Gleichmäßige Konvergenz und Funktionenräume

Isabella Lukasewitz und Andreas Brack

07.06.2010

Bereits in den Vorlesungen zur Analysis haben wir das Konzept der Konvergenz kennengelernt – sei es die von Folgen, mit der Erweiterung auf Reihen, sei es die von Funktionen. Diese Konvergenz auf $\mathbb{R}$ kann auf gleiche Art auch auf allgemeine metrische Räume ausgeweitet werden. Im Endeffekt stellt sich die entscheidende Frage, welche Eigenschaften der Folgenglieder auf die Grenzfunktion übertragen werden und welches Konzept von Konvergenz man hierbei betrachten muss. Dieser Fragestellung widmen wir uns im ersten Teil des Vortrags.

Konkreter werden die metrischen Räume im zweiten Abschnitt. Wir betrachten den Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$, $C_b(\mathbb{R})$, hinsichtlich der Supremumsmetrik und analysieren einige seiner Teilräume auf ihre topologischen Eigenschaften.

Übersichtlicher ist folgende Darstellung:

Inhaltsverzeichnis

1 Konvergenz von Funktionen **3**

1.1 Punktweise Konvergenz 3

1.1.1 Definition: Punktweise Konvergenz von Funktionen 3

1.2 Gleichmäßige Konvergenz 3

1.2.1 Definition: gleichmäßige Konvergenz von Funktionen 3

1.2.2 Lemma: gleichmäßige Konvergenz der Grenzfunktion 4

1.2.4 Satz: Stetigkeit der Grenzfunktion 4

1.2.6 Beispiel: Growing Steeple 5

2 Funktionenräume **6**

2.1 Definition: $C_b(D, \mathbb{R})$ - Beschränkte Funktionen 6

2.1.1 Definition: Supremumsnorm 6

2.1.3 Definition: Supremumsmetrik 6

2.1.4 Satz: Konvergenz der Metrik 7

2.1.5 Satz: Vollständigkeit von C_b 7

2.2 Definition: $C^0([a, b])$ - Stetige Funktionen 7

2.2.1 Korollar: Abgeschlossenheit von C^0 in C_b 7

2.3 Definition: $C_C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - Funktionen mit kompaktem Träger 7

2.4 Definition: $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - "Funktionen, die bei unendlich verschwinden" 8

2.4.1 Lemma: Inklusionen 8

2.4.2 Satz: $\overline{C_C(\mathbb{R})} = C_0$ 8

2.4.3 Korollar: Unvollständigkeit von $C_C(\mathbb{R})$ und Vollständigkeit von $C_0(\mathbb{R})$ 8

1 Konvergenz von Funktionen

1.1 Punktweise Konvergenz

1.1.1 Definition: Punktweise Konvergenz von Funktionen

Sei M eine nichtleere Menge und (K, d_k) ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$, wenn für jedes $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

in (K, d_k) gilt. Schreibweise: $f_n \to f$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Diese Vorstellung einer punktweisen Konvergenz ist zwar unmittelbar einleuchtend, als Kriterium jedoch nicht immer stark genug. Deshalb benötigen wir bisweilen eine striktere Form der Konvergenz, die wir also auch gleich einführen.

1.2 Gleichmäßige Konvergenz

1.2.1 Definition: gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

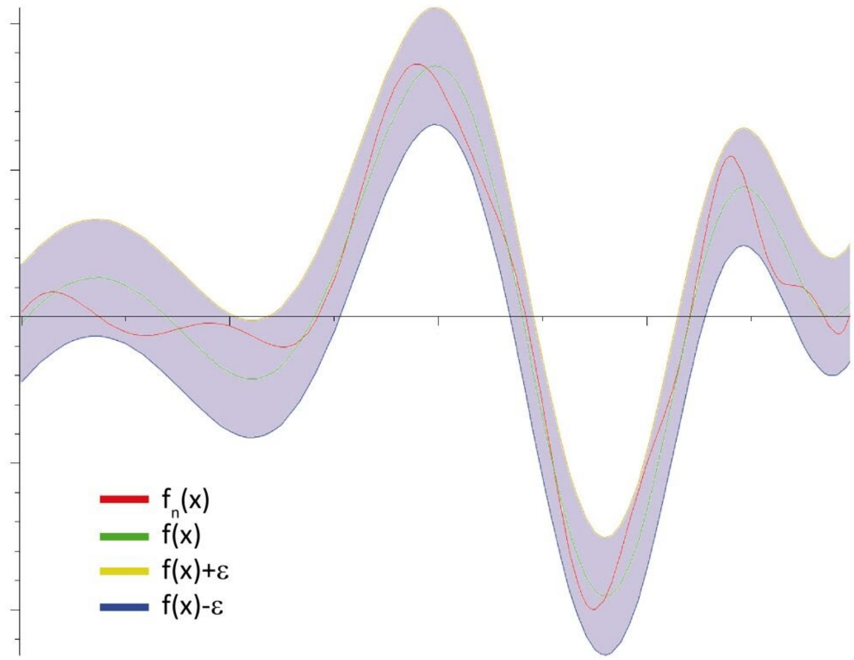
Sei M eine nichtleere Menge und (K, d_k) ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$d_k(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in M$ gilt.

Die Funktion f ist die gleichmäßige Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Schreibweise $f_n \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$ oder $\operatorname{unif}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$



1.2.2 Lemma: gleichmäßige Konvergenz der Grenzfunktion

Sei M eine nichtleere Menge und (K, d_k) ein metrischer Raum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ eine Folge von Funktionen, die nach Definition 1.2.1 gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : M \to K$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise nach Definition 1.1.1 gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$.

Als nächstes kann man sich fragen, welche Eigenschaften von Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz übertragen werden. Eine wichtige Aussage hierzu betrifft die Stetigkeit der Folgenglieder.

1.2.4 Satz: Stetigkeit der Grenzfunktion

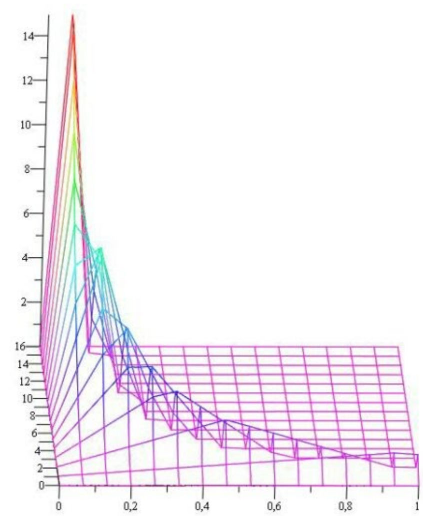
Seien (M, d_m), (K, d_k) metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ eine Folge von Funktionen. Es gelte $f_n \underset{glm}{\longrightarrow} f$. Sind außerdem die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in M$, so ist auch f stetig im Punkt x_0.

1.2.6 Beispiel: Growing Steeple

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Growing Steeple



Offensichtlich konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Aber konvergiert die Funktion denn auch gleichmäßig?

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und betrachte den Punkt $x = \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$f_n(x) = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n > \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also liegt sogar keine einzige Funktion der Folge vollständig innerhalb der ε-Umgebung. Folglich ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergent.

Insgesamt lässt sich zeigen, dass weder Stetigkeit noch gleichmäßige Beschränktheit oder ein kompakter Definitionsbereich ausreichen, um gleichmäßige Konvergenz bei punktweiser Konvergenz zu garantieren.

2 Funktionenräume

Die eben dargelegten Konzepte der Konvergenz haben wir auf allgemeinen metrischen Räumen betrachtet. Nun werden wir etwas konkreter: Wir nutzen die obigen Begrifflichkeiten und Erkenntnisse dazu, verschiedene Funktionenräume, also Teilräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Die Metrik, hinsichtlich derer wir diese Räume betrachten, nennen wir Supremumsmetrik.

2.1 Definition: $C_b(D, \mathbb{R})$ - Beschränkte Funktionen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $C_b(D, \mathbb{R})$ die Menge aller *beschränkten* Funktionen von $D \to \mathbb{R}$. Speziell definieren wir:

$$C_b := C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

2.1.1 Definition: Supremumsnorm

Sei $f \in C_b$. Wir definieren die *Supremumsnorm* auf C_b als:

$$\| f \| := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$$

Schreibweise: $\| f \| = \sup |f(x)|$, $\| f \|_{\text{sup}}$ oder $\| f \|_\infty$.

2.1.3 Definition: Supremumsmetrik

Seien $f, g \in C_b$. Wir definieren die *Supremumsmetrik* auf C_b als

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in D\}.$$

Mit Hilfe der Supremumsmetrik lässt sich die Definition der gleichmäßigen Konvergenz so umformen.

2.1.4 Satz: Konvergenz der Metrik

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0.$$

2.1.5 Satz: Vollständigkeit von C_b

C_b ist ein vollständiger metrischer Raum.

2.2 Definition: $C^0([a,\, b])$ - Stetige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte. $C^0(D,\, \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{R}$.

Speziell definieren wir:

$$C^0 := C^0([a,b],\mathbb{R}).$$

2.2.1 Korollar: Abgeschlossenheit von C^0 in C_b

C^0 ist eine abgeschlossene Teilmenge von C_b. C^0 ist ein vollständiger metrischer Raum.

2.3 Definition: $C_C(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$ - Funktionen mit kompaktem Träger

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \neq 0\}}$$

den Träger von f.

Das führt uns zu folgender Definition von $C_C(\mathbb{R})$:

$f \in C_C(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Bemerkung: Das heißt, dass ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert, so dass

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \notin [a, b].$$

2.4 Definition: $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - "Funktionen, die bei unendlich verschwinden"

Es ist genau dann $f \in C_0(\mathbb{R})$, wenn gilt:

$$f \in C^0(\mathbb{R})$$

und für alle $\varepsilon > 0$ ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ gilt:

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Anschaulich gesprochen bedeutet das, dass f beliebig klein wird für $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

2.4.1 Lemma: Inklusionen

Es gilt:

$$C_C(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}).$$

Es gilt aber

$$C_0(\mathbb{R}) \subsetneqq C_b(\mathbb{R}).$$

Außerdem sind die Elemente von $C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.

2.4.2 Satz: $\overline{C_C(\mathbb{R})} = C_0$

Sei $\overline{C_C(\mathbb{R})} \subset C_b(\mathbb{R})$ der *Abschluss* bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Dann gilt: $\overline{C_C(\mathbb{R})} = C_0(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $C_0(\mathbb{R})$ *abgeschlossen.*

2.4.3 Korollar: Unvollständigkeit von $C_C(\mathbb{R})$ und Vollständigkeit von $C_0(\mathbb{R})$

1. $(C_C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist *nicht* vollständig.

2. $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.