$ offen. ◇



(1.16) Definition (Die Umgebung Von p In M)
Sei M ein metrischer Raum mit $p \in M$ und V eine beliebige offene Teilmenge von M. Man nennt V eine Umgebung von p, wenn $p \in V$ ist. ◇

§2 Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$

Neben beschränkten offenen Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, kann man auch unbeschränkte offene Intervalle der Form $(-\infty, b)$, (a, ∞) und $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ betrachten.

(2.1) Lemma
Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ kann eindeutig als abzählbare Vereinigung disjunkter, offener Intervalle geschrieben werden. Die Endpunkte der Intervalle gehören nicht zu U. ◇

§3 Topologische Beschreibung von Stetigkeit

Eine Eigenschaft des metrischen Raums bzw. einer Abbildung zwischen metrischen Räumen, die allein durch offene (oder abgeschlossene) Mengen beschrieben werden kann, heißt topologische Eigenschaft.
Die folgende Erkenntnis beschreibt Stetigkeit topologisch:

(3.1) Definition (Urbild)
Seien M, N metrische Räume und sei die Abbildung $f : M \to N$ sowie $B \subset N$ gegeben. Dann ist

$$f^{pre}(B) := \{x \in M | f(x) \in B\}$$

das Urbild von B unter f. ◇

(3.4) Lemma
Seien M, N metrische Räume und $f : M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Eine Funktion $f : M \longrightarrow N$ mit $M \subset \mathbb{N}$ und $x_0 \in M$ beliebig heißt stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

b) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in N ist abgeschlossen in M.

c) Das Urbild jeder offenen Menge in N ist offen in M. ◇

(3.6) Lemma
Ein Homöomorphismus $f : M \to N$ bildet eine Familie von offenen Mengen von M bijektiv auf eine Familie von offenen Mengen von N ab. Er bildet die Topologien bijektiv ab. ◇

(3.7) Bemerkung
Ein Homöomorphismus heißt auch topologische Äquivalenz. Im Allgemeinen müssen stetige Abbildungen offene Mengen nicht auf offene Mengen schicken. ◇