Kompaktheit und gleichgradige Stetigkeit

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 14.06.2010

Manon Wieschermann
Matthias Klupsch

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Kompaktheit von Teilräumen vom Raum der stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N), den wir mit $\mathcal{C}^0(M, N)$ bezeichnen. Hierbei werden meistens $M = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $N = \mathbb{R}$ und d_M, d_N die jeweils durch den Betrag induzierte Metriken sein. Deshalb werden wir kurz $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ schreiben. Es soll die Frage geklärt werden, welche Teilmengen von $\mathcal{C}^0$ kompakt sind und wann Funktionenfolgen in $\mathcal{C}^0$ Häufungspunkte besitzen.

§1 Einführung in die Kompaktheit in $\mathcal{C}^0$

In diesem Abschnitt zeigen wir, warum der Raum der stetigen Funktionen bei der Betrachtung von Kompaktheit Probleme bereiten kann. Zuvor noch eine

(1.1) Bemerkung (Norm und Metrik)
Auf $\mathcal{C}^0$ lässt sich die folgende Norm definieren:

$$\|f\| = \sup\{\ |f(x)| \ \mid\ x \in [a, b]\ \}.$$

Die dadurch auf $\mathcal{C}^0$ induzierte Metrik ist gegeben durch

$$d(f, g) := \sup\{\ |f(x) - g(x)| \ \mid\ x \in [a, b]\ \}.$$

Bezüglich dieser Metrik ist $\mathcal{C}^0$ vollständig, das heißt, dass alle Cauchy-Folgen in $\mathcal{C}^0$ konvergieren.
Im Folgenden werden nur diese Norm und diese Metrik auf $\mathcal{C}^0$ verwendet. $\diamond$

— Einführendes Beispiel —

Zunächst erinnern wir an den

(1.2) Satz (von Heine-Borel)
Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist kompakt.

b) A ist abgeschlossen und beschränkt. $\diamond$

Dabei gilt die Folgerung "a) $\Rightarrow$ b)" sogar für beliebige metrische Räume, die Umkehrung muss allerdings nicht immer zutreffen, wie wir noch sehen werden.
Nach Heine-Borel sind abgeschlossene und beschränkte Räume im $\mathbb{R}^m$ also stets kompakt. Im $\mathcal{C}^0$ gilt das in dieser Form nicht.

(1.3) Lemma
Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathcal{B} = \{ \, f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \;\; | \;\; \|f\| \leq 1 \, \}$ ist abgeschlossen und beschränkt, aber keine kompakte Teilmenge von $\mathcal{C}^0$. $\diamond$

Der Grund für die Problematik ist, dass der Raum $\mathcal{C}^0$ unendlich-dimensional ist. Im Folgenden werden wir erläutern, unter welchen zusätzlichen Bedingungen eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathcal{C}^0$ kompakt ist.
Es folgt ein kleiner Hilfssatz, den wir später benötigen werden.

(1.4) Lemma
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ kompakt. Dann gilt:

a) A besitzt eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge.

b) Sei D dicht in A. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge D_δ von D, sodass es zu jedem $a \in A$ ein $x \in D_\delta$ gibt mit $d(x, a) < \delta$. $\diamond$

Da jede kompakte Menge dicht in sich selbst liegt, kann (1.4) b) auch ohne explizite Nennung einer dichten Teilmenge verwendet werden.

— *Gleichgradige Stetigkeit* —

Nun wollen wir die für diesen Vortrag entscheidene Definition angeben:

(1.5) Definition (Gleichgradige Stetigkeit)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$.

i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in M$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [a, b]$ mit $d(x, t) < \delta$ folgt:
$$|f_n(x) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in M$ mit $d(s, t) < \delta$ folgt:
$$|f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Dabei ist zu beachten, dass δ nur von ε und nicht von n abhängen darf.
Gleichmäßig gleichgradige Stetigkeit werden wir im Folgenden als gleichgradige Stetigkeit bezeichnen.

Diese Definition lässt sich leicht auf Mengen von Funktionen erweitern.
Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ eine Menge von Funktionen. Dann heißt $\mathcal{E}$ *gleichgradig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $f \in \mathcal{E}$ und alle $s, t \in M$ mit $d(s, t) < \delta$ folgt:
$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Dabei hängt δ nicht von einem speziellen f ab. ◇

(1.6) Beispiele

1. Ist die Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0$ endlich, so ist sie gleichgradig stetig.
2. Die Folge $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist nicht gleichgradig stetig. ◇

§2 Der Satz von Heine-Borel für $\mathcal{C}^0$

Jetzt wollen wir beginnen, die Kompaktheit von Mengen von Funktionen im $\mathcal{C}^0$ zu analysieren.

— Der Satz von Arzela-Ascoli —

Zunächst wenden wir uns einem grundlegenden Satz über gleichgradige Stetigkeit zu. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen gleichgradiger Stetigkeit und gleichmäßiger Konvergenz.

(2.1) Satz (Satz von Arzela-Ascoli)
Jede Folge von beschränkten, gleichgradig stetigen Funktionen in $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. $\diamond$

Dieser Beweis führt uns zu einem weiteren Resultat:

(2.2) Satz (Fortssetzungssatz von Arzela-Ascoli)
Punktweise Konvergenz einer gleichgradig stetigen Folge von Funktionen auf einer dichten Teilmenge des Definitionbereiches setzt sich zu gleichmäßiger Konvergenz auf dem ganzen Definitionsbereich fort. $\diamond$

Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt zudem noch folgendes

(2.3) Korollar
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, deren Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind.
Wenn es ein x_0 gibt, sodass $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, so hat die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert. $\diamond$

— Heine-Borel für Funktionenräume —

Der nächste Satz stellt nun den Zusammenhang zur Kompaktheit her und ist eigentlich eine topologische Version des Satzes von Arzela-Ascoli:

(2.4) Satz (Satz von Heine-Borel für Funktionenräume)
Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^0$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig ist. $\diamond$

§3 Fazit

Damit ist jetzt klar, wie man den Satz von Heine-Borel auf Funktionenräume erweitern kann. Zusätzlich zu den Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt muss man noch gleichgradige Stetigkeit prüfen. Dann kann man auf Kompaktheit des Raumes schließen. Obwohl in den Beweisen stets von $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ ausgegangen wurde, gelten die Resultate, insbesondere der Satz von Arzela-Ascoli auf Grund von (1.4) a), für alle Funktionenräume $\mathcal{C}^0(M,\mathbb{R})$, solange M kompakt ist.