
Die Modulgruppe

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 31.03.2010

Jens Lennartz

Die vorliegende Ausarbeitung behandelt die Gruppe der 2×2 -Matrizen mit Einträgen in den ganzen Zahlen und Determinante Eins; diese nennt man die Modulgruppe. Dabei wird zunächst die Gruppenoperation der allgemeinen linearen Gruppe auf der Riemannschen Zahlenkugel betrachtet. Anschließend wird die Modulgruppe eingeführt und wir beschäftigen uns mit der Operation der Modulgruppe auf der oberen Halbebene. Abschließend werden wir dann die Erzeuger der Modulgruppe sowie einen Fundamentalbereich kennenlernen.

Inhaltsverzeichnis

1	Die Operation der Gruppe GL_2	2
2	Definition der Modulgruppe Γ	5
3	Ein Fundamentalbereich von Γ	9

§1 Die Operation der Gruppe GL_2

Wir betrachten zunächst die Gruppe $GL_2(\mathbb{C}) := \{g \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det(g) \neq 0\}$. Diese operiert auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ durch Matrixmultiplikation gemäß $g \cdot (z, w) = (z, w)g^T = (az + bw, cz + dw)$ für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ und $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Da für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda g) \cdot (z, w) = (\lambda az + \lambda bw, \lambda cz + \lambda dw) = g \cdot (\lambda z, \lambda w)$, operiert $GL_2(\mathbb{C})$ auch auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, den wir als die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von \mathbb{C}^2 definieren oder anschaulich als die Menge aller Geraden in \mathbb{C}^2 durch den Ursprung. Jeder Vektor in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ spannt einen solchen Unterraum auf und zwei Vektoren spannen genau dann denselben Unterraum auf, wenn sie durch die natürliche \mathbb{C}^\times -Operation auseinander hervorgehen, wobei wir mit \mathbb{C}^\times die Gruppe der Einheiten von \mathbb{C} bezeichnen, also die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente, $\mathbb{C}^\times := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Wir haben also einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times.$$

Die Elemente von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ schreibt man als $[z, w]$, wobei $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ und es gilt

$$[z, w] = [z', w'] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : (z', w') = (\lambda z, \lambda w).$$

Für $w \neq 0$ existiert somit genau ein Vertreter der Form $[z, 1]$. Damit ist die Abbildung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $z \mapsto [z, 1]$ eine Injektion, mittels der wir \mathbb{C} nun als eine Teilmenge von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ auffassen können. Das Komplement von \mathbb{C} in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ besteht aus einem einzigen Punkt $[1, 0] = \infty$. Daher können wir den projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren.

Mit der oben definierten Gruppenoperation ist dann:

$$g \cdot [z, 1] = [az + b, cz + d] = \left[\frac{az + b}{cz + d}, 1 \right],$$

falls $cz + d \neq 0$. Aufgrund der gerade beschriebenen möglichen Identifikation von $\hat{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lassen wir nun $GL_2(\mathbb{C})$ durch gebrochene lineare Transformation auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ operieren, das heißt für $z \in \mathbb{C}$ sei:

$$g \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } cz + d \neq 0, \\ \infty & \text{falls } cz + d = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Hierbei ist zu beachten, dass $az + b$ und $cz + d$ nicht gleichzeitig Null sein können. Denn angenommen, es gelte $az + b = 0 = cz + d$, dann folgt für $a = 0$ aus $\det(g) = ad - bc \neq 0$, dass $b \neq 0$ im Widerspruch zu $az + b = 0$. Für $a \neq 0$ erhält man

$z = -b/a$, woraus $c(-b/a) + d = 0$ folgt, was äquivalent zu $ad = bc$ ist und somit erhalten wir einen Widerspruch zu $ad - bc \neq 0$.

Weiter setzen wir

$$g.\infty = \lim_{|z| \rightarrow \infty} g.z = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0, \\ \infty & \text{falls } c = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ operieren trivial, daher reicht es, die Operation auf die Untergruppe $SL_2(\mathbb{C}) := \{g \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ einzuschränken. Denn für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ mit $\det(\gamma) = \lambda^2$ gilt

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}}_{=: \tilde{\gamma}} \gamma.z,$$

wobei $\det(\tilde{\gamma}) = 1$, also $\tilde{\gamma} \in SL_2(\mathbb{C})$.

Eine wichtige Eigenschaft der Operation von $SL_2(\mathbb{C})$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ halten wir fest in dem

Lemma 1.1. *Die Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ operiert transitiv auf der Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$. Wenn diese Operation auf die Untergruppe $G := SL_2(\mathbb{R})$ eingeschränkt wird, zerfällt $\hat{\mathbb{C}}$ in drei Bahnen: \mathbb{H} und $-\mathbb{H}$, sowie die Einpunktkompaktifizierung $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der reellen Zahlengraden.*

Beweis. Zeige zunächst, dass $\hat{\mathbb{C}}$ nur aus einer $SL_2(\mathbb{C})$ -Bahn besteht.

Dazu sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist $\begin{pmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, denn $\det \left\{ \begin{pmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = z - (z-1) = 1$, und es gilt nach (2):

$$\begin{pmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\infty = z$$

Weiter gilt für ∞ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\infty = \infty$$

Damit ist gezeigt $\hat{\mathbb{C}} \subseteq \{g.\infty \mid g \in SL_2(\mathbb{C})\}$ und folglich, da $\hat{\mathbb{C}} \supseteq \{g.\infty \mid g \in SL_2(\mathbb{C})\}$ immer gilt, hat man Gleichheit beider Mengen, also $\hat{\mathbb{C}} = \{g.\infty \mid g \in SL_2(\mathbb{C})\}$. Das heißt, alle Elemente von $\hat{\mathbb{C}}$ liegen in einer $SL_2(\mathbb{C})$ -Bahn und damit operiert $SL_2(\mathbb{C})$ transitiv auf der Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.

Speziell erhält man damit, dass $\hat{\mathbb{R}}$ in der G -Bahn von ∞ liegt, ersetze dazu in obigem $z \in \mathbb{C}$ durch $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$ und es gilt $\hat{\mathbb{R}} \subseteq \{g.\infty \mid g \in G\}$.

Sei nun weiter $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, das heißt $ad - bc = 1$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g.z) &= \operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(ax + b + iay)(cx + d - icy)}{(cx + d + icy)(cx + d - icy)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{(ax + b)(cx + d) + iya(cx + d) - iyc(ax + b) + acy^2}{\underbrace{(cx + d)^2 + c^2y^2}_{=|cz+d|^2}} \right) \quad (3) \\ &= \frac{acxy - acxy + y(ad - bc)}{|cz + d|^2} = \frac{y}{|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, die Operation von G lässt die drei Mengen \mathbb{H} , $-\mathbb{H}$ und $\hat{\mathbb{R}}$ invariant, man erhält also: $G.z_1 \subseteq \mathbb{H}$ für $z_1 \in \mathbb{H}$ sowie $G.z_2 \subseteq -\mathbb{H}$ für $z_2 \in -\mathbb{H}$ und schließlich $G.z_3 \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ für $z_3 \in \hat{\mathbb{R}}$. Zeige nun noch, dass die Gruppe G auf diesen drei Mengen transitiv operiert, dann ist die Behauptung gezeigt.

Für $z_3 := \infty$ hat man $G.z_3 \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ und weiter oben ist schon gezeigt, dass $G.z_3 \supseteq \hat{\mathbb{R}}$, also insgesamt ist $G.z_3 = \hat{\mathbb{R}}$ und somit operiert G transitiv auf $\hat{\mathbb{R}}$.

Sei nun $z = x + iy \in \mathbb{H}$, also $y > 0$, dann ist $\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, denn es gilt

$\det \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \right\} = \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} = 1$, und mit (1) hat man:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = \left(\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}} \right) \sqrt{y} = x + iy = z.$$

Also liegen alle Elemente von \mathbb{H} in der G -Bahn von $i \in \mathbb{H}$, somit operiert G transitiv auf \mathbb{H} .

Weiterhin operiert G auch transitiv auf $-\mathbb{H}$, denn für $z = x - iy \in -\mathbb{H}$, also $y > 0$, haben wir:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot (-i) = \left(-\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}} \right) \sqrt{y} = x - iy = z.$$

Somit liegen alle Elemente von $-\mathbb{H}$ in der G -Bahn von $-i \in -\mathbb{H}$.

Damit ist gezeigt, dass $\hat{\mathbb{C}}$ aus drei G -Bahnen besteht, nämlich \mathbb{H} , $-\mathbb{H}$ sowie $\hat{\mathbb{R}}$. \square

§2 Definition der Modulgruppe Γ

Im Folgenden geben wir die Definition der Modulgruppe an und zeigen, wie diese auf der Menge der negativ orientierten \mathbb{R} -Basen von \mathbb{C} operiert.

Definition 2.1. Seien GITT die Menge aller Gitter in \mathbb{C} und BAS die Menge aller \mathbb{R} -Basen von \mathbb{C} , also $\text{BAS} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z, w \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R}\}$. Weiter sei BAS^+ die Menge aller Basen, die im Uhrzeigersinn, also negativ orientiert sind. Das bedeutet $\text{BAS}^+ := \{(z, w) \in \text{BAS} \mid \text{Im}(z/w) > 0\}$. Wir erhalten eine natürliche Abbildung:

$$\Psi : \text{BAS}^+ \rightarrow \text{GITT},$$

indem wir definieren

$$\Psi(z, w) = \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn es ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \Psi(z+w, w) &= \{k(z+w) + lw \mid k, l \in \mathbb{Z}\} = \{kz + (k+l)w \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{kz + \tilde{l}w \mid k, \tilde{l} \in \mathbb{Z}\} = \Psi(z, w). \end{aligned}$$

Die Gruppe $\Gamma := \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf BAS^+ durch $\gamma \cdot (z, w) = (z, w)\gamma^T = (az + bw, cz + dw)$, falls $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ und $(z, w) \in \text{BAS}^+$.

Die Gruppe $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird die Modulgruppe genannt.

Bemerkung. Das Paar $(az + bw, cz + dw)$ ist wieder ein Element von BAS^+ , da eine reelle Matrix die Orientierung einer Basis genau dann erhält, wenn ihre Determinante positiv ist.

Die Abbildung Ψ können wir zu einer Bijektion machen, indem wir diese auf dem Bahnenraum von BAS^+ unter Γ definieren. Das wollen wir festhalten in dem

Lemma 2.2. Zwei Basen werden unter Ψ genau dann auf dasselbe Gitter abgebildet, wenn sie in derselben Γ -Bahn liegen. Also stiftet Ψ eine Bijektion

$$\Psi : \Gamma \backslash \text{BAS}^+ \xrightarrow{\cong} \text{GITT},$$

wobei mit $\Gamma \backslash \text{BAS}^+$ der Raum aller Γ -Bahnen von BAS^+ bezeichnet wird.

Beweis. „ \Rightarrow “: Seien (z, w) und (z', w') zwei Elemente aus BAS^+ mit

$$\Psi(z, w) = \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w = \Lambda = \mathbb{Z}z' + \mathbb{Z}w' = \Psi(z', w').$$

Insbesondere liegen z' und w' in dem von z und w erzeugten Gitter, daher existieren $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$(z', w') = (az + cw, bz + dw) = (z, w) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Andererseits liegen z und w in dem von z' und w' erzeugten Gitter, wodurch es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$(z, w) = (\alpha z' + \gamma w', \beta z' + \delta w') = (z', w') \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt damit

$$(z, w) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (z, w).$$

woraus wir

$$(z(\alpha a + b\gamma) + w(c\alpha + d\gamma), z(\alpha\beta + b\delta) + w(c\beta + d\delta)) = (z, w)$$

erhalten. Durch Vergleich der Komponenten muss somit gelten

$$z(\alpha a + b\gamma - 1) + w(c\alpha + d\gamma) = 0 \quad \text{sowie} \quad z(\alpha\beta + b\delta) + w(c\beta + d\delta - 1) = 0,$$

was aufgrund der linearen Unabhängigkeit von z und w über \mathbb{R} bedeutet, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + b\gamma & \alpha\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: E.$$

Hieraus folgt nun, dass $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ über \mathbb{Z} invertierbar ist mit $g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, also ist g ein Element von $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ und es gilt $\det(g) = \pm 1$. Weiter transformiert g die negativ orientierte Basis (z, w) in die negativ orientierte Basis (z', w') und daher muss $\det(g) > 0$ gelten, also $\det(g) = 1$ und somit $g \in \Gamma$. Damit ist gezeigt, dass (z, w) und (z', w') in derselben Γ -Bahn liegen.

„ \Leftarrow “: Seien $(z, w), (z', w') \in \text{BAS}^+$ und liege (z', w') in der Γ -Bahn von (z, w) . Das heißt, es existiert ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $g.(z, w) = (az + cw, bz + dw) = (z', w')$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(z', w') &= \mathbb{Z}z' + \mathbb{Z}w' = \mathbb{Z}(az + cw) + \mathbb{Z}(bz + dw) \\ &= \{k(az + cw) + l(bz + dw) \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(ka + lb)z + (kc + ld)w \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{\tilde{k}z + \tilde{l}w \mid \tilde{k}, \tilde{l} \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w \\ &= \Psi(z, w). \end{aligned}$$

Zu (*): Für $\tilde{k}, \tilde{l} \in \mathbb{Z}$ beliebig, setze $k = d\tilde{k} - b\tilde{l} \in \mathbb{Z}$ und $l = a\tilde{l} - c\tilde{k} \in \mathbb{Z}$, dann ist

$$\begin{aligned} (ka + lb)z + (kc + ld)w &= [(d\tilde{k} - b\tilde{l})a + (a\tilde{l} - c\tilde{k})b]z + [(d\tilde{k} - b\tilde{l})c + (a\tilde{l} - c\tilde{k})d]w \\ &= \underbrace{[(ad - bc)\tilde{k} - ab\tilde{l} + ab\tilde{l}]}_{=1}z + \underbrace{[(ad - bc)\tilde{l} + cd\tilde{k} - cd\tilde{k}]}_{=1}w \\ &= \tilde{k}z + \tilde{l}w. \end{aligned}$$

□

Um die Menge BAS^+ etwas zu vereinfachen, dividieren wir nun noch eine \mathbb{C}^\times -Operation heraus. Die Gruppe \mathbb{C}^\times operiert auf BAS^+ durch Multiplikation, das heißt, wir haben für $\xi \in \mathbb{C}^\times$ und $(a, b) \in BAS^+$: $\xi(a, b) = (\xi a, \xi b)$. Da für $(a, b) \in BAS^+$ gilt $b \neq 0$, können wir schreiben $(a, b) = b(a/b, 1)$ mit $\text{Im}(a/b) > 0$. Daraus folgt direkt, dass jede \mathbb{C}^\times -Bahn genau einen Vertreter der Form $(z, 1)$ mit $z \in \mathbb{H}$ hat. Nun kommutiert die \mathbb{C}^\times -Operation mit der Operation von Γ , denn es gilt für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{C}^\times$ sowie $(z, w) \in BAS^+$:

$$\begin{aligned} \xi(\gamma.(z, w)) &= \xi(az + bw, cz + dw) = (a\xi z + b\xi w, c\xi z + d\xi w) \\ &= \gamma.(\xi z, \xi w) = \gamma.(\xi(z, w)). \end{aligned}$$

Daher operiert \mathbb{C}^\times auch auf $\Gamma \backslash BAS^+$.

Des Weiteren operiert \mathbb{C}^\times ebenfalls auf der Menge aller Gitter in \mathbb{C} durch Multiplikation, also $\xi(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w) = \mathbb{Z}\xi z + \mathbb{Z}\xi w$ für $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w \in \text{GITT}$. Somit haben wir für $\xi \in \mathbb{C}^\times$

$$\Psi(\xi(z, w)) = \Psi(\xi z, \xi w) = \mathbb{Z}\xi z + \mathbb{Z}\xi w = \xi(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w) = \xi\Psi(z, w),$$

die Abbildung Ψ übersetzt also die eine Operation in die andere und wegen der Bijektivität wirft Ψ damit die Bahnräume bijektiv aufeinander. Liegen nämlich $(z, w), (z', w') \in \Gamma \backslash BAS^+$ in einer \mathbb{C}^\times -Bahn, so existiert ein $\xi \in \mathbb{C}^\times$ mit

$$\begin{aligned} (z, w) &= \xi(z', w') \\ \Leftrightarrow \Psi(z, w) &= \Psi(\xi(z', w')) \\ \Leftrightarrow \Psi(z, w) &= \xi\Psi(z', w') \\ \Leftrightarrow \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w &= \xi(\mathbb{Z}z' + \mathbb{Z}w'). \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}w$ und $\mathbb{Z}z' + \mathbb{Z}w'$ liegen in einer \mathbb{C}^\times -Bahn. Also stiftet Ψ eine Bijektion

$$\Psi : \Gamma \backslash BAS^+ / \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\cong} \text{GITT} / \mathbb{C}^\times.$$

Sei nun $z \in \mathbb{H}$, dann ist $(z, 1) \in \text{BAS}^+$. Ist $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, dann ist modulo der \mathbb{C}^\times -Operation:

$$\gamma.(z, 1)\mathbb{C}^\times = (z, 1)\gamma^T\mathbb{C}^\times = (az + b, cz + d)\mathbb{C}^\times = \left(\frac{az + b}{cz + d}, 1 \right) \mathbb{C}^\times = (\gamma.z, 1)\mathbb{C}^\times. \quad (6)$$

Damit ist, wenn wir Γ durch gebrochen lineare Transformation auf \mathbb{H} operieren lassen, die Abbildung $z \mapsto (z, 1)\mathbb{C}^\times$ äquivariant unter Γ .

Dies nutzen wir in der

Proposition 2.3. *Die Abbildung $z \mapsto \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ liefert eine Bijektion*

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \text{GIT} / \mathbb{C}^\times.$$

Beweis. Die Abbildung ist die Verkettung der Abbildungen

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \xrightarrow{\varphi} \Gamma \backslash \text{BAS}^+ / \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\cong} \text{GIT} / \mathbb{C}^\times$$

und damit wohldefiniert. Dabei definieren wir

$$\varphi : \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \text{BAS}^+ / \mathbb{C}^\times, \Gamma z \mapsto \Gamma(z, 1)\mathbb{C}^\times$$

und φ ist nach (6) wohldefiniert. Zu zeigen ist nun, dass φ bijektiv ist.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $(v, w) \in \text{BAS}^+$, dann ist $(v, w)\mathbb{C}^\times = (v/w, 1)\mathbb{C}^\times$ mit $\text{Im}(v/w) > 0$. Also ist $v/w \in \mathbb{H}$ und unter Verwendung von (6) ist somit die Surjektivität von φ gezeigt.

Für die Injektivität seien $z, w \in \mathbb{H}$ mit $\varphi(\Gamma.z) = \varphi(\Gamma.w)$. Das bedeutet $\Gamma.(z, 1)\mathbb{C}^\times = \Gamma.(w, 1)\mathbb{C}^\times$, es existieren also $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $(w, 1) = \gamma.(z, 1)\lambda = \lambda(az + b, cz + d)$. Daraus folgern wir durch Vergleich der beiden Komponenten zum einen $1 = \lambda(cz + d)$, was äquivalent ist zu $\lambda = (cz + d)^{-1}$. Zum anderen erhalten wir damit $w = \lambda(az + b) = \frac{az + b}{cz + d} = \gamma.z$ und somit die Injektivität von φ . \square

§3 Ein Fundamentalbereich von Γ

Zwei Matrizen aus Γ werden besonders bezeichnet:

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir werden sehen, dass diese beiden Matrizen die Modulgruppe erzeugen. Doch zunächst noch einige Eigenschaften. Es gilt:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E, \quad (7)$$

$$(ST)^3 = -E = (TS)^3. \quad (8)$$

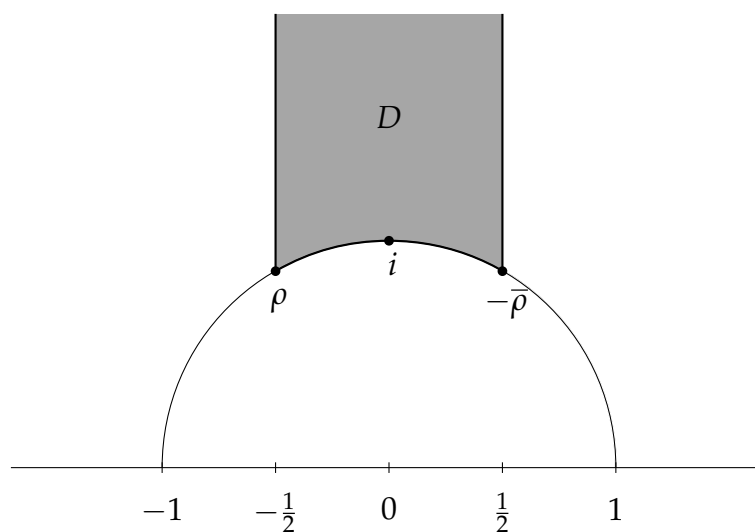
Zudem operieren die beiden Matrizen S und T auf der oberen Halbebene wie folgt, für $z \in \mathbb{H}$ ist:

$$S.z = \frac{-1}{z} \quad \text{sowie} \quad T.z = z + 1. \quad (9)$$

Wir betrachten nun die Menge D definiert durch

$$D := \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re}(z)| < 1/2, |z| > 1\},$$

und mit \bar{D} sei der Abschluss von D in \mathbb{H} bezeichnet. Man nennt D einen Fundamentalbereich der Modulgruppe Γ . Zur Veranschaulichung betrachte man die unten stehende Skizze, wobei $\rho := e^{2\pi i/3}$ und entsprechend $-\bar{\rho} := e^{\pi i/3}$.



Im folgenden Satz werden wir nun charakterisierende Eigenschaften der Menge \overline{D} festhalten und sehen, inwiefern die Matrizen S und T eine besondere Bedeutung haben.

Satz 3.1.

- (a) Für jedes $z \in \mathbb{H}$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.z \in \overline{D}$.
- (b) Liegen $z, w \in \overline{D}$, $z \neq w$, in derselben Γ -Bahn, dann gilt $\operatorname{Re}(z) = \pm \frac{1}{2}$ und $z = w + 1$ oder $|z| = 1$ und $w = -1/z$. In jedem Fall liegen beide Punkte auf dem Rand von D .
- (c) Für $z \in \mathbb{H}$ sei Γ_z der Stabilisator von z in Γ . Für $z \in \overline{D}$ ist $\Gamma_z = \{E, -E\}$, außer wenn
- $z = i$, dann ist Γ_z von der Ordnung vier, erzeugt von S ,
 - $z = \rho = e^{2\pi i/3}$, dann ist Γ_z von der Ordnung sechs, erzeugt von ST ,
 - $z = -\bar{\rho} = e^{\pi i/3}$, dann ist Γ_z von der Ordnung sechs, erzeugt von TS .
- (d) Die Gruppe Γ wird erzeugt von S und T .

Beweis. Zum Beweis von Teil (a) sei Γ' die von S und T erzeugte Untergruppe von Γ . Wir zeigen, dass es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $g \in \Gamma'$ gibt mit $g.z \in \overline{D}$.

Sei also $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$. Dann gilt für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ (siehe (3), beachte $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$)

$$\operatorname{Im}(g.z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Weiter ist für jedes $M > 0$ die Menge $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid |cz + d| < M\}$ endlich, denn es ist einerseits

$$M^2 > |cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \geq c^2y^2, \quad (10)$$

woraus $|c| \leq \frac{M}{y}$ folgt und andererseits

$$M > |cz + d| \geq |cx + d| \geq ||d| - |cx|| \geq |d| - |cx|, \quad (11)$$

wodurch wir $|d| \leq M(1 + |x|/y)$ erhalten.

Insbesondere ist die Menge $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma', |cz + d| < M\}$ als Teilmenge von $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid |cz + d| < M\}$ endlich. Daher existiert ein $\gamma' \in \Gamma'$, so dass $\operatorname{Im}(\gamma'.z)$ maximal ist. Da $T\gamma'.z = \gamma'.z + 1 = \operatorname{Re}(\gamma'.z) + 1 + i\operatorname{Im}(\gamma'.z)$, wähle $n \in \mathbb{Z}$ so, dass $\operatorname{Re}(T^n\gamma'.z) = \operatorname{Re}(\gamma'.z) + n \in [-1/2, 1/2]$. Bleibt nun noch zu zeigen, dass für $w := T^n\gamma'.z$ gilt: $|w| \geq 1$. Wir nehmen dazu an, dass $|w| < 1$. Dann folgt für

$S.w = -1/w$, dass $\text{Im}(S.w) = \text{Im}(w) |w|^{-1} > \text{Im}(w)$ im Widerspruch zur Maximalität von $\text{Im}(\gamma'.z)$.

Also ist $w = T^n \gamma'.z \in \bar{D}$ mit $T^n \gamma' \in \Gamma'$ und insbesondere ist Teil (a) bewiesen.

Für Teil (b) seien $z \in \bar{D}$ und $\pm E \neq \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $w = \gamma.z \in \bar{D}$. Wir können annehmen, dass $\text{Im}(\gamma.z) \geq \text{Im}(z)$ gilt, also $|cz + d| \leq 1$. Denn ist $\text{Im}(\gamma.z) \leq \text{Im}(z)$, so betrachten wir $w = \gamma.z \in \bar{D}$ und $\pm E \neq \gamma^{-1} \in \Gamma$ mit $\gamma^{-1}.w = z \in \bar{D}$.

Aus (10) erhalten wir nun $|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ und da $c \in \mathbb{Z}$, bleiben die Fälle $c = 0, 1, -1$.

Fall $c = 0$: Aus $ad - bc = 1$ folgt $a = d = \pm 1$ und damit weiter $\gamma.z = z \pm b$. Nach Voraussetzung ist $\gamma \neq \pm E$ und somit muss $b \neq 0$ gelten. Nun liegen aber $\text{Re}(z)$ und $\text{Re}(z \pm b)$ in $[-1/2, 1/2]$, somit müssen $\text{Re}(z) = \pm 1/2$ und $b = \pm 1$ sein, das heißt $z = w \pm 1$.

Fall $c = 1$: In diesem Fall erhalten wir aus $|z + d| \leq 1$ und (11), dass $|d| \leq \frac{3}{2}$, also $d = 0, 1, -1$.

- für $d = 0$ ist $|z| = 1$ und aus $ad - bc = 1$ erhalten wir $b = -1$. Somit ist $\gamma.z = a - 1/z = a - \bar{z}$. Aus $|a - \text{Re}(z)| \leq 1/2$ und $|\text{Re}(z)| \leq 1/2$ folgt daher $a = 0$, also $w = -1/z$, oder $a = \pm 1$ und $\text{Re}(z) = \pm 1/2$, woraus $z = \rho$ oder $z = -\bar{\rho}$ folgt.
- für $d = 1$ ist $z = \rho$ und aus $ad - bc = 1$ erhalten wir $b = a - 1$. Damit ist $\gamma.\rho = a - (\rho + 1)^{-1} = a + \rho$ und mit $|a + \text{Re}(\rho)| = |a - 1/2| \leq 1/2$ folgt, dass $a = 0$ oder $a = 1$ sein kann. Also $w = \gamma.z = \rho$ oder $w = \gamma.z = 1 + \rho = -\bar{\rho}$.
- für $d = -1$ ist $z = -\bar{\rho}$ und aus $ad - bc = 1$ erhalten wir $b = -a - 1$. Somit gilt $\gamma.(-\bar{\rho}) = a - (-\bar{\rho} - 1)^{-1} = a - \bar{\rho}$. Da nun $|a + \text{Re}(-\bar{\rho})| = |a + 1/2| \leq 1/2$ sein muss, folgt $a = 0, -1$ und daher $w = \gamma.z = -\bar{\rho}$ oder $w = \gamma.z = -1 - \bar{\rho} = \rho$.

Fall $c = -1$: Diesen Fall kann man auf den Fall $c = 1$ zurückführen, indem man die ganze Matrix γ durch ihr negatives ersetzt.

Um Teil (c) zu zeigen, betrachten wir $z \in \bar{D}$ und $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $\gamma.z = z$. Dann ist insbesondere $\text{Im}(\gamma.z) = \text{Im}(z)$, woraus wir $|cz + d| = 1$ folgern. Wir betrachten wie in Teil (b) wieder die Fälle $c = 0, 1, -1$.

Fall $c = 0$: Wegen $ad - bc = 1$ muss $a = d = \pm 1$ sein und somit erhalten wir $\gamma.z = z \pm b \stackrel{!}{=} z$. Woraus wir $b = 0$, also $\gamma = \pm E$ folgern.

Fall $c = 1$: In diesem Fall erhalten wir $|z + d| = 1$ und $ad - b = 1$. Wie in Teil (b) reicht es aus $d = 0, 1, -1$ zu betrachten.

- Ist $d = 0$, so haben wir $|z| = 1$ und $b = -1$, also $\gamma.z = a - 1/z = a - \bar{z} \stackrel{!}{=} z$. Was äquivalent zu $a = 2 \operatorname{Re}(z)$ ist. Da $a \in \mathbb{Z}$ und $-1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2$ existiert eine Lösung nur für $\operatorname{Re}(z) = 0, 1/2, -1/2$, nämlich $a = 0, 1, -1$.

- für $\operatorname{Re}(z) = 0$ ist $z = i$ und $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$.

- für $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ ist $z = -\bar{\rho}$ und $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS$.

- für $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ ist $z = \rho$ und $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ST)^2$.

- Im Fall $d = 1$ folgt $|z + 1| = 1$ und $a - b = 1$. Somit muss $z = \rho$ gelten und wir erhalten $\gamma.\rho = a - (\rho + 1)^{-1} = a + \rho \stackrel{!}{=} \rho$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = 0$, also erhalten wir $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST$.
- Für $d = -1$ ist $|z - 1| = 1$ und daher muss $z = -\bar{\rho}$ sein. Weiter gilt dann $-a - b = 1$ und somit $\gamma.(-\bar{\rho}) = a - (-\bar{\rho} - 1)^{-1} = a - \bar{\rho} \stackrel{!}{=} -\bar{\rho}$, was äquivalent zu $a = 0$ ist, und damit erhalten wir $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (TS)^2$.

Fall $c = -1$: Diesen Fall kann man wie in Teil (b) auf $c = 1$ zurückführen und erhält keine neuen Ergebnisse.

Insgesamt ist somit der Stabilisator von $z \in \bar{D}$ gegeben durch $\Gamma_z = \{E, -E\}$, außer

- für $z = i$ ist $\Gamma_i = \{S, -E, -S, E\}$,
- für $z = \rho$ ist $\Gamma_\rho = \{ST, (ST)^2, -E, -ST, -(ST)^2, E\}$,
- und für $z = -\bar{\rho}$ ist $\Gamma_{-\bar{\rho}} = \{TS, (TS)^2, -E, -TS, -(TS)^2, E\}$.

Bleibt zu zeigen $\Gamma' = \Gamma$, also Teil (d). Sei dazu $\gamma \in \Gamma$ und $z \in D$. Dann folgt mit (3), dass $\gamma.z \in \mathbb{H}$, also existiert nach (a) ein $\gamma' \in \Gamma'$ mit $\gamma'\gamma.z \in \bar{D}$. Damit gilt aber schon $\gamma'\gamma = \pm E$, denn angenommen $\gamma'\gamma \neq \pm E$, dann müssten, da $\gamma'\gamma \in \Gamma$, nach Teil (b) z und $\gamma'\gamma.z$ auf dem Rand von D liegen im Widerspruch zu $z \in D$. Somit ist nun $\gamma'\gamma = \pm E$ und damit weiter $\gamma = \gamma'^{-1}$ oder $\gamma = -\gamma'^{-1}$ mit $\pm\gamma'^{-1} \in \Gamma'$, da nach (7) $-E \in \Gamma'$. Also gilt $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und somit insgesamt $\Gamma = \Gamma'$. \square

Literatur

- [1] A. Deitmar, *Automorphe Formen* [Unveröffentlichtes Skript].
- [2] M. Koecher, A. Krieg (1998), *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, Berlin.
- [3] A. Krieg (2008), *Funktionentheorie I*, Skript zur Vorlesung.