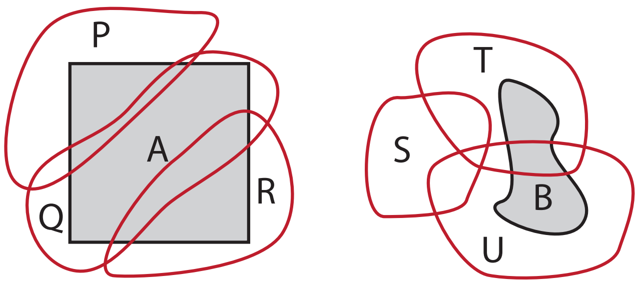
Kompaktheit und Überdeckungen

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 17.05.2010

Min Ge, Niklas Fischer

§1 Überdeckungskompaktheit

— *Einleitung* —



(a) (b)

Abbildung 1: Beispiele verschiedener Überdeckungen

(1.1) Definition (Überdeckung)
Eine Menge $\mathcal{U}$ heißt *Überdeckung* von A, wenn A in der Vereinigung der zu $\mathcal{U}$ gehörenden Elemente (welche auch Mengen sind) enthalten ist. ◇

(1.2) Beispiele

1. Die Menge $\mathcal{U} = \{P, Q, R\}$ überdeckt A. (Siehe Abbildung 1a)
2. $\mathbb{R}$ wird von $\{\{x\} | x \in \mathbb{R}\}$ überdeckt.
3. $\mathbb{Z}^2$ wird überdeckt von $\{\mathbb{R}^2\}$.
4. $(0, 1]$ wird überdeckt von $\left\{[\frac{1}{n}, 1], n \in \mathbb{N}\right\}$. ◇

(1.3) Definition (Reduktion, Teilüberdeckung)
Wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ beide A überdecken und $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ ist (damit ist gemeint, dass jede Menge, die Element von $\mathcal{V}$ ist, auch Element von $\mathcal{U}$ ist) dann heißt $\mathcal{V}$ *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$. Man sagt auch: *$\mathcal{U}$ reduziert sich zu $\mathcal{V}$*. ◇

(1.4) Beispiele

1. B wird von $\mathcal{V} = \{S, T, U\}$ überdeckt. $\mathcal{V}' = \{T, U\}$ ist eine Teilüberdeckung. (Siehe Abbildung 1b)
2. $[0,4]$ wird von $\mathcal{U} = \{[0,1], [1,2], [2,4]\}$ und $\mathcal{V} = \{[0,2], [2,4]\}$ überdeckt. $\mathcal{V}$ ist keine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, denn $[0,1], [1,2] \notin \mathcal{V}$.
3. Die Überdeckung $\mathcal{U} = \left\{ [\frac{1}{n}, 1] | n \in \mathbb{N} \right\}$ von $A = (0,1]$ kann nicht auf eine endliche Teilüberdeckung reduziert werden, da, nach der Wegnahme von beliebig vielen Elementen der Überdeckung $\mathcal{U}$, noch unendlich viele Elemente von $\mathcal{U}$ benötigt werden um A zu überdecken. ◇

(1.5) Definition (endliche Überdeckung)
Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt endlich, wenn die Mächtigkeit von $\mathcal{U}$ in $\mathbb{N}_0$ liegt. ◇

(1.6) Definition (offene Überdeckung)
Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt *offen*, wenn jedes Element von $\mathcal{U}$ eine offene Menge ist. ◇

(1.7) Beispiele

1. Sei $A = [0,4]$. So sind $\mathcal{U} = \{(-1,5)\}$ und $\mathcal{V} = \{(-1,1), (0,4), (3,5)\}$ offene Überdeckungen von A.
2. Jede Menge A hat eine offene, endliche Teilüberdeckung, denn es existiert immer eine offene Menge M, die alle Elemente von A enthält. $\mathcal{U} = \{M\}$ ist also eine offene, endliche Überdeckung von A. ◇

(1.8) Definition (Überdeckungskompakheit)
Wenn sich jede offene Überdeckung von A auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lässt, heißt A *überdeckungskompakt*. ◇

(1.9) Beispiel
Die Menge $(0,1]$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht überdeckungskompakt, da die Überdeckung

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

zwar offen ist, $\mathcal{U}$ sich jedoch nicht auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lässt. ◇

(1.11) Lemma (Überdeckungskompaktheit endlicher Mengen)
Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes ist überdeckungskompakt. ◇

— Die Lebesguezahl —

(1.13) Definition (Lebesguezahl)
Eine *Lebesguezahl* für eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von A ist eine positive reelle Zahl λ, die so gewählt ist, dass es für jedes $a \in A$ ein $W \in \mathcal{U}$ mit $U_\lambda(a) \subset W$ gibt. Dabei ist U_λ von a abhängig, aber λ für alle $a \in A$ konstant. ◇

(1.14) Lemma
Jede offene Überdeckung einer folgenkompakten Menge hat eine Lebesguezahl λ, die echt größer als 0 ist. ◇

— Folgen- und Überdeckungskompaktheit —

(1.15) Satz
Für eine Teilmenge A eines metrischen Raums sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist überdeckungskompakt.

b) A ist folgenkompakt. ◇

(1.17) Beispiel
Das oben besprochene Beispiel einer Überdeckung der Menge $(0,1] \in \mathbb{R}$ kann nun aus einem anderen Blickwinkel betrachtet werden. Da $(0,1]$ nicht abgeschlossen und beschränkt ist, was, wie wir aus der Analysis I wissen, äquivalent zur Folgenkompaktheit einer Menge ist, wissen wir nun auch, nach Satz (1.15), dass A nicht überdeckungskompakt ist. ◇

§2 Totalbeschränktheit

(2.1) Beispiel
Wir betrachten die Menge $A := [3,4] \cap \mathbb{Q}$.
A ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{Q}$. Aber A ist nicht kompakt, da zum Beispiel, die Folge $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} = (3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415, \ldots)$ gegen π konvergiert. Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit auch gegen π, das aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. ◇

(2.2) Beispiel
Mit der diskreten Metrik d können wir den metrischen Raum auf $\mathbb{N}$ vervollständigen. Denn falls eine Folge auf $\mathbb{N}$ konvergiert, so liegt ihr Grenzwert in $\mathbb{N}$. Aber $(\mathbb{N}, d)$ ist nicht kompakt, da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = k$ keine Teilfolge in $\mathbb{N}$ hat, die konvergiert. ◇

Um das Heine-Borel Lemma für den metrischen Raum zu verallgemeinern, müssen wir einen neuen Begriff, die *Totalbeschränktheit*, einführen.

(2.3) Definition (Totalbeschränktheit)
Eine Teilmenge $A \subset M$ ist *totalbeschränkt*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von A durch ε-Umgebungen gibt. $\diamond$

(2.4) Satz (Verallgemeinerter Satz von Heine-Borel)
Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist. $\diamond$

(2.5) Korollar
Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist. $\diamond$

§3 Perfekte metrische Räume

(3.1) Definition
Ein metrischer Raum M heißt *perfekt* wenn jedes $p \in M$ ein Häufungspunkt von M ist. $\diamond$

(3.2) Beispiel

a) $\mathbb{N}$ ist nicht perfekt
Denn sei $x \in \mathbb{N}$, und $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so ist $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{N} = \{x\}$. Somit kann kein Punkt in $\mathbb{N}$ ein Häufungspunkt sein.

b) $[a, b]$ ist perfekt.
Denn sei $x \in [a, b]$, so enthält die Umgebung $U_\varepsilon(x)$ für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte von $[a, b]$.

c) $\mathbb{Q}$ ist perfekt.
Denn sei $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$. Somit liegt $\frac{y}{x}$ in $\mathbb{Q}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine ε-Umgebung von $\frac{y}{x}$ mit $U_\varepsilon(\frac{y}{x}) = \left(\frac{y}{x} - \varepsilon, \frac{y}{x} + \varepsilon\right)$. Es ist klar, dass $U_\varepsilon(\frac{y}{x}) \cap \mathbb{Q}$ eine unendliche Menge ist. Folglich ist $\frac{y}{x}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$. Da $\frac{y}{x}$ ein beliebiger Punkt in $\mathbb{Q}$ ist, dann ist jeder Punkt in $\mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt. Folglich ist $\mathbb{Q}$ perfekt. $\diamond$

(3.3) Lemma
Jeder nicht leere, perfekte, vollständige metrische Raum ist überabzählbar.

(3.4) Korollar
$\mathbb{R}$ und $[a, b]$ sind überabzählbar. $\diamond$

(3.5) Korollar
Ein nicht-leerer, perfekter und vollständiger metrischer Raum ist überall überabzählbar in dem Sinne, dass jede r-Umgebung überabzählbar ist. $\diamond$

Literatur

[1] Pugh, Charles Chapman. *Real Mathematical Analysis* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002, Seiten 88-95

[2] Krieg, Aloys. *Analysis I* Lehrstuhl A für Mathematik, Aachen, 2004