Topologische Grundbegriffe II

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 03.05.2010

Dennis Joswig, Florian Goy

Aufbauend auf den Resultaten der Vorlesung Topologische Grundbegriffe I untersuchen wir weitere topologische Eigenschaften von metrischen Räumen. Darüber hinaus werden wir auch Resultate aus der Analysis I auf alle metrischen Räume ausdehnen.

§1 Begriffe auf Mengen

Wir führen nun die Begriffe Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes ein.

Sei im Folgenden M ein metrischer Raum und S Teilmenge von M.

(1.1) Definition (Abschluss)
Wir nennen $\bar{S}$ den *Abschluss* von S mit

$$\bar{S} := \bigcap_{\substack{S \subset K \\ \text{K abgeschlossen}}} K. \qquad \diamond$$

(1.2) Definition (Innere)
Wir nennen $\mathring{S}$ das *Innere* von S mit

$$\mathring{S} := \bigcup_{\substack{K \subset S \\ \text{K offen}}} K. \qquad \diamond$$

(1.3) Definition (Rand)
Wir nennen ∂S den *Rand* von S mit

$$\partial S := \bar{S} \cap \overline{S^c} = \bar{S} \setminus \mathring{S}. \qquad \diamond$$

Eine wichtige Eigenschaft des Abschlusses erhalten wir in dem

(1.4) Satz
Es gilt die Identität:

$$\bar{S} = \lim S. \qquad \diamond$$

§ 2 Vererbung

Im Folgenden untersuchen wir die Eigenschaften von metrischen Unterräumen. Dabei stellt sich die Frage, welche Eigenschaften eines metrischen Raumes an seinen Unterraum vererbt werden.
Seien N, M metrische Räume, S eine Teilmenge von M und S eine Teilmenge von N.
Sei zum Beispiel S offen in M, ist S dann auch offen in N?
Dass dies nicht der Fall sein muss, zeigt das folgende

(2.1) Beispiel
Seien a, b $\in \mathbb{R}$, a<b. Das Intervall (a, b) ist abgeschlossen in sich selbst, aber nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. $\diamond$

Notation: Da bei der Notation aus §1 nicht direkt hervorgeht, in welchem metrischen Raum operiert wird, führen wir die folgende Schreibweise ein:

$\mathrm{cl}_M(S)$ statt $\bar{S}$ (Abschluss von S in M),
$\partial_M(S)$ statt ∂S (Rand von S in M),
$\mathrm{int}_M(S)$ statt $\mathring{S}$ (Menge der inneren Punkte von S in M).

(2.2) Korollar
Sei M ein metrische Raum, N ein metrischer Unterraum von M, $r \in \mathbb{R}$, $p \in N$ und $S \subset N$. Dann gilt:

(i) $N_r p = M_r p \cap N$,

(ii) $cl_N(S) = cl_M(S) \cap N$. $\diamond$

(2.3) Satz (Vererbungsprinzip)
Sei $K \subset N \subset M$ und N ein metrischer Unterraum des metrischen Raumes M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist abgeschlossen in N.

(ii) Es existiert eine Teilmenge $L \subset M$, so dass L abgeschlossen ist in M und $K = L \cap N$.

Man sagt auch N *erbt* seine Abgeschlossenheit von M. ◇

(2.4) Korollar
Analog *erbt* ein Unterraum die Offenheit seines metrischen Oberraums.
Sei $K \subset N \subset M$ und N ein Unterraum des metrischen Raumes M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist offen in N.

(ii) Es existiert eine Teilmenge $L \subset M : L$ ist offen in M und $K = L \cap N$. ◇

(2.5) Korollar
Sei N ein metrischer Unterraum von M und sei N abgeschlossen in M.
Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $K \subset N$ ist abgeschlossen in N.

(ii) K ist abgeschlossen in M. ◇

(2.6) Korollar
Sei N ein metrischer Unterraum des metrischen Raumes M und N offen in M. Folgende Aussagen sind äquvivalent:

(i) Eine Menge $U \subset N$ ist offen in N.

(ii) U ist offen in M. ◇

§ 3 Cluster- & Kondensierungspunkte

In der Vorlesung Topologische Grundbegriffe I haben wir bereits Berührpunke einer Teilmenge S eines metrischen Raumes M kennengelernt. Dabei haben wir bereits den Unterschied zu dem uns bekannten Häufungspunkt festgestellt. Wir werden den Begriff der Berührpunkte jetzt noch weiter klassifizieren.

(3.1) Definition (Cluster)
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$.
Wir nennen $p \in M$ einen *Cluster* von S, wenn in jeder beliebigen Umgebung $U_r(p)$ unendlich viele Punkte von S enthalten sind. ◇

(3.2) Definition (Kondensierungspunkt)
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$.
Wir nennen $p \in M$ einen *Kondensierungspunkt* von S, wenn in jeder beliebigen Umgebung $U_r(p)$ überabzählbar viele Punkte von S enthalten sind. ◇

(3.3) Satz
Sei $S \subset M$, M ein metrischer Raum und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) p ist ein Cluster.

(ii) Es existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $S \setminus \{p\}$, so dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p kovergiert.

(iii) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existieren unendlich viele Punkte aus S.

(iv) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existieren mindestens zwei Punkte aus S.

(v) In jeder Umgebung $U_r(p)$ existiert mindestens ein von p verschiedener Punkt aus S. ◇

(3.4) Satz
Bezeichne S' die Menge aller Cluster von S. Dann gilt:

$$S \cup S' = \bar{S}. \qquad \diamond$$

(3.5) Korollar
S ist genau dann abgeschlossen, wenn $S' \subset S$. ◇

(3.6) Korollar
Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\inf S \in \bar{S} \text{ und } \sup S \in \bar{S}.$$

Falls S abgeschlossen ist, gilt:

$$\inf S \in S \text{ und } \sup S \in S. \qquad \diamond$$

§4 Produktmetrik

Wir definieren eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $M = M_1 \times M_2$ zweier metrischer Räume. Dabei verwenden wir drei intuitive Metriken auf M und zeigen, dass sie wohldefiniert sind.

(4.1) Lemma (Euklidische Metrik)
Seien $p, q \in M$ und d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Dann ist die Euklidische Metrik d_E gegeben durch:

$$d_E(p,q) := \sqrt{d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2}. \qquad \diamond$$

(4.2) Lemma
Seien $p, q \in M$, d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Dann ist die maximale Metrik d_{max} auf $M_1 \times M_2$ definiert durch:

$$d_{max}(p,q) := \max \{d_1(p_1,q_1), d_2(p_2,q_2)\} \qquad \diamond$$

(4.3) Lemma (Manhattan Metrik)
Seien $p, q \in M$ und d_1 die Metrik von M_1 und d_2 die Metrik von M_2. Wir definieren d_{sum} als die Manhatten Metrik mit

$$d_{sum}(p,q) := d_1(p_1,q_1) + d_2(p_2,q_2). \qquad \diamond$$

(4.4) Hilfssatz
Seien d_{max}, d_E und d_{sum} Metriken auf $M_1 \times M_2$ wie in Lemma (4.1), (4.2) und (4.3) definiert, dann gilt:

$$d_{max} \leq d_E \leq d_{sum} \leq 2 \cdot d_{max}. \qquad \diamond$$

(4.5) Satz
Sei $p_n = (p_{1n}, p_{2n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge in $M = M_1 \times M_2$. So sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) (p_n) kovergiert bezüglich der Metrik d_{max}.

(b) (p_n) kovergiert bezüglich der Metrik d_E.

(c) (p_n) kovergiert bezüglich der Metrik d_{sum}.

(d) (p_{1n}) und (p_{2n}) konvergieren in M_1 bzw. M_2. ◇

(4.6) Hilfssatz
Sei $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m$ ein Metrischer Produktraum und $d_1, \ldots, d_m$ die ensprechende Metrik. Weiterhin seien folgende Metriken definiert:

$$d_{sum}(p,q) := \sum_{i=1}^{m} d_i,$$
$$d_{max}(p,q) := \max\{d_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\},$$
$$d_E(p,q) := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2},$$

dann gilt:

$$d_{max} \le d_{sum} \le m \cdot d_{max}. \qquad \diamond$$

(4.7) Korollar
Sei $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, ..., p_{mn})$ mit $n \in \mathbb{N}$, eine Folge im kartesischen Produkt von m metrischen Räumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) (p_n) kovergiert bezüglich der Metrik d_{max}.

(c) (p_n) kovergiert bezüglich der Metrik d_{sum}.

(d) (p_{in}) konvergiert jeweils in M_i für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. ◇

(4.8) Korollar (Konvergenz im $\mathbb{R}^m$)
Eine Folge von Vektoren $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^m$ konvergiert in $\mathbb{R}^m$ genau dann, wenn jede seiner Komponenten $(v_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert für $1 \le i \le m$. Der Grenzwert dieser Folge ist der Vektor

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = (\lim_{n\to\infty} v_{1n}, \lim_{n\to\infty} v_{2n}, \ldots, \lim_{n\to\infty} v_{mn}). \qquad \diamond$$

§ 5 Stetigkeit der arithmetischen Funktionen auf $\mathbb{R}$

Wir schreiben im Folgenden die arithmetischen Operationen auf $\mathbb{R}$ als Abbildungen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und untersuchen sie auf Stetigkeit.

(5.1) Definition (Die arithmetischen Funktionen)
Wir definieren:
$f_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
$f_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$
$f_\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$
$f_\div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ ◇

(5.2) Satz
Die arithmetischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind stetig. ◇

(5.3) Korollar
Die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten reeller, stetiger Funktionen sind wieder stetig. ◇