Cauchy-Folgen und Kompaktheit

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 10.05.2010

Michael Engeländer, Jonathan Fell

§1 Cauchy-Folgen

— *Cauchy-Folgen* —

(1.1) Definition (Cauchy-Folgen auf metrischen Räumen)
Eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ , s.d. } \forall m, n \geq N : d(p_m, p_n) < \varepsilon. \qquad \diamond$$

(1.2) Lemma
Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. ◇

(1.3) Definition (Vollständigkeit von metrischen Räumen)
Ein Metrischer Raum M ist vollständig, wenn alle Cauchy-Folgen gegen einen Grenzwert in ihm konvergieren. ◇

(1.6) Satz
$\mathbb{R}^m$ ist ein vollständiger metrischer Raum. ◇

(1.7) Satz
Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischem Raumes ist ein vollständiger metrischer Raum. ◇

— *Beschränktheit auf metrischen Räumen* —

(1.9) Definition (Beschränktheit auf metrischen Räumen)
Eine Teilmenge S eines metrischen Raumes M heißt beschränkt, wenn ein $p \in M$ und ein $r > 0$ existieren, s.d. $S \subset U_r(p) \subset M$ ◇

(1.11) Satz
Jede Cauchyfolge befindet sich in einer beschränkten Teilmenge eines metrischen Raumes. ◇

(1.13) Lemma
Beschränktheit ist keine topologische Eigenschaft. ◇

(1.14) Definition
Eine Funktion heißt beschränkt, wenn ihr Bild beschränkt ist. ◇

§2 Kompaktheit

— *Kompaktheit* —

(2.1) Definition (Kompaktheit)
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M nennt man *(Folgen)Kompakt* falls zu jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen ein $a \in A$ konvergiert. $\diamond$

(2.2) Satz
Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.
Jedoch sind abgeschlossene und beschränkte Mengen i. A. nicht kompakt. $\diamond$

(2.4) Satz
Das kartesische Produkt von m kompakten Mengen ist kompakt. $\diamond$

(2.6) Satz (von Bolzano-Weierstrass)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^m$ besitzt eine beschränkte Teilfolge. $\diamond$

(2.7) Satz
Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt $\diamond$

Ein Spezialfall, in dem die Umkehrung von Satz 2.2 gilt, wird beschrieben im

(2.8) Satz (von Heine-Borel)
Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist kompakt. $\diamond$

— *Folgen geschachtelter kompakter Mengen* —

[Folgen geschachtelter Mengen]

(2.10) Definition (Folgen geschachtelter Mengen)
Eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt geschachtelt, genau dann, wenn gilt:
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \cdots$. Ihr Schnitt ist: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{p | \forall n \in \mathbb{N} : p \in A_n\}$.$\diamond$

(2.11) Beispiel
Sei $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{n}\right\}$. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geschachtelte Folge, die man sich als Kreise in der Ebene vorstellen kann. Es ist hierbei $\bigcap A_n = \{0\}$.

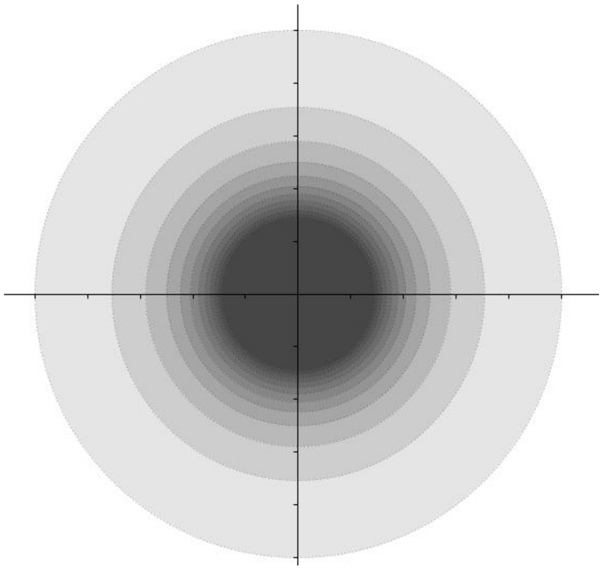

Abbildung 1: Beispiel 2.8

(2.12) Satz
Der Schnitt einer geschachtelten Folge nicht leerer, kompakter Mengen ist nicht leer und kompakt. ◇

Ein weiteres Charakteristikum von Mengen ist ihr Durchmesser.

(2.14) Definition
Der Durchmesser einer nicht-leeren Menge S ist das Supremum der Abstände der Elemente von S: Sei $S \subset M$, wobei M ein metrischer Raum ist und d(x,y) die zu M gehörende Metrik. Dann ist $diam(S) = sup\left\{d(x,y)|x,y \in S\right\}$ ◇

Mit dem Durchmesser erhält man eine Möglichkeit, über Intervallschachtelungen zu sprechen.

(2.15) Satz
Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge geschachtelter, nicht-leerer, kompakter Mengen mit einem Durchmesser, der gegen 0 konvergiert, dann ist $\bigcap A_n$ ein einzelner Punkt. ◇

— Stetigkeit und Kompaktheit —

(2.17) Satz
Ist $f : M \to N$ eine stetige Funktion, und ist A eine kompakte Teilmenge von M, dann ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von N. Anders: Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt. ◇

Ein besonders wichtiger Satz in diesem Zusammenhang ist der

(2.18) Satz (von Minimum und Maximum)
Eine Funktion über einer kompakten Menge ist beschränkt. Sie nimmt Minimum und Maximum an. $\diamond$