Der Satz von Stone-Weierstraß

Vortrag zum Proseminar Analysis, 28.06.2010

Valentina Gerber, Sabrina Kielmann

Aus der Vorlesung Analysis I und II kennen wir das Konzept des Approximierens. Uns wurden die Begriffe Taylor- und Bernsteinpolynome vorgestellt, die uns den Umgang mit reellen und komplexen Funktionen erleichtern.

Nun wollen wir dieses Konzept vertiefen. Wir schauen uns zuerst den Satz von Weierstraß an und gehen dann eine Stufe tiefer durch den Stone-Weierstraß, der Approximationen auf dem metrischen Raum ermöglicht. Auch lernen wir in diesem Zusammenhang den Begriff Funktionenalgebra kennen.

§ 1 Approximationssatz von Weierstraß

In diesem Abschnitt wollen wir sämtliche Vorarbeit leisten um später leichter den Satz von Stone-Weierstraß beweisen zu können.

— Funktionenalgebra —

Zunächst müssen wir den Begriff Funktionenalgebra und die Eigenschaften dieser einführen.

(1.1) Definition (Funktionenalgebra)
Sei M ein kompakter metrischer Raum und $C^0(M, \mathbb{R})$ beziehungsweise $C^0(M)$ der vollständige reelle Raum der über M stetigen reellwertigen Funktionen. Wir bezeichnen $A \subseteq C^0(M)$ als *Funktionenalgebra*, wenn A bezüglich Addition, skalarer Multiplikation und der Multiplikation von Funktionen abgeschlossen ist, das heißt seien $f, g \in A$ und c eine reele Konstante, dann gilt:

$$f + g \in A,$$
$$cf \in A,$$
$$f \cdot g \in A.$$

Ein einfaches Beispiel ist das Folgende.

(1.2) Beispiel
Die Menge der Polynome ist eine Funktionenalgebra.
Denn wie wir aus der Analysis wissen, sind die Polynome sowohl bezüglich Addition als auch bezüglich Multiplikation und der skalaren Multiplikation abgeschlossen. ◇

Nun werden zwei weitere Eigenschaften einer Funktionenalgebra definieren.

(1.3) Definition
Sei $A \subseteq C^0(M)$ eine Funktionenalgebra.

(i) Eine Funktionenalgebra **verschwindet in einem Punkt** $p \in M$, wenn $f(p) = 0$ für alle $f \in A$ gilt.

(ii) Eine Funktionenalgebra A heißt **punktetrennend**, wenn zu jedem Paar $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$, ein $f \in A$ existiert mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. ◇

Auch für diese Eigenschaften gibt es ein anschauliches Beispiel.

(1.4) Beispiel
Die Funktionenalgebra der Polynome mit 0 als konstanten Term verschwindet im Punkt $x = 0$. ◇

— Approximationssatz von Weierstraß —

Da die wohl bekannteste und umgänglichste Funktion das Polynom ist, werden wir versuchen Elemente aus der Menge der stetigen Funktionen durch Polynome zu approximieren.

Beschäftigen wir uns vorab mit den besonderen Eigenschaften folgender Funktion:

$$r_k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ k, n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

(1.5) Bemerkungen
Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} r_k(x) = 1,$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$ ◇

Nun sind wir soweit den Approximationssatz von Weierstraß zu formulieren und zu beweisen. Dieser legt den Grundstein für den Satz von Stone-Weierstraß.

(1.6) Definition (Approximationssatz)
Die Menge der Polynome ist dicht in $C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, das heißt für jedes $f \in C^0[a,b]$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p , so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon\ . \qquad \diamond$$

— *Hilfsaussagen* —

Der Satz von Stone-Weierstraß ist sehr umfangreich, also werden wir vorab ein paar Hilfsaussagen beweisen.

(1.7) Lemma
Sei $A \subseteq C^0(M,\mathbb{R})$ eine punktetrennende und nirgens verschwindende Funktionalgebra, weiter seien die voneinander verschiedenen Punkte p_1 und p_2 und die Konstanten c_1 und c_2 in $\mathbb{R}$ gegeben, dann existiert eine Funktion $f \in A$ mit $f(p_1) = c_1$ und $f(p_2) = c_2$. $\diamond$

(1.8) Lemma
Der Abschluss einer Funktionenalgebra in $C^0(M,\mathbb{R})$ ist wieder eine Funktionenalgebra. $\diamond$

(1.9) Hilfssatz
Sei A eine Funktionenalgebra, dann ist $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$. $\diamond$

(1.10) Lemma
Sei A eine eine Funktionenalgebra in $C^0(M)$, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Sei $f \in \overline{A}$, dann ist auch $|f| \in \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ der Abschluss von A in $C^0(M)$ ist. $\diamond$

(1.11) Lemma
Sei A eine punktetrennende Funktionenalgebra, die in keinem Punkt verschwindet und seien $f,g \in \overline{A}$. Dann sind $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ auch Funktionen in $\overline{A}$. $\diamond$

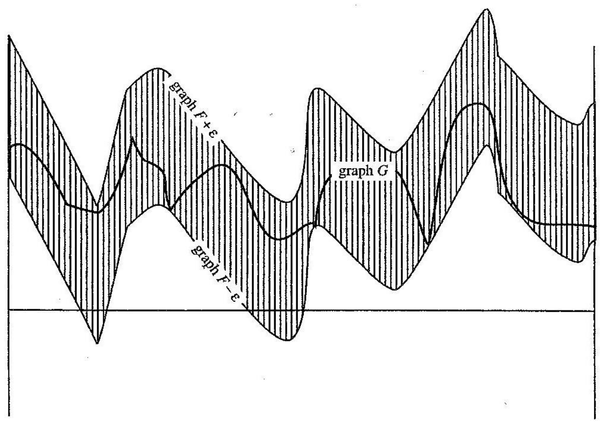
Da die Vorarbeiten jetzt geleistet wurden, können wir uns nun dem Beweis vom Satz von Stone-Weierstrass widmen.

§2 Der Satz von Stone-Weierstraß

In diesem Abschnitt werden wir den Satz von Stone-Weierstraß beweisen. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Approximationsatzes von Weierstraß auf Funktionenalgebren in $C^0(M,\mathbb{R})$, wobei M ein kompakter metrischer Raum ist.

(2.1) Satz (Stone-Weierstraß)
Sei A eine Funktionsalgebra in $C^0(M,\mathbb{R})$ wie in (1.1) definiert, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Dann liegt A dicht in $C^0(M)$:
Zu gegebenen $F \in C^0(M)$ und $\varepsilon > 0$ ist ein $G \in A$ gesucht, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$F(x) - \varepsilon < G(x) < F(x) + \varepsilon. \qquad \diamond$$



Der Graph von G liegt im ε-Schlauch von F

§3 Anwendungen

Nun wollen wir die Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß an Hand der folgenden zwei Beispielen demonstrieren.

(3.1) Korollar
Wenn M eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist, dann kann P als Funktionenalgebra aller Polynome in den k reellen Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gewählt werden. Dann liegt P dicht in $C^0 M$. $\diamond$

Ein weitere interessante Anwendung ist die Approximation von 2π-periodischen Funktion in $\mathbb{R}$.
Um dies zeigen zu können,wird eine komplexe Version des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß benötigt.

(3.2) Satz (Komplexer Stone-Weierstraß)
Sei M ein kompakter metrischer Raum und A eine Funktionenalgebra in $C^0(M,\mathbb{C})$ wie in (1.1) definiert, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist, und enthalte A zusätzlich noch zu jedem $p \in A$ auch das Konjugierte $\overline{p}$. Dann liegt A dicht in $C^0(M,\mathbb{C})$. $\diamond$

Nun kann man mit Hilfe des komplexen Satzes von Stone-Weierstraß zeigen, dass die stetigen komplexen Funktionen auf dem Einheitskreis S^1 durch Funktionen der Form $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ approximiert werden können.

(3.3) Korollar
Sei S^1 der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Dann gibt es zu jeder stetigen komplexen Funktion $f \in C^0(S^1,\mathbb{C})$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k \right| < \varepsilon \text{ für alle } z \in S^1.$$

Das heißt, die Menge $\mathcal{P} := \{f\colon S^1 \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k, c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $C^0(S^1,\mathbb{C})$. $\diamond$

Da wir dies nun gezeigt haben können wir nun die gewünschte Approximation von 2π-periodischen Funktionen in $\mathbb{R}$ zeigen, da hierfür eine kurzzeitige Transformation ins Komplexe benötigt wird.

(3.4) Korollar
Jede 2π-periodische stetige Funktion in $x \in \mathbb{R}$ kann gleichmäßig durch ein trigonometrisches Polynom $T(x) = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos kx + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \sin kx$ approximiert werden.
Das heißt die Menge $\mathcal{T} := \{T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos kx + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \sin kx,$ $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, .., n, n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $C^0(\mathbb{R})$. $\diamond$